

# Quadrangulations aléatoires et processus de branchement

Jérémie BETTINELLI

Mai 2008

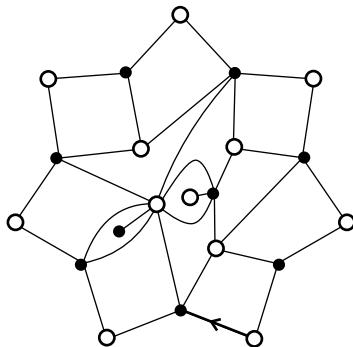
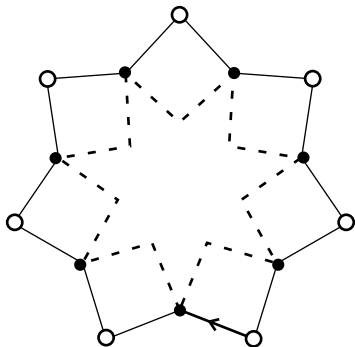
# Table des matières

- 1 Définitions
  - Quadrangulations
  - Métrique
  - Enveloppe
- 2 Dénombrement de quadrangulations
  - Asymptotiques
  - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
- 3 Lien avec un processus de branchement
  - Tranches
  - Squelette
  - Processus de branchement
- 4 Applications

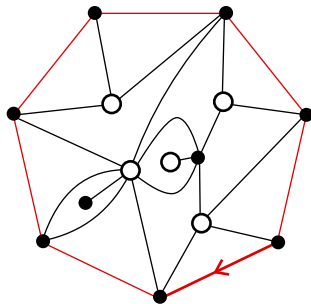
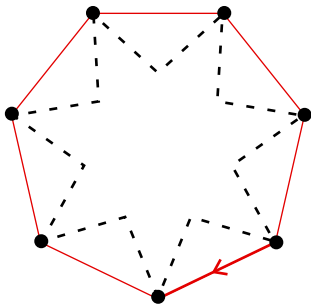
# Table des matières

- 1 Définitions
  - Quadrangulations
  - Métrique
  - Enveloppe
- 2 Dénombrement de quadrangulations
  - Asymptotiques
  - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
- 3 Lien avec un processus de branchement
  - Tranches
  - Squelette
  - Processus de branchement
- 4 Applications

# Quadrangulation à bord simple



# Quadrangulation à frontière, $(n, m)$ -quadrangulation



# Boule de taille $R$

- **hauteur** : distance à la racine
- $B_R(\mathbf{q})$  : carte composée des faces de  $\mathbf{q}$  dont un des sommets est de hauteur strictement inférieure à  $R$
- métrique :

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \inf \left\{ \frac{1}{R+1}, \mid B_R(\mathbf{q}_1) = B_R(\mathbf{q}_2) \right\}$$

## Théorème

*La suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers une probabilité  $\mu$  portée par les quadrangulations infinies.*

# Boule de taille $R$

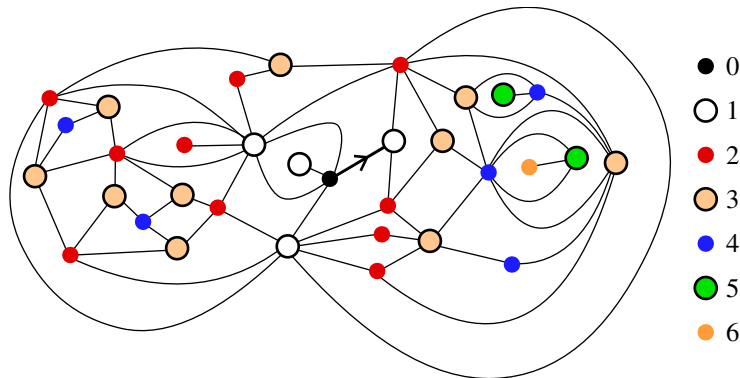
- **hauteur** : distance à la racine
- $B_R(\mathbf{q})$  : carte composée des faces de  $\mathbf{q}$  dont un des sommets est de hauteur strictement inférieure à  $R$
- métrique :

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \inf \left\{ \frac{1}{R+1}, \mid B_R(\mathbf{q}_1) = B_R(\mathbf{q}_2) \right\}$$

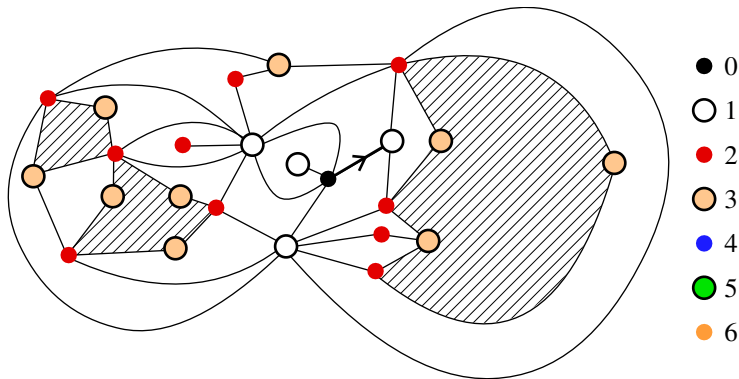
## Théorème

*La suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers une probabilité  $\mu$  portée par les quadrangulations infinies.*

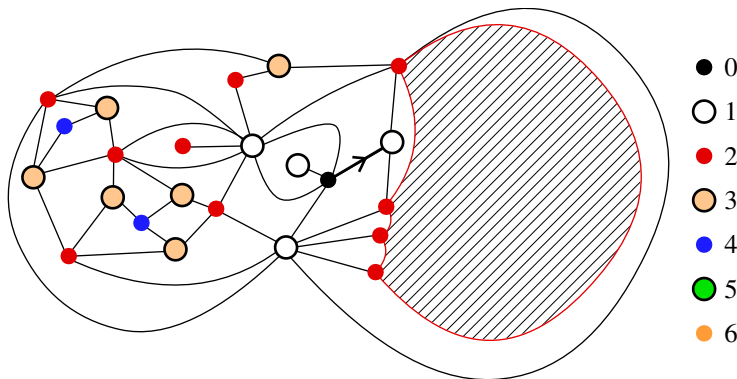
## Exemple de quadrangulation enracinée



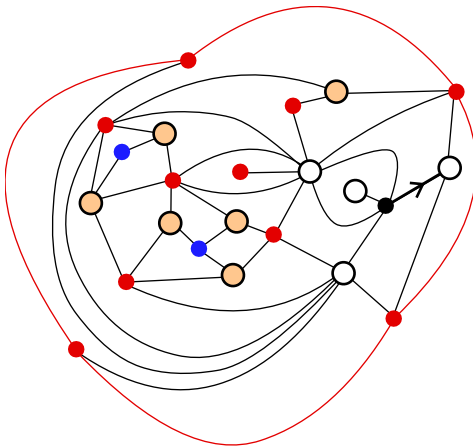
## Boule de taille 2



# Enveloppe de taille 2



# Enveloppe de taille 2



# Table des matières

- 1 Définitions
  - Quadrangulations
  - Métrique
  - Enveloppe
- 2 Dénombrement de quadrangulations
  - Asymptotiques
  - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
- 3 Lien avec un processus de branchement
  - Tranches
  - Squelette
  - Processus de branchement
- 4 Applications

# Asymptotiques

- $C(n)$  : nombre de quadrangulations à  $n + 1$  faces
- $C(n, m)$  : nombre de  $(n, m)$ -quadrangulations

## Proposition

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$C(n, m) \sim \frac{b(m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} n^{-\frac{5}{2}} 12^n, \quad \text{où}$$

$$b(m) := [y^m] \frac{64\sqrt{3}y}{\sqrt{(y-18)(y-2)^3}}.$$

- $C(n) = C(n+1, 1)$

# Asymptotiques

- $C(n)$  : nombre de quadrangulations à  $n + 1$  faces
- $C(n, m)$  : nombre de  $(n, m)$ -quadrangulations

## Proposition

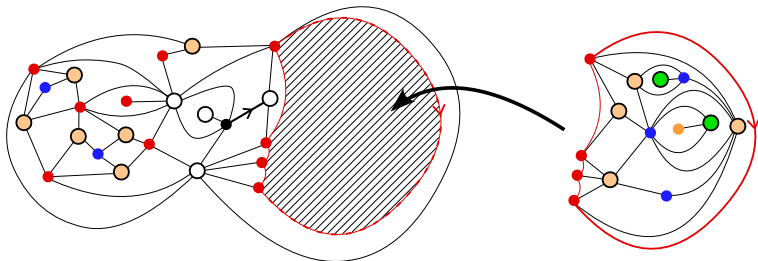
Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$C(n, m) \sim \frac{b(m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} n^{-\frac{5}{2}} 12^n, \quad \text{où}$$

$$b(m) := [y^m] \frac{64\sqrt{3}y}{\sqrt{(y-18)(y-2)^3}}.$$

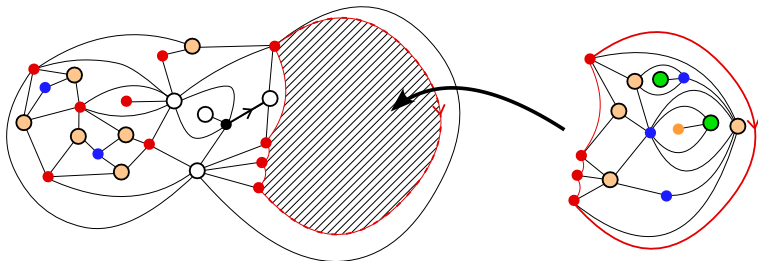
- $C(n) = C(n + 1, 1)$

# Probabilité d'avoir une enveloppe donnée



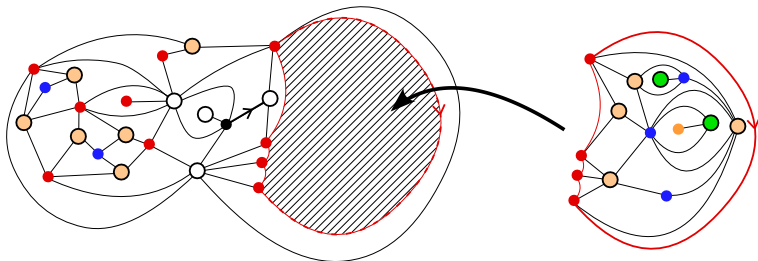
$$\mathbb{P} \left( \hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K \right) = \frac{C(N - n + m, m)}{C(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

# Probabilité d'avoir une enveloppe donnée



$$\mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K) = \frac{C(N - n + m, m)}{C(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

# Probabilité d'avoir une enveloppe donnée

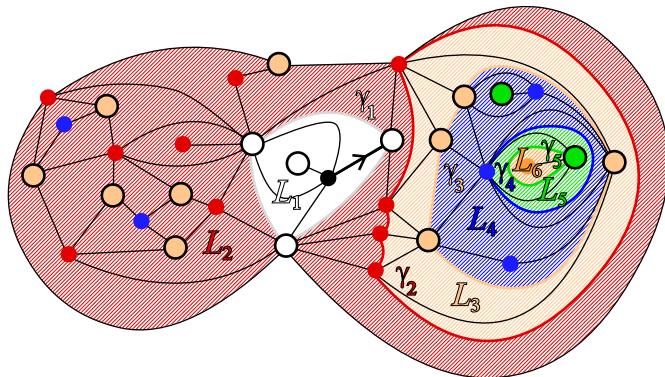


$$\mathbb{P} \left( \hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K \right) = \frac{C(N - n + m, m)}{C(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

# Table des matières

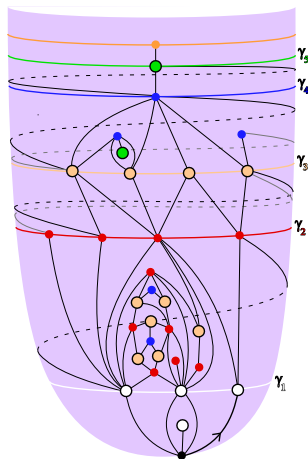
- 1 Définitions
  - Quadrangulations
  - Métrique
  - Enveloppe
- 2 Dénombrement de quadrangulations
  - Asymptotiques
  - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
- 3 Lien avec un processus de branchement
  - Tranches
  - Squelette
  - Processus de branchement
- 4 Applications

# Structure en tranches

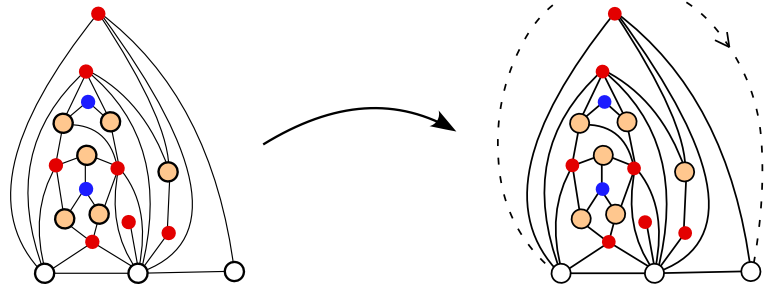


$$L_r \approx \hat{B}_r \setminus \hat{B}_{r-1}$$

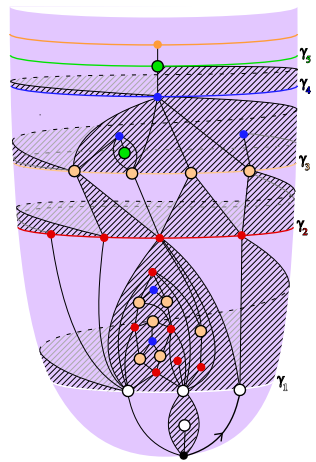
# Description des tranches



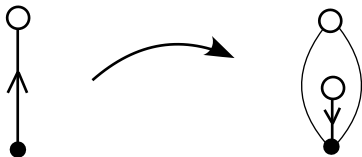
# Transformation des blocs



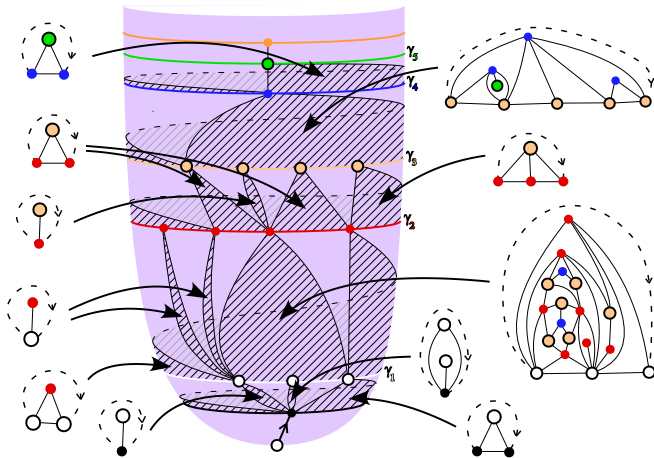
# Décomposition de l'enveloppe



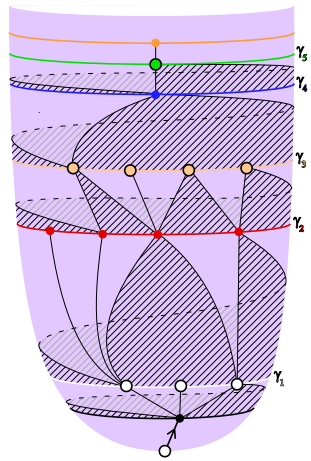
# Transformation de la racine



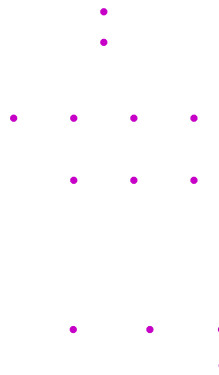
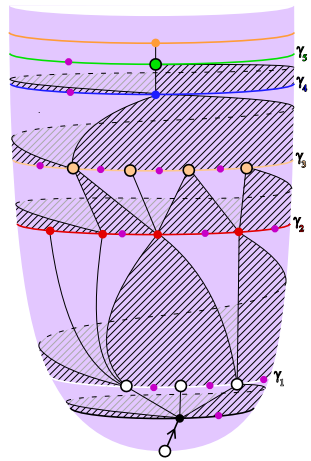
# Squelette d'une enveloppe



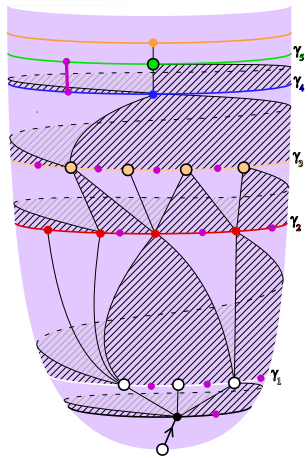
# Forêt induite



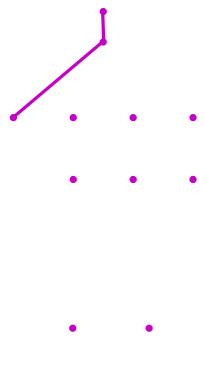
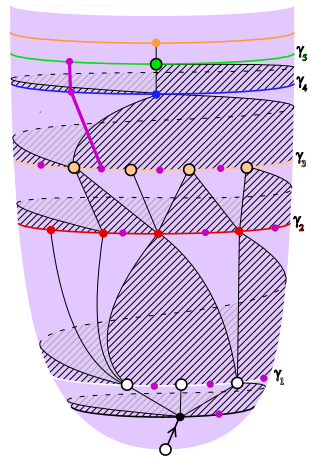
# Forêt induite



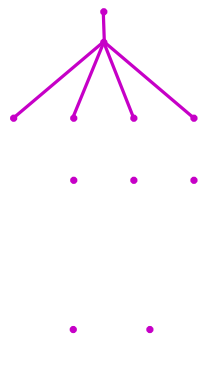
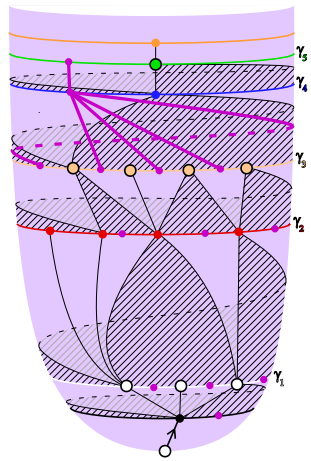
# Forêt induite



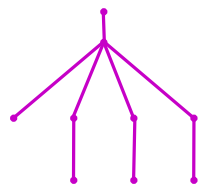
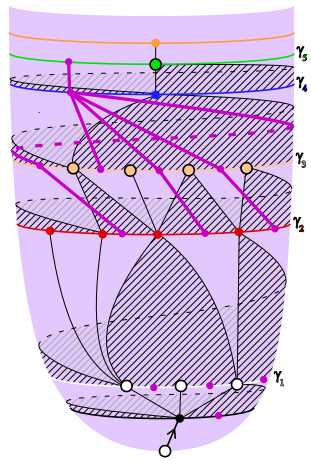
# Forêt induite



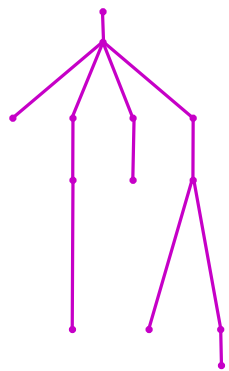
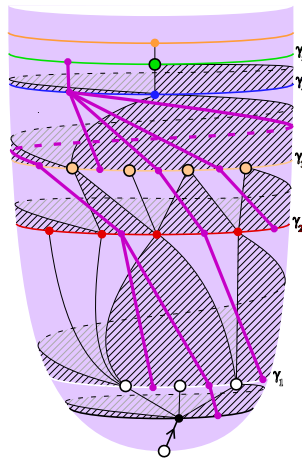
# Forêt induite



# Forêt induite



# Forêt induite



# Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement  $\xi \iff$  forêt  $F$
- nombre de particules à l'instant initial  $\iff$  nombre d'arbres de  $F$
- $\varphi$  : fonction génératrice de la loi de reproduction de  $\xi$
- probabilité que la trajectoire de  $\xi$  soit la forêt  $F$  :

$$\prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

- $d(v)$  : nombre d'enfants du sommet  $v$

# Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement  $\xi \leftrightarrow$  forêt  $F$
- nombre de particules à l'instant initial  $\leftrightarrow$  nombre d'arbres de  $F$
- $\varphi$  : fonction génératrice de la loi de reproduction de  $\xi$
- probabilité que la trajectoire de  $\xi$  soit la forêt  $F$  :

$$\prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

- $d(v)$  : nombre d'enfants du sommet  $v$

# Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement  $\xi \leftrightarrow$  forêt  $F$
- nombre de particules à l'instant initial  $\leftrightarrow$  nombre d'arbres de  $F$
- $\varphi$  : fonction génératrice de la loi de reproduction de  $\xi$
- probabilité que la trajectoire de  $\xi$  soit la forêt  $F$  :

$$\prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

- $d(v)$  : nombre d'enfants du sommet  $v$

# Probabilité qu'un processus de branchement ait une certaine trajectoire

- trajectoire d'un processus de branchement  $\xi \leftrightarrow$  forêt  $F$
- nombre de particules à l'instant initial  $\leftrightarrow$  nombre d'arbres de  $F$
- $\varphi$  : fonction génératrice de la loi de reproduction de  $\xi$
- probabilité que la trajectoire de  $\xi$  soit la forêt  $F$  :

$$\prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

- $d(v)$  : nombre d'enfants du sommet  $v$

## Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de  $F : v_1, v_2, \dots, v_p$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\mathcal{S}_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) &= \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F, \forall i, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &\rightarrow \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^p C(n_i, d(v_i) + 1) \right) \frac{b(m)}{b(1)} 12^{-\sum (n_i - 1)} \\
 &= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, d(v_i) + 1) 12^{-(n_i - 1)}.
 \end{aligned}$$

## Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de  $F : v_1, v_2, \dots, v_p$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\mathcal{S}_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) &= \sum_{K, \text{Sq}(K) \leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{\mathcal{B}}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \sum_{K, \text{Sq}(K) \leftrightarrow F, \forall i, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{\mathcal{B}}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &\rightarrow \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^p C(n_i, d(v_i) + 1) \right) \frac{b(m)}{b(1)} 12^{-\sum (n_i - 1)} \\
 &= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, d(v_i) + 1) 12^{-(n_i - 1)}.
 \end{aligned}$$

## Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de  $F$  :  $v_1, v_2, \dots, v_p$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\mathcal{S}_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) &= \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{\mathcal{B}}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F, \forall i, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{\mathcal{B}}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &\rightarrow \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^p C(n_i, d(v_i) + 1) \right) \frac{b(m)}{b(1)} 12^{-\sum (n_i - 1)} \\
 &= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, d(v_i) + 1) 12^{-(n_i - 1)}.
 \end{aligned}$$

## Probabilité d'avoir un squelette donné

- sommets de  $F : v_1, v_2, \dots, v_p$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\mathcal{S}_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) &= \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{\mathcal{B}}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F, \forall i, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{\mathcal{B}}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\
 &\rightarrow \sum_{n_1, \dots, n_p=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^p C(n_i, d(v_i) + 1) \right) \frac{b(m)}{b(1)} 12^{-\sum (n_i - 1)} \\
 &= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, d(v_i) + 1) 12^{-(n_i - 1)}.
 \end{aligned}$$

## Probabilité d'avoir un squelette donné

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

où

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t} \left( \sqrt{(t-9)(t-1)^3} - 3 + 6t - t^2 \right)$$

# Table des matières

- 1 Définitions
  - Quadrangulations
  - Métrique
  - Enveloppe
- 2 Dénombrement de quadrangulations
  - Asymptotiques
  - Probabilité d'avoir une enveloppe donnée
- 3 Lien avec un processus de branchement
  - Tranches
  - Squelette
  - Processus de branchement
- 4 Applications

# Principe général

On sait que

$$\mathbb{P}(\mathcal{S}_R(\mathbf{q}) \leftrightarrow F) = \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{q} \dots) &= \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \sum_F \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t) \\ &= [t^m] f(t) \mathbb{P}(\xi \dots) \end{aligned}$$

où

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3 \right)$$

# Principe général

On sait que

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}) \leftrightarrow F) = \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{q} \dots) &= \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \sum_F \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t) \\ &= [t^m] f(t) \mathbb{P}(\xi \dots) \end{aligned}$$

où

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3 \right)$$

# Principe général

On sait que

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}) \leftrightarrow F) = \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{q} \dots) &= \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \sum_F \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t) \\ &= [t^m] f(t) \mathbb{P}(\xi \dots) \end{aligned}$$

où

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3 \right)$$

# Étude de $|\gamma_r|$

$$\mathbb{P}(|\gamma_r(\mathbf{q})| = m) = [t^m]f(t) \mathbb{P}(\xi_r = 1 \mid \xi_0 = m)$$

## Théorème

*La variable  $|\gamma_r(\mathbf{q})|$  est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par*

$$\mathbb{P}(|\gamma_{r+n}(\mathbf{q})| = k \mid |\gamma_r(\mathbf{q})| = l) = \frac{[t^k]f(t)}{[t^l]f(t)} \mathbb{P}(\xi_n = l \mid \xi_0 = k).$$

# Étude de $|\gamma_r|$

$$\mathbb{P}(|\gamma_r(\mathbf{q})| = m) = [t^m]f(t) \mathbb{P}(\xi_r = 1 \mid \xi_0 = m)$$

## Théorème

*La variable  $|\gamma_r(\mathbf{q})|$  est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par*

$$\mathbb{P}(|\gamma_{r+n}(\mathbf{q})| = k \mid |\gamma_r(\mathbf{q})| = l) = \frac{[t^k]f(t)}{[t^l]f(t)} \mathbb{P}(\xi_n = l \mid \xi_0 = k).$$

# Convergence de $|\gamma_r|$

## Proposition

On a

$$2 \frac{|\gamma_r(\mathbf{q})|}{r^2} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{(loi)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

## Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

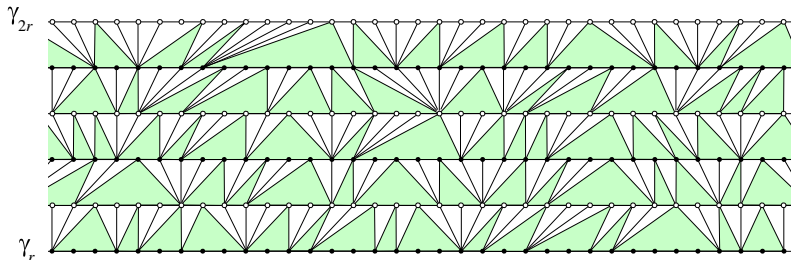
### Proposition

*Pour tout entier  $r$ , il existe dans  $\mathbf{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $r$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $r$ .*

# Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

## Proposition

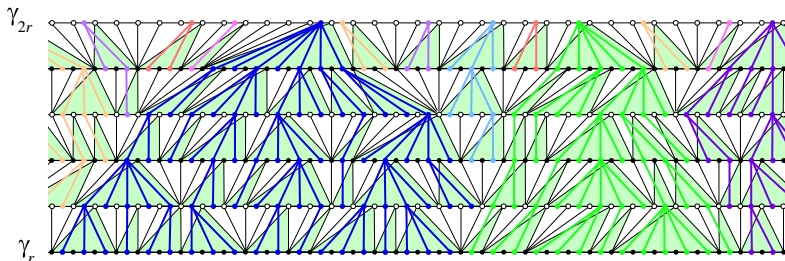
*Pour tout entier  $r$ , il existe dans  $\mathbf{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $r$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $r$ .*



# Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

## Proposition

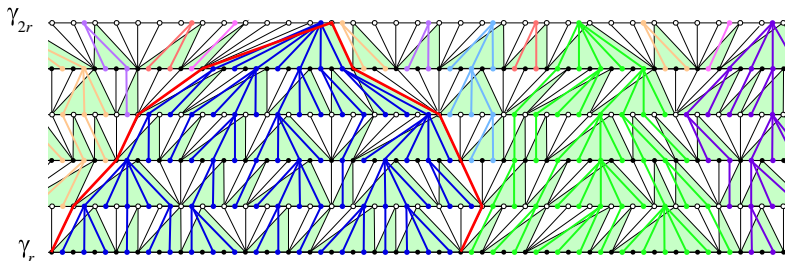
*Pour tout entier  $r$ , il existe dans  $\mathfrak{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $r$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $r$ .*



# Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

## Proposition

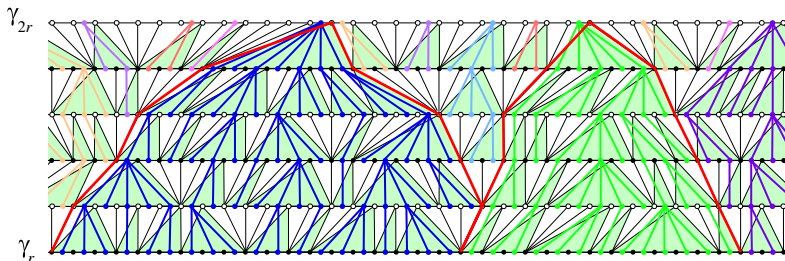
*Pour tout entier  $r$ , il existe dans  $\mathfrak{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $r$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $r$ .*



# Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

## Proposition

*Pour tout entier  $r$ , il existe dans  $\mathfrak{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $r$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $r$ .*



# Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

## Proposition

*Pour tout entier  $r$ , il existe dans  $\mathfrak{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $r$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $r$ .*

