

Role de la dissipation en turbulence d'ondes de flexion

B. Miquel^a, A. Alexakis^a & N. Mordant^b

a. Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, Paris

b. Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, Université Joseph Fourier, Grenoble

Résumé :

La flexion des plaques élastiques minces est décrite par l'équation nonlinéaire de Föppl-von Karman. La théorie de la turbulence d'ondes prédit le spectre des solutions stationnaires à cette équation lorsqu'une cascade d'énergie existe entre un forçage à grande échelle et une dissipation à petite échelle. Ce spectre, dit de Kolmogorov-Zakharov, demeure insaisissable dans les expériences, dans lesquelles un spectre plus raide est observé. Nous présentons une simulation numérique de ces équations, où nous utilisons successivement une dissipation réaliste mesurée dans les expériences, puis une dissipation localisée aux petites échelles telle que le préconise la turbulence d'onde. Dans le premier cas, les résultats expérimentaux sont reproduits, alors que le spectre de Kolmogorov-Zakharov est obtenu lorsque la dissipation est localisée, soulignant la nécessité de l'existence d'un régime inertiel dans l'application de la théorie de la turbulence d'onde.

Abstract :

Flexural waves in thin elastic plates obey the nonlinear Föppl-von Karman equation. The so-called Kolmogorov-Zakharov spectrum of the stationary solution of this equation is derived by the Wave Turbulence Theory, stating that an energy cascade exists between a large-scale forcing and some small-scale dissipation. The Kolmogorov-Zakharov scaling remains elusive in experiments, that measure a steeper spectrum instead. We present a direct numerical simulation of the Föppl-von Karman equations. We first implement a realistic dissipation, as measured in experiments; in a second set of simulations, we use a well localised dissipation as stated by Wave Turbulence. The first set reproduces successfully the experimental observations, whereas the Kolmogorov-Zakharov scaling is observed with localised dissipation. This observation emphasizes the necessity of the existence of a truly conservative inertial range for Wave Turbulence Theory to be valid.

Mots clefs : Föppl-von Karman, Turbulence d'ondes, Dissipation

1 Equations de Föppl-von Karman et Théorie de la Turbulence d'ondes

Le champ de déformation Z d'une plaque élastique mince d'épaisseur h est régi dans le régime de flexion faible par les équations de Föppl-von Karman [1-3]. Ces équations comportent un terme linéaire de flexion pure, ainsi qu'un terme nonlinéaire cubique dû à l'extension de la plaque durant la déformation :

$$\partial_{tt}Z = -\frac{Eh^2}{12\rho(1-\sigma^2)}\Delta^2Z + \frac{1}{\rho}\{Z, \chi\} \quad (1)$$

$$\Delta^2\chi = -\frac{E}{2}\{Z, Z\}. \quad (2)$$

Les propriétés du matériau sont décrites par son module d'Young E , sa masse volumique ρ , et son coefficient de Poisson σ . L'opérateur bilaplacien est noté Δ^2 et les crochets $\{f, g\} = \partial_{xx}f\partial_{yy}g + \partial_{yy}f\partial_{xx}g - 2\partial_{xy}f\partial_{xy}g$ dénotent l'opérateur bilinéaire de Monge-Ampère.

En négligeant le terme cubique, nous obtenons la relation de dispersion des ondes de flexion pure

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{(Eh^2)}{(12\rho[1-\sigma^2])}} k^2. \quad (3)$$

Lorsque l'amplitude des ondes croît, les nonlinéarités induisent un couplage entre les modes qui peuvent alors échanger de l'énergie. Dans la limite des faibles nonlinéarités, les échanges d'énergie demeurent lents devant l'oscillation rapide des ondes [8]. Si le système est forcé aux grandes échelles et qu'un phénomène dissipatif est présent aux petites échelles, une cascade d'énergie parcourt l'espace de Fourier et construit un spectre continu. La théorie de la turbulence d'ondes appliquée spécifiquement aux équations de Föppl-von Karman par Düring *et al.* [4] prédit le spectre de *Kolmogorov-Zakharov* pour le champ de vitesse $E_v(k) = k \left\langle \left| \partial_t \tilde{Z}_{\mathbf{k}} \right|^2 \right\rangle$ en régime stationnaire :

$$E_v^{(KZ)}(k) \propto k\phi^{1/3} \ln(k/k^*)^{1/3}. \quad (4)$$

Dans cette expression, k^* désigne la longueur d'onde de coupure UV imposé par la dissipation, alors que le flux d'énergie à travers les échelles est noté ϕ . Ce spectre demeure insaisissable dans les réalisations expérimentales [5, 6], dans lesquelles sont mesurés des spectres plus raides et une dépendance différente en la puissance injectée ϕ :

$$E_v^{exp}(k) \propto k^{-0.2} \phi^{1/2}. \quad (5)$$

2 Mesures expérimentales et résultats numériques

Nous présentons les résultats obtenus en intégrant numériquement les équations de Föppl-von Karman en présence d'un forçage $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ et d'une dissipation $-\gamma_{\mathbf{k}} \partial_t \tilde{Z}_{\mathbf{k}}$. Dans l'espace de Fourier, ces équations s'écrivent :

$$\partial_{tt} \tilde{Z}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \tilde{Z}_{\mathbf{k}} + N_3(\tilde{Z}_{\mathbf{k}}) - \gamma_{\mathbf{k}} \partial_t \tilde{Z}_{\mathbf{k}} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}} \quad (6)$$

où $N_3(\tilde{Z}_{\mathbf{k}})$ est la transformée de Fourier du terme d'extension $\{Z, \chi\}$. Nous utilisons un algorithme pseudo-spectral et un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2. Afin de reproduire fidèlement l'expérience, nous utilisons les paramètres mesurés expérimentalement : la mesure de la relation de dispersion $\omega = 0.64k^2$ est décrite dans [5], alors que le taux d'amortissement des ondes γ_k est mesuré dans [7].

$$\gamma_k [\text{s}^{-1}] = 0.73 + 0.025(k/2\pi)^2 \quad (7)$$

Un champ de déformation typique ainsi que les spectres obtenus lorsque l'amplitude du forçage est variée sont présentés sur la figure 1. Les champs issus des expériences et des simulations présentent le même aspect (taille caractéristique des structure, granulosité). Cet accord qualitatif se confirme lors de l'étude des spectres. Nous obtenons un comportement en loi de puissance en k dont l'exposant varie légèrement entre -0.2 et 0.05 lorsque l'amplitude du forçage croît. Les spectres renormalisés par $\phi^{0.52}$ se regroupent sur une courbe maîtresse. Ces deux résultats sont en très bon accord avec les observations expérimentales rappelées par l'équation 5. Nous en déduisons que les équations de Föppl-von Karman amorties capturent la dynamique des plaques minces en régime de cascade turbulente.

3 Vers le spectre de Kolmogorov-Zakharov

La dissipation expérimentale, bien que plus efficace à petite échelle, est mal localisée, contrairement à ce que prônent les hypothèses de la turbulence d'ondes. Cela a pour conséquence directe que le flux d'énergie n'est pas constant et ne peut pas en toute rigueur être identifié à la puissance injectée. Ce flux est évalué grâce à un bilan d'énergie sur un disque de rayon k dans l'espace de Fourier. En régime stationnaire, le flux d'énergie ϕ_k sortant de ce disque est la différence entre la puissance injectée par le forçage dans le disque et la puissance qui y est dissipée :

$$\phi_k = \left\langle \sum_{|\mathbf{q}| < k} \mathcal{F}_{\mathbf{k}}^* \partial_t \tilde{Z}_{\mathbf{k}} - \gamma_{\mathbf{k}} \left| \partial_t \tilde{Z}_{\mathbf{k}} \right|^2 \right\rangle \quad (8)$$

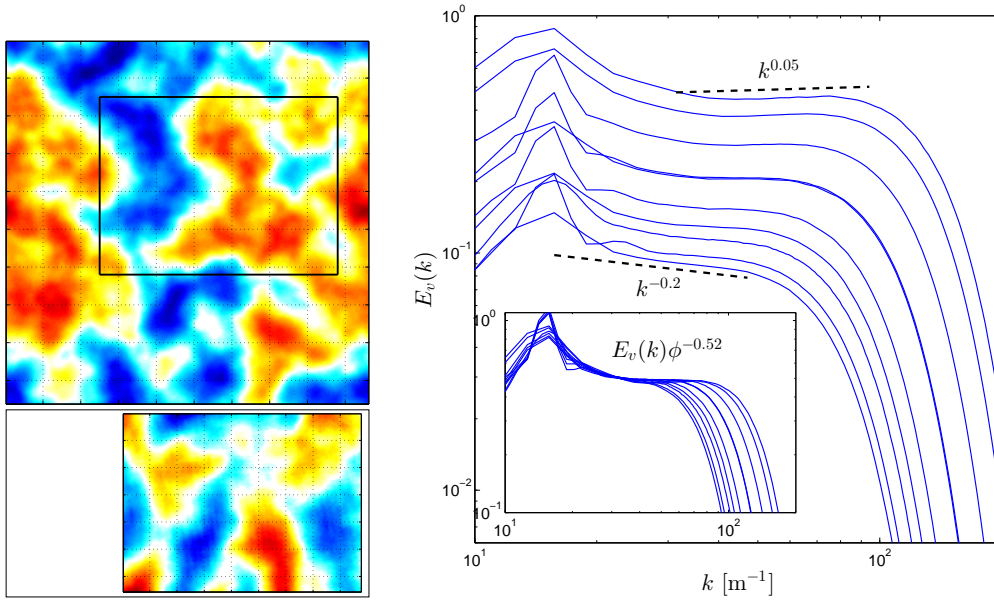


FIGURE 1 – Figure de gauche : champ de déformation typique obtenu par simulation numérique (haut) ou dans l’expérience (bas). Figure de droite : spectres numériques obtenus avec une dissipation mesurée expérimentalement (équation 7) pour différentes puissances injectées ϕ . Insert : Spectres renormalisés par $\phi^{0.52}$.

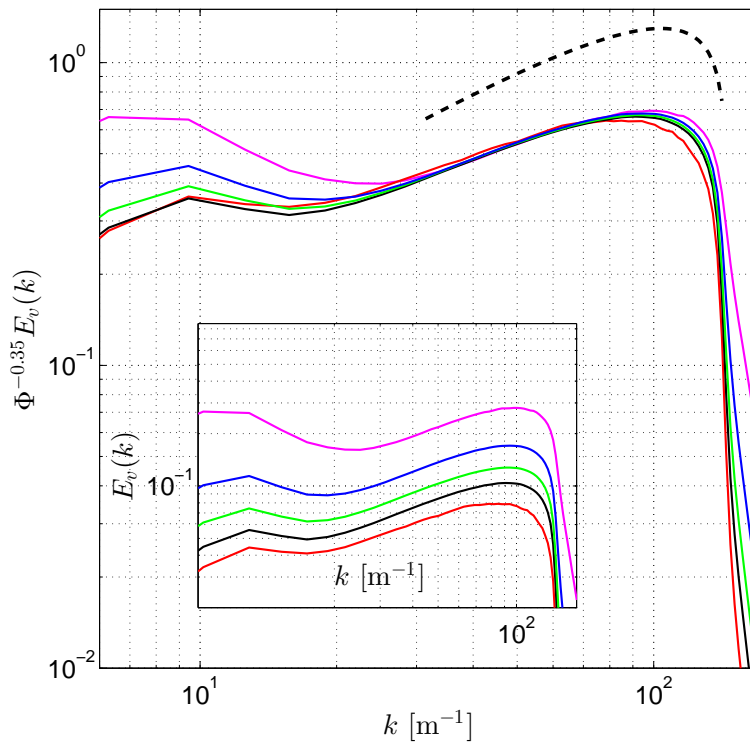


FIGURE 2 – Figure principale : les spectres numériques renormalisés par $\phi^{0.35}$ (lignes pleines) obtenus pour différentes puissances injectées ϕ avec une dissipation localisée après la coupure $k^* = 154 \text{ m}^{-1}$ sont très semblables au spectre de Kolmogorov-Zakharov (ligne pointillée). Insert : Spectres non renormalisés.

où les crochets $\langle \dots \rangle$ dénotent une moyenne temporelle et statistique. Le membre de droite de cette équation peut être évalué dans notre simulation, ce qui fournit une mesure du flux d'énergie. Alors que le forçage $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ est bien localisé aux grandes échelles, il est clair d'après l'équation 8 qu'une dissipation mal localisée implique un flux d'énergie non constant à travers les échelles. Pour revenir dans le cadre de la turbulence d'ondes, nous utilisons donc dans cette partie une dissipation localisée uniquement au-delà d'un vecteur d'onde de coupure k^* de sorte que le flux d'énergie dans la cascade soit constant et qu'un véritable régime inertiel conservatif existe dans les échelles intermédiaires. Les spectres obtenus sont présentés sur la figure 2 et sont très semblables au spectre de Kolmogorov-Zakharov.

4 Conclusions

L'étude numérique que nous avons conduite nous a fourni une double conclusion [9]. Tout d'abord, la dynamique d'un régime turbulent d'ondes de flexion est fidèlement décrite par les équations de Föppl-von Karman. Notre étude pointe l'absence d'un flux constant à travers les échelles comme source du désaccord entre les lois de puissances observées expérimentalement et les prédictions de la théorie de la turbulence d'ondes. En présence d'un réel régime inertiel conservatif, le spectre de *Kolmogorov-Zakharov* prédit par la turbulence d'ondes est observé.

Références

- [1] L. Landau and E. Lifshitz 1959 Theory of Elasticity *Pergamon, New York*
- [2] M. Amabili 2008 Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates *Cambridge University Press*
- [3] B. Audoly and Y. Pomeau 2010 Elasticity and Geometry : from hair curls to the non linear response of shells *Oxford University Press*
- [4] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 025503
- [5] N. Mordant 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 234505
- [6] A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille, and C. Touzé 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 234504
- [7] B. Miquel and N. Mordant 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 034501
- [8] B. Miquel and N. Mordant 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066607
- [9] B. Miquel, A. Alexakis and N. Mordant *submitted to Phys. Rev. E*