

Le polynôme de Jones : construction d'un invariant de nœuds via les algèbres de von Neumann

Fathi Ben Aribi

Sous la direction de Georges Skandalis

Mémoire de Master 2

« Mathématiques Fondamentales »

Université Paris 7

Introduction

Dans ce mémoire nous décrivons la construction d'un invariant de nœuds très puissant : le polynôme de Jones.

Tout commença dans les années 1980 : Vaughan Jones venait d'inventer un moyen de quantifier le degré d'une inclusion de facteurs II_1 $N \subseteq M$, en définissant l'indice $[M : N]$ de l'inclusion. Il construisit aussi une tour d'inclusion de facteurs à partir de la première, avec conservation des indices successifs, par une itération de la fameuse *construction de base*. De là il tira une suite de projections relatives e_i qui engendraient jusqu'à l'indice n une algèbre de dimension finie, donc une somme directe de matrices, munie d'une trace. Cela lui permit de mettre en évidence des propriétés combinatoires remarquables des e_i , qui rappelaient les relations de la présentation du groupe de tresses d'Artin B_n . Jones en déduit ainsi une représentation de B_n dans l'algèbre des e_i , et par suite, en utilisant la trace, un invariant polynômial d'entrelacs, le polynôme de Jones.

Les articles originaux sont [Jon83], [Jon85], [Jon87]. Depuis, Jones publia deux livres qui résument, actualisent et développent ces diverses découvertes en théories des sous-facteurs et des nœuds, à savoir [JS97] et [Jon91]. Dans ce mémoire, nous nous sommes fortement inspirés de ces ouvrages pour ce qui est de la structure et de l'ordre de présentation des nombreuses notions à aborder.

Le fait qu'on découvre depuis d'autres manières plus simples de définir le polynôme de Jones (et certaines ne sortant pas de la théorie des nœuds) n'enlève pas d'intérêt à revoir en détail le cheminement de la première construction de cet invariant, ce qui est l'objet de ce mémoire. Ceci pour deux raisons : tout d'abord, les outils de la théorie des algèbres de von Neumann peuvent être plus adaptés que d'autres pour déduire certaines propriétés de l'invariant ; ensuite, ce cheminement est remarquable comme lien entre deux domaines a priori éloignés, il a ouvert et continuera à ouvrir de nombreuses portes entre ces domaines et d'autres (comme la physique statistique, cf [Jon91]).

La partie 1 contient des préliminaires, nombreux mais nécessaires, sur les algèbres de von Neumann et les facteurs. Ainsi, aucune connaissance particulière préalable n'est requise. Certains théorèmes fondamentaux mais difficiles seront admis. Cette partie trouve principalement ses sources dans [JS97], [Dix96], et [Jonb].

La partie 2 suit directement la partie 1 et utilise les notions de construction GNS et d'indice d'une inclusion de facteurs pour rentrer dans le vif du sujet et définir la construction de base et l'algèbre des e_i . Cette partie se base sur [JS97] et [Jon83]. Les diagrammes de Bratteli ont été pris dans [Jona] et [Jon83].

La partie 3 est indépendante des deux précédentes. Elle contient des préliminaires rapides sur le groupe de tresses et les entrelacs, et pose et résout la question clé de ce mémoire : comment construire un invariant d'entrelacs à partir de représentations du groupe de tresses ? Cette partie trouve ses sources dans [KT08], [BH03], [Bla] et [Cro04], le premier contenant les démonstrations détaillées de plusieurs résultats fondamentaux admis ici. La plupart des figures proviennent de [KT08], [Bla], [Jona] et [Ost01].

Enfin, la partie 4 utilise l'algèbre des e_i de la partie 2 et le formalisme de la partie 3 pour construire le fameux polynôme de Jones. Nous terminons sur quelques propriétés de cet invariant et sur certaines de ses applications en théorie des nœuds, par exemple : quels entrelacs ne peuvent pas s'écrire comme la fermeture d'une tresse à 3 ou 4 brins ?

Table des matières

Introduction	2
1 Algèbres de von Neumann	4
1.1 Algèbres de von Neumann et facteurs	4
1.2 Comparaison de projections et type d'un facteur	8
1.3 Réduite d'une algèbre de von Neumann	11
1.4 $L^2(M)$: construction et applications	13
1.5 Dimension de von Neumann d'un espace de Hilbert	16
1.6 Indice d'une inclusion de facteurs	21
2 Construction de l'algèbre des e_i	24
2.1 La construction de base de Jones	24
2.2 L'algèbre des e_i	27
3 Groupe de tresses et invariants de nœuds	29
3.1 Définition et présentation du groupe de tresses	29
3.2 Représentations du groupe de tresses	33
3.3 nœuds et entrelacs	34
3.4 Tresses et nœuds : le théorème de Markov	38
3.5 Fonctions de Markov : L'exemple du polynôme d'Alexander	40
4 Le Polynôme de Jones, invariant de nœuds	43
4.1 Représentation du groupe de tresses dans l'algèbre des e_i et première définition de $V_L(t)$	43
4.2 Propriétés de $V_L(t)$	45
Remerciements	47
Références	48

1 Algèbres de von Neumann

1.1 Algèbres de von Neumann et facteurs

Sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels et les espaces de Hilbert considérés dans la suite sont définis sur le corps \mathbb{C} , et tous les espaces de Hilbert sont séparables.

On note \mathbb{U} le groupe des complexes de module 1.

Définition 1.1.1. Soit H un espace de Hilbert. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de H sera considéré anti-linéaire à gauche, linéaire à droite. On note $B(H) := \{T : H \rightarrow H; T \text{ linéaire continue}\}$. C'est une algèbre pour la composition, unifière avec l'identité de $B(H)$ pour unité, qui sera notée 1. On munit $B(H)$ de la norme d'opérateur :

$$\forall T \in B(H), \|T\| := \sup \{\|T(x)\|; x \in H, \|x\| \leq 1\}$$

Définition 1.1.2. Soit H un espace de Hilbert. À tout $T \in B(H)$ on associe son adjoint T^* défini comme l'unique élément de $B(H)$ vérifiant $\forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. L'étoile $T \mapsto T^*$ est involutive, anti-linéaire et anti-multiplicative.

Soit $T \in B(H)$. T est dit *auto-adjoint* si $T = T^*$, *unitaire* si $TT^* = T^*T = 1$, *normal* si $TT^* = T^*T$.

Proposition 1.1.3. $\forall T \in B(H), \|T\|^2 = \|T^*T\|$.

En particulier, $T \in B(H)$ est nul si et seulement si T^*T l'est.

Définition 1.1.4. Soit H un espace de Hilbert non nul. Soit $T \in B(H)$.

$Sp(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda.1 \text{ non inversible}\}$ est le *spectre* de T .

Proposition 1.1.5. Soit $T \in B(H)$. $Sp(T)$ est une partie non vide compacte de \mathbb{C} .

Si T est auto-adjoint, $Sp(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Si T est unitaire, $Sp(T) \subseteq \mathbb{U}$.

Remarque 1.1.6. Tout $T \in B(H)$ peut s'écrire $T = U + iV$ où U, V sont auto-adjoints. Il suffit de prendre $U = \frac{T + T^*}{2}$, $V = \frac{T - T^*}{2i}$ (les « parties réelle et imaginaire » de T).

Proposition 1.1.7. Soit $T \in B(H)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $T = T^*$ et $Sp(T) \subseteq \mathbb{R}_+$
2. $\forall x \in H, \langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}_+$
3. $\exists S \in B(H), T = S^*S$
4. $\exists S \in B(H), S = S^*, T = S^2$

Définition 1.1.8. Un $T \in B(H)$ qui vérifie l'une des propriétés de la proposition précédente est dit *positif*.

Remarque 1.1.9. L'équivalence de ces propriétés découle de rapides applications du calcul fonctionnel continu, un cas particulier du calcul fonctionnel borélien, cf [Jonb]. Notons que ce calcul fonctionnel continu permet d'exhiber les *partie positive* et *partie négative* de tout $T \in B(H)$ auto-adjoint, en prenant $T_+ = \max(T, 0)$ et $T_- = \max(-T, 0)$. On a $T = T_+ - T_-$.

Définition 1.1.10. Soient $S, T \in B(H)$. On note $S \leq T$ si $T - S$ est positif. Ceci définit un ordre partiel sur $B(H)$.

Remarque 1.1.11. On n'a pas forcément $S \leq T, U \geq 0 \Rightarrow SU \leq TU$, mais on a une invariance de l'ordre par conjugaison : $\forall U \in B(H), S \leq T \Rightarrow U^*SU \leq U^*TU$.

En effet, $S \leq T \Rightarrow T - S = V^*V \Rightarrow U^*TU - U^*SU = U^*V^*VU = (VU)^*(VU) \geq 0 \Rightarrow U^*SU \leq U^*TU$.

Définition 1.1.12. Soit H un espace de Hilbert. Sur $B(H)$ on peut définir quatre topologies :

- la *topologie normique*, celle de la norme d'opérateur :

$$T_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{CV_N} 0 \Leftrightarrow \|T_i\| \rightarrow 0$$

- la *topologie forte*, ou convergence point par point :

$$T_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{CV_F} 0 \Leftrightarrow \forall x \in H, \|T_i(x)\| \rightarrow 0$$

- la *topologie ultrafaible* :

$$T_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{CV_{uf}} 0 \Leftrightarrow \forall (x_n), (y_n) \in H^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_i(x_n), y_n \rangle \rightarrow 0$$

- la *topologie faible* :

$$T_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{CV_f} 0 \Leftrightarrow \forall x, y \in H, \langle T_i(x), y \rangle \rightarrow 0$$

Proposition 1.1.13. On a l'ordre suivant pour ces topologies :

$$CV_N \Rightarrow CV_F \Rightarrow CV_f \text{ et } CV_N \Rightarrow CV_{uf} \Rightarrow CV_f.$$

Proposition 1.1.14. Pour une suite bornée dans $B(H)$, converger faiblement équivaut à converger ultrafaiblement.

Cette propriété sera utile pour manipuler la topologie ultrafaible, plus difficile à définir, mais beaucoup plus adaptée à l'étude des algèbres de von Neumann.

Définition 1.1.15. Si $A \subseteq B(H)$, le *commutant* de A est $A' := \{T \in B(H), \forall S \in A, TS = ST\}$. Le *bicommutant* de A est $A'' := (A)'$.

Remarque 1.1.16. Si $A \subseteq B(H)$, $A''' = A'$.

Théorème 1.1.17 (du bicommutant de von Neumann). Soit $M \subseteq B(H)$ une sous-algèbre unifère $*$ -stable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $M = M''$
- (ii) M est faiblement fermée dans $B(H)$
- (iii) M est fortement fermée dans $B(H)$.

Définition 1.1.18. Une sous-algèbre M de $B(H)$ unifère, $*$ -stable, vérifiant une des propriétés du théorème précédent est appelée *algèbre de von Neumann*.

L'algèbre de von Neumann engendrée par une partie S de $B(H)$ est $(S \cup S^*)''$. C'est la plus petite algèbre de von Neumann contenant S .

Le Théorème 1.1.17 est remarquable en ce sens qu'il offre une équivalence inattendue entre deux caractérisations, l'une purement topologique (être fermé pour une certaine topologie), l'autre purement algébrique (être égal à son bicommutant).

Définition 1.1.19. Soient M et N algèbres de von Neumann, et $\phi : M \rightarrow N$. ϕ est un *morphisme d'algèbres de von Neumann* si c'est un homomorphisme d'algèbres, préservant l'étoile, et continu pour la topologie ultrafaible (au départ et à l'arrivée). On appellera aussi un tel ϕ un *homomorphisme normal*. Dans ce cas, on a que $\phi(M)$ est une algèbre de von Neumann.

Exemple 1.1.20. Tout simplement, $\mathbb{C} \cdot 1$ et $B(H)$ sont des algèbres de von Neumann dans $B(H)$. Remarquons qu'elles sont commutantes l'une de l'autre.

Exemple 1.1.21. Soit X un espace mesuré de mesure σ -finie μ . Alors $H = L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire usuel, et $L^\infty(X, \mu)$ s'identifie à une sous-algèbre de $B(L^2(X, \mu))$ par la multiplication des fonctions. Alors $L^\infty(X, \mu)$ est une algèbre de von Neumann, commutative. En fait, on a même le théorème suivant :

Théorème 1.1.22. *Toute algèbre de von Neumann commutative est isomorphe à un tel $L^\infty(X, \mu)$.*

Définition 1.1.23. Soit $M \subseteq B(H)$ une algèbre de von Neumann.

Si son *centre* $Z(M) = M \cap M' := \{T \in M; \forall S \in M, ST = TS\}$ est trivial, i.e. réduit à $\mathbb{C} \cdot 1$, on dit que M est un *facteur*.

Remarquons que si M est une algèbre de von Neumann, M est un facteur si et seulement si M' est un facteur.

Remarque 1.1.24. Les facteurs sont les « briques élémentaires » de la théorie des algèbres de von Neumann, comme les groupes simples le sont pour la théorie des groupes finis ou les nombres premiers pour l'arithmétique. On peut décomposer toute algèbre de von Neumann M en « intégrale directe » de facteurs M_λ . L'explication (technique) peut être trouvée dans [Dix96].

De nombreux problèmes sur les algèbres de von Neumann se ramènent donc à des questions sur les facteurs, ce qui explique qu'on s'intéresse particulièrement à eux.

Exemple 1.1.25. Si M est de dimension finie, M est un facteur si et seulement si M est isomorphe à un $M_k(\mathbb{C})$. Une algèbre de von Neumann de dimension finie s'écrit comme somme directe d'algèbres de matrices, cf Proposition 1.1.27, ce qui correspond à la « décomposition en intégrale directe de facteurs » de la remarque précédente.

Remarque 1.1.26. Considéré comme inclus dans $B(L^2(X, \mu))$, $L^\infty(X, \mu)$ vérifie $(L^\infty(X, \mu))' = L^\infty(X, \mu)$ (ceci se démontre comme la Proposition 1.4.10). $L^\infty(X, \mu)$ est ainsi le type d'algèbre de von Neumann le plus éloigné d'un facteur ! (Sa décomposition en intégrale directe n'aurait que des termes triviaux égaux à \mathbb{C})

Si H est de dimension finie, $B(H)$ est une algèbre de matrices, de dimension finie et est une algèbre de von Neumann. On a une réciproque, qui donne la forme des algèbres de von Neumann de dimension finie :

Proposition 1.1.27. *Soit M algèbre de von Neumann de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel). Alors M est isomorphe (en tant qu'algèbre de von Neumann) à une somme directe d'algèbres de matrices*

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Démonstration. Soit M algèbre de von Neumann de dimension finie. Son centre $Z(M)$ est une algèbre de von Neumann commutative, donc isomorphe à un $L^\infty(X, \mu)$ par le Théorème 1.1.22, mais il est de dimension finie, donc nécessairement X est fini et $Z(M) \cong \mathbb{C}^r$.

L'algèbre \mathbb{C}^r a r projecteurs minimaux (pour \leq de la Définition 1.1.10) $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ deux à deux de produit nul et de somme $(1, \dots, 1)$, qui correspondent aux projecteurs p_1, \dots, p_r dans $Z(M)$, vérifiant $p_1 + \dots + p_r = 1$ et $p_i p_j = \delta_i^j$.

Chaque $p_i M p_i$ est un facteur car p_i est minimale (ceci se démontre similairement au 1.3.1 (b)), de type I_k (cf Définition 1.2.6) car de dimension finie, donc isomorphe à un $M_k(\mathbb{C})$ par la Proposition 1.2.7.

Les p_i sont orthogonaux (deux à deux de produit nul) et dans le centre, donc $p_i M p_j = 0$ si $i \neq j$; enfin, les p_i sont de somme 1, donc

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^r p_i M p_i \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

□

Définition 1.1.28. Une inclusion

$$\phi : N \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}) \hookrightarrow M \cong \bigoplus_{j=1}^l M_{m_j}(\mathbb{C})$$

d'algèbres de dimension finie est entièrement déterminée par la matrice $\Lambda = \Lambda_N^M \in M_{k,l}(\mathbb{N})$ de coefficient $\Lambda_{i,j}$ égale au nombre de fois que $M_{n_i}(\mathbb{C})$ s'injecte dans $M_{m_j}(\mathbb{C})$ via ϕ .

On a alors la classe d'isomorphisme de l'inclusion $N \subseteq M$ entièrement déterminée par Λ et les vecteurs (n_1, \dots, n_k) et (m_1, \dots, m_l) .

Le *diagramme de Bratteli* associé est le graphe avec k points sur une première ligne, l sur une deuxième, et avec le i -ème point de la première ligne relié au j -ème point de la deuxième par $\Lambda_{i,j}$ arêtes.

Par extension, le diagramme de Bratteli d'une suite de telles inclusions est le graphe obtenu en recollant successivement les diagrammes intermédiaires.

Exemple 1.1.29. L'inclusion $N = \left\{ \left(x, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, y \right); x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M = \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ admet le diagramme de Bratteli de la Figure 1 et la matrice d'inclusion $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

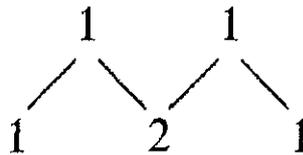


FIGURE 1 – Un exemple de diagramme de Bratteli

1.2 Comparaison de projections et type d'un facteur

Définition 1.2.1. Soit M algèbre de von Neumann. p est une *projection* si $p = p^* = p^2$.

L'ensemble des projections de M est noté $P(M)$.

Remarque 1.2.2. A l'image de l'identité d'un espace compact qui est approchable uniformément par des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques (les « projections » de $L^\infty(X)$), toute algèbre de von Neumann M est l'adhérence normique de $Vect(P(M))$.

Ceci nous montre qu'une algèbre de von Neumann est caractérisée par ses projections, et qu'elle en contient « beaucoup » !

Définition 1.2.3. Deux projections p et q de M sont *équivalentes*, et on note alors $p \sim q$, s'il existe $u \in M$ tel que $p = u^*u$ et $q = uu^*$.

p est *finie* si $q \leq p, p \sim q \implies p = q$.

M est *finie* si 1 est une projection finie dans M .

Remarque 1.2.4. Si $p = u^*u$ et $q = uu^*$, alors $up = u = qu$ et $u^*q = u^* = pu^*$.

(En effet, si $z = u - up = u(1 - p)$, alors $z^*z = (1 - p)u^*u(1 - p) = (1 - p)p(1 - p) = 0$, donc $z = 0$)

Proposition 1.2.5. Si p est finie et $q \leq p$, alors q est finie.

En particulier, toutes les projections d'une algèbre finie sont finies.

Démonstration. Par la Remarque 1.1.11, $0 \leq q \leq p \implies 0 \leq (1 - p)q(1 - p) \leq (1 - p)p(1 - p) = 0 \implies q(1 - p) = (1 - p)q = 0$. Soit $r \leq q \leq p$, $r \sim q$, montrons que $r = q$. Remarquons déjà que $r \leq p$ donc $r(1 - p) = (1 - p)r = 0$. On a donc $pq = qp = q$, $pr = rp = r$ et de même $rq = qr = r$.

On a $\exists u \in M$, $r = u^*u$, $uu^* = q$. Par la Remarque 1.2.4, $(p - q)u = (p - q)qu = 0$. De même, on obtient finalement $(p - q)u = u(p - q) = (p - q)u^* = u^*(p - q) = 0$. Posons $v = u + (p - q)$. On a alors $v^*v = u^*u + (p - q) = r + p - q$ et $vv^* = uu^* + (1 - p) = q + p - q = p$.

$r \leq q \implies r + p - q \leq p$, et via v on a $r + p - q \sim p$, donc comme p est finie, $r + p - q = p$ donc $r = q$. Ceci achève de montrer que q est finie. \square

Définition 1.2.6. Soit M un facteur.

M est un *facteur de type I* si M contient une projection non nulle minimale pour \leq . Il est de *type I_n* s'il est de dimension finie n , de *type I_∞* sinon.

M est un *facteur de type II* si M contient une projection finie non-nulle et si M n'est pas de type I. Il est de *type II_1* s'il est fini, de *type II_∞* sinon.

M est un *facteur de type III* s'il ne contient aucune projection finie exceptée 0.

Proposition 1.2.7. Si M est un facteur de type I alors il est isomorphe à un $B(H)$ avec H espace de Hilbert. Ainsi, si M est de type I_n , on a $M \cong M_n(\mathbb{C})$, et s'il est de type I_∞ on a $M \cong B(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Une preuve technique mais abordable de ce résultat peut être trouvée dans [Jonb].

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons davantage aux facteurs finis, i.e. les I_n et les II_1 . Ainsi, une définition alternative de facteur fini via la trace, donnée par le théorème suivant, nous sera utile.

Définition 1.2.8. Soit M une algèbre de von Neumann. Une *trace sur M* est une forme linéaire $\tau : M \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\tau(xy) = \tau(yx)$ (propriété de trace) et $\tau(1) = 1$ (normalisation).

De plus, on dira qu'une trace τ est :

- (i) *positive* si $\tau(x^*x) \geq 0$;

- (ii) *fidèle* si $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- (iii) *normale* si τ est ultrafaiblement continue.

Remarque 1.2.9. Supposons que τ est une trace positive.

La décomposition d'un auto-adjoint en parties positive et négative (cf Remarque 1.1.9) et la positivité de la trace nous donnent que si $x = x^*$ alors $\tau(x) \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, la décomposition en parties réelle et imaginaire (cf Remarque 1.1.6) nous donne qu'une trace positive τ sur M est automatiquement $*$ -préservante, i.e. $\forall x \in M, \tau(x^*) = \overline{\tau(x)}$

Théorème 1.2.10. *Soit M un facteur. M est fini si et seulement si M possède une trace.*

Cette trace est alors unique, et est de plus positive, normale et fidèle.

En particulier un facteur II_1 possède une unique trace positive, normale et fidèle.

Démonstration. La preuve repose sur un théorème de point fixe et peut être trouvée dans [SZ79]. □

Remarque 1.2.11. Si M est un facteur I_n , son unique trace est la trace usuelle sur $M_n(\mathbb{C})$, normalisée.

La trace va être un outil clé pour comparer les projections. L'ensemble des projections $P(M)$ est déjà muni de l'ordre partiel \leq défini sur tout M . Munissons $P(M)$ d'un nouvel « ordre ».

Les démonstrations des résultats suivants peuvent être trouvées dans [Jonb].

Définition 1.2.12. Soit $M \in B(H)$ algèbre de von Neumann, et $p, q \in P(M)$. On dit que $p \lesssim q$ si $\exists u \in M, uu^* = p, u^*u \leq q$.

Proposition 1.2.13. *Soit $p, q \in P(M)$. Si $p \lesssim q$ et $q \lesssim p$ alors $p \sim q$.*

La démonstration de cette proposition utilise un procédé d'induction analogue à la démonstration du théorème de Cantor-Bernstein.

Théorème 1.2.14 (de comparaison). *Soit M un facteur. Soient $p, q \in P(M)$. Alors on a $p \lesssim q$ ou $q \lesssim p$.*

Corollaire 1.2.15. *Soit M un facteur et $p, q \in P(M)$ finies, avec $pq = 0$ Alors $p + q$ est une projection finie.*

Démonstration. Tout d'abord, $p + q$ est une projection car $pq = 0$ et en revenant à la définition.

Ensuite, quitte à remplacer M par $(p + q)M(p + q)$, ce qui ne change pas la factorialité (cf Proposition 1.3.1), on peut supposer $p + q = 1$.

Par le Théorème 1.2.14, on a $p \lesssim 1 - p$ ou $1 - p \lesssim p$, par exemple $1 - p \lesssim p$. Montrons que 1 est fini.

Posons $N = M_2(pMp)$, qui est encore un facteur (on voit que $M_2(P)$ est un facteur si P est un facteur en calculant quelques produits de matrices). p est finie, donc pMp est fini (par la Proposition 1.3.5), donc pMp a une trace τ par le Théorème 1.2.10. On définit alors $\tilde{\tau}$ sur $M_2(pMp)$ par $\tilde{\tau} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := \tau(a) + \tau(d)$. On vérifie sans difficulté que c'est une trace, donc, de nouveau via 1.2.10, N est fini.

$1 - p \lesssim p$, donc $\exists u \in M, u^*u = 1 - p$ et $uu^* = q_0 \leq p$.

Par le Lemme 1.3.4, via u on a $(1 - p)M(1 - p)$ isomorphe en tant qu' $*$ -algèbre à q_0Mq_0 .

Donc $M = \begin{pmatrix} pMp & pM(1 - p) \\ (1 - p)Mp & (1 - p)M(1 - p) \end{pmatrix}$ isomorphe à $\begin{pmatrix} pMp & pMq_0 \\ q_0Mp & q_0Mq_0 \end{pmatrix} \subseteq N$.

Or N est fini donc par la Proposition 1.2.5 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$ est fini, donc, par isomorphisme, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} = 1_M$ est fini dans M . \square

Théorème 1.2.16. *Soit M facteur fini, τ sa trace, et $p, q \in P(M)$. Alors*

$$p \lesssim q \Leftrightarrow \tau(p) \leq \tau(q).$$

$$p \sim q \Leftrightarrow \tau(p) = \tau(q).$$

Démonstration. Par symétrie et par la proposition 1.2.13, il suffit de montrer la première équivalence, ce que nous allons faire.

Le sens (\Rightarrow) est immédiat :

$$p \lesssim q \implies \exists u \in M, uu^* = p, u^*u \leq q \implies \tau(p) = \tau(uu^*) = \tau(u^*u) \leq \tau(q)$$

(le dernier point vient de la positivité de la trace).

Pour démontrer le sens (\Leftarrow) , prenons p, q tels que $\tau(p) \leq \tau(q)$, et supposons qu'on n'ait pas $p \lesssim q$. Alors nécessairement, par le Théorème 1.2.14 et la proposition 1.2.13, on a $q \lesssim p$ et $p \not\sim q$, donc $q \sim e < p$, donc $\tau(p - e) > 0$ par fidélité et positivité de la trace, donc $\tau(p) > \tau(e) = \tau(q)$, ce qui nous donne une contradiction. \square

Proposition 1.2.17. *Soit M facteur fini, et τ sa trace.*

Si M est de type I_n , alors $\{\tau(p) ; p \in P(M)\} = \{0 ; \dots ; n\}$.

Si M est de type II_1 , alors $\{\tau(p) ; p \in P(M)\} = [0; 1]$.

Un intérêt des facteurs II_1 est cette possibilité de « varier continûment la dimension ».

Ceci n'est pas le cas dans les facteurs de type III , où l'ensemble des classes d'équivalences de projections se réduit à $\{0; 1\}$, par la proposition suivante :

Proposition 1.2.18. *Si M est un facteur, alors deux projections infinies sont équivalentes.*

Une démonstration peut être trouvée dans [Sun87] 1.2.4(b).

1.3 Réduite d'une algèbre de von Neumann

Avant de définir la dimension de von Neumann d'un espace de Hilbert, il faut parler un peu des algèbres réduites.

Proposition 1.3.1. (a) Si $N \subseteq B(H)$ est une algèbre de von Neumann et $p \in P(N)$, alors $pNp = \{p xp; x \in N\} \subseteq B(pH)$ est encore une algèbre de von Neumann, appelée la réduite de N par p .

(b) Si $N \subseteq B(H)$ est un facteur et $p \in P(N)$, alors pNp est encore un facteur.

(c) Si $N \subseteq B(H)$ est un facteur II_1 de trace tr_N , et si $p \in P(N)$ est non nulle, alors pNp est encore un facteur II_1 , de trace $tr_{pNp} = \frac{tr_N}{tr_N(p)}$.

Remarque 1.3.2. On appelle parfois pNp le « coin » de N , car si on écrit $H = pH \oplus (1-p)H$, et si on décompose un élément $x \in N$ en fonction, on peut écrire x comme une matrice

$$\begin{pmatrix} x_{pH,pH} & x_{(1-p)H,pH} \\ x_{pH,(1-p)H} & x_{(1-p)H,(1-p)H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p xp & (1-p)x p \\ p x (1-p) & (1-p)x (1-p) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Montrons la Proposition 1.3.1.

(a) Tout d'abord, si N est une algèbre de von Neumann, alors $pNp = \{p xp; x \in N\} = \{x \in N; (1-p)x = x(1-p) = 0\}$. N est une algèbre de von Neumann donc est faiblement fermée dans $B(H)$ par le Théorème 1.1.17, $x \mapsto (1-p)x$ et $x \mapsto x(1-p)$ sont faiblement continues, donc pNp est faiblement fermée dans $B(H)$, donc est une algèbre de von Neumann.

(b) Si N est un facteur, montrons que pNp est un facteur. Soit $q \in P(pNp)$, $q \neq 0$, $q \neq p$. Montrons que $q \notin Z(pNp)$. Ceci montrera que pNp est un facteur, car s'il ne l'était pas, son centre $Z(pNp)$ serait une algèbre de von Neumann commutative non triviale, donc serait isomorphe à un $L^\infty(X)$ avec X contenant au moins deux éléments, donc $Z(pNp)$ contiendrait une projection non triviale.

$q \in P(pNp)$, donc $0 \leq q \leq p$. D'autre part, $p - q \in P(pNp)$, $0 \leq p - q \leq p$. N est un facteur, donc par le Théorème 1.2.14, on a $p - q \lesssim q$ ou $q \lesssim p - q$; q et $p - q$ étant interchangeable, supposons par exemple $q \lesssim p - q$. Alors $\exists u \in pNp$, $u^*u = q$ et $uu^* \leq p - q$.

$0 \leq u^*u = q \leq p$, donc $0 \leq (1-p)u^*u(1-p) \leq (1-p)p(1-p) = 0$, donc $u(1-p) = 0$. De même $(1-p)u = 0$. Donc $u \in pNp$.

D'autre part, $(qu)(qu)^* = qu u^* q \leq q(p - q)q = 0$ donc $qu = 0$. Mais $uq = u$ par la Remarque 1.2.4. Et $u \neq 0$ car $q \neq 0$. Donc q ne commute pas à $u \in pNp$, donc $q \notin Z(pNp)$.

(c) Finalement, supposons N facteur II_1 de trace tr_N .

Posons pour tout $x \in pNp$, $tr_{pNp}(x) := \frac{tr_N(x)}{tr_N(p)}$. $tr_{pNp} : pNp \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie clairement les points

(i) à (iv) de la Définition 1.2.8, car $1_{pNp} = p$, donc tr_{pNp} est une trace pour le facteur pNp .

N est fini, donc par la Proposition 1.2.5, p est fini, donc, par le (\Rightarrow) de la Proposition 1.3.5 (qui est immédiat), on a pNp facteur fini. Il a donc une unique trace, qui est donc tr_{pNp} définie précédemment. Remarquons que pNp ne peut être un facteur I_n , car $tr_{pNp} = \frac{tr_N}{tr_N(p)}$ atteint tout $[0; 1]$ sur $P(pNp)$ (car N est II_1 et par la Proposition 1.2.17). □

Si $p \in M'$, on appelle Mp l'algèbre induite par p . Le fait que ce soit une algèbre de von Neumann (et davantage) est donné par la Proposition 1.3.1 et la proposition suivante :

Proposition 1.3.3. Soit $M \subseteq B(H)$ algèbre de von Neumann et $p \in P(M)$. Alors pMp et $M'p$ sont commutants l'une de l'autre dans $B(pH)$.

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [Jonb]. Elle nous dit en particulier que $M'p$ est un facteur si $p \in P(M)$.

Lemme 1.3.4. Soit $p, q \in N$, avec $p \sim q$ via u (i.e. $p = u^*u$, $q = uu^*$). Alors $F_u : \begin{pmatrix} pNp \longrightarrow qNq \\ x \longmapsto uxu^* \end{pmatrix}$

est un isomorphisme d'algèbres préservant l'étoile.

De plus, $\forall r \in P(pNp)$, $F_u(r) = uru^* \sim r$.

Démonstration. Montrons que F_{u^*} et F_u sont inverses l'une de l'autre. Si $x = pnp \in pNp$, alors $F_{u^*}(F_u(x)) = (u^*u)x(u^*u) = p(pnp)p = pnp = x$. De même avec qNq . Ainsi, on a F_{u^*} et F_u inverses l'une de l'autre, et F_u bijective.

Le fait que $F(u)$ soit linéaire et préserve l'étoile est immédiat. Montrons qu'elle est multiplicative. Soient $x, y \in pMp$. On a donc $x = xp = px = pxp$, $y = yp = py = pyy$, donc $xy = xpy$. D'autre part $F_u(x)F_u(y) = uxu^*uyu^* = uxpuy^* = uxyu^* = F_u(xy)$.

Le second point vient du fait que si $r = pnp \in pNp$ est une projection, en posant $v = ur$, on a $v^*v = ru^*ur = (pnp)p(pnp) = (pnp)(pnp) = r^2 = r$ et $vv^* = urru^* = uru^*$. \square

Proposition 1.3.5. $p \in P(N)$ est fini $\Leftrightarrow pNp$ est finie.

Démonstration. Le sens (\Rightarrow) est immédiat : si p est fini dans N , alors $1_{pNp} = p$ est fini dans pNp (car $q \sim p$, $q \leq p$ avec $q \in pNp$, donc on a $q \sim p$, $q \leq p$ pour un $q \in N$ ce qui implique $q = p$ car p est fini dans N).

Montrons maintenant le sens (\Leftarrow). Supposons $1_{pNp} = p$ fini dans pNp , montrons que p est fini dans N . Soit $q \in N$ tel que $q \sim p$, $q \leq p$, montrons que $q = p$.

$0 \leq q \leq p \Rightarrow 0 \leq (1-p)q(1-p) \leq (1-p)p(1-p) = 0 \Rightarrow q(1-p) = (1-p)q = 0$. Or $\exists u \in N$, $p = u^*u$, $q = uu^*$. On trouve de même $u(1-p) = (1-p)u = 0$. Donc $q, u \in pNp$.

Donc $q \sim p$, $q \leq p$ dans pNp , dans lequel p est fini, donc $q = p$. Finalement, p est fini dans N . \square

1.4 $L^2(M)$: construction et applications

Avant tout, mentionnons un résultat très utile pour manipuler la topologie ultrafaible (on peut trouver une démonstration dans [Dix96], Chapitre 1, §4, Cor. 1) :

Proposition 1.4.1. *Soient M, N algèbres de von Neumann, et $\pi : M \rightarrow N$ un $*$ -isomorphisme. Alors π est isométrique et est un homéomorphisme ultrafaible.*

Dans cette section nous supposons que M est une algèbre de von Neumann munie d'une trace τ positive, fidèle et normale.

Définition 1.4.2. Une *représentation normale* de $M \subseteq B(K)$ est un $\pi : M \rightarrow B(H)$ morphisme d'algèbres de von Neumann avec H espace de Hilbert.

$\xi \in H$ est un *vecteur cyclique* pour A sous-espace de $B(H)$ si $\overline{A\xi} = H$.

$\xi \in H$ est un *vecteur séparableur* pour A sous-espace de $B(H)$ si $\forall x \in A, x\xi = 0 \Rightarrow x = 0$.

Proposition 1.4.3. (*Représentation GNS pour la trace*) *Il existe un triplet (H, π, Ω) , avec H espace de Hilbert, π une représentation normale de M dans $B(H)$, et $\Omega \in H$ vecteur cyclique pour $\pi(M)$.*

De plus $\forall x \in M, \tau(x) = \langle \pi(x)\Omega, \Omega \rangle$. (On dit alors que Ω est tracial)

Démonstration. Définissons une forme sesquilinéaire sur M par $\langle x, y \rangle_M := \tau(y^*x)$. C'est un produit scalaire, car τ est positive et fidèle. on considère M comme un espace vectoriel et on le complète pour ce produit scalaire. Notons \hat{M} le complété. on a une injection isométrique $i : \begin{pmatrix} M & \hookrightarrow & \hat{M} \\ x & \mapsto & i(x) \end{pmatrix}$. On pose $H := \hat{M}$, c'est bien un espace de Hilbert, et $\Omega := i(1_M)$.

On définit $\pi : M \rightarrow B(\hat{M})$ ainsi : pour $y \in M, \begin{pmatrix} i(M) & \rightarrow & i(M) \\ i(x) & \mapsto & i(yx) \end{pmatrix}$ est un opérateur borné, qui se prolonge en un opérateur borné sur H tout entier, qu'on note $\pi(y)$.

Pour tous $y, y' \in M, \pi(y + y')$ et $\pi(y) + \pi(y')$ coïncident sur $i(M)$, donc, par continuité (pour la topologie de la norme induite par le produit scalaire sur H), sur H tout entier. Ainsi π est additif. De même, on obtient que π est un morphisme d'algèbres unifière, et est compatible avec l'étoile.

On a clairement $\forall x \in M, \langle \pi(x)\Omega, \Omega \rangle = \langle i(x), i(1) \rangle = \langle x, 1 \rangle_M = \tau(x)$ car $\Omega = i(1)$ et par définition du produit scalaire.

Enfin, montrons que $\pi : M \rightarrow B(H)$ est ultrafaiblement continu sur son image. π est injectif, car $\pi(y) = 0 \Rightarrow i(yy^*) = \pi(y)i(y^*) = 0 \Rightarrow yy^* = 0 \Rightarrow y = 0$. Donc π est un $*$ -isomorphisme d'algèbres de M sur son image, donc par 1.4.1, il est isométrique et un homéomorphisme ultrafaible sur son image (qui est une algèbre de von Neumann dans $B(H)$). \square

Remarque 1.4.4. On note $L^2(M, \tau)$ l'espace de Hilbert H précédent.

La représentation est injective (ou fidèle) car comme on vient de le voir dans la démonstration précédente, $\pi(x) = 0 \Rightarrow 0 = \|\pi(x)\Omega\|^2 = \tau(x^*x) \Rightarrow x = 0$. Ainsi nous identifierons x avec $\pi(x)$ et nous écrirons $M \subseteq B(L^2(M, \tau))$ (un élément de M s'identifie à son action par multiplication à gauche sur $L^2(M, \tau)$).

On écrit donc $\forall x \in M, \tau(x) = \langle x\Omega, \Omega \rangle$.

Lemme 1.4.5. Soit A partie de $B(H)$ telle que $A^* = A$, avec H espace de Hilbert quelconque, et K un sous-espace vectoriel fermé de H , avec p la projection orthogonale de H sur K . On a alors :

$$K \text{ est stable par } A \iff p \in A'.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} K \text{ stable par } A &\iff \forall x \in A, pxp = xp \\ &\iff \forall x \in A, pxp = xp \text{ et } px^*p = x^*p \\ &\iff \forall x \in A, px = pxp = xp \\ &\iff \forall x \in A, px = xp \\ &\iff p \in A'. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.4.6. $\Omega \in L^2(M, \tau)$ est cyclique et séparable pour M et pour M' .

Démonstration. Le fait que Ω soit cyclique pour M a été montré dans la proposition précédente.

Montrons que Ω est séparable pour M . Soit $x \in M$ tel que $x\Omega = 0$. Alors $\tau(x^*x) = \langle x^*x\Omega, \Omega \rangle = \|x\Omega\|^2 = 0$, donc $x^*x = 0$ par fidélité de la trace, et donc $x = 0$.

Montrons que Ω est séparable pour M' . Soit $y \in M'$ tel que $y\Omega = 0$. Alors $\forall x \in M$, $y(x\Omega) = x(y\Omega) = x0 = 0$, donc y est nul en tant qu'opérateur sur $M\Omega$. Or Ω est cyclique pour M et y est un opérateur continu, donc y est nul sur tout $L^2(M, \tau)$.

Enfin, montrons que Ω est cyclique pour M' . Soit p la projection orthogonale sur $\overline{M'\Omega}$. Par le lemme 1.4.5, on a $p \in M'' = M$. Or $p\Omega = \Omega = 1\Omega$, et Ω est séparable pour M , donc $p = 1$ et donc Ω est cyclique pour M' . □

Remarque 1.4.7. Dans cette preuve on a montré le fait plus général : ξ est cyclique pour M si et seulement si ξ est séparable pour M' .

Proposition 1.4.8. $F: \begin{pmatrix} M\Omega & \longrightarrow & M\Omega \\ x\Omega & \longmapsto & x^*\Omega \end{pmatrix}$ se prolonge en une involution anti-linéaire isométrique de $L^2(M, \tau)$ qu'on notera J .

Démonstration. F est bien définie car Ω est séparable pour M , par la Proposition 1.4.6.

F est clairement anti-linéaire, et elle est isométrique car $\|F(x\Omega)\|^2 = \langle x^*\Omega, x^*\Omega \rangle = \tau(xx^*) = \tau(x^*x) = \|x\Omega\|^2$. F est isométrique, donc est continue sur $M\Omega$. On peut donc la prolonger par continuité sur le complété de $M\Omega$, qui est $L^2(M, \tau)$, ce qui donne J , une application anti-linéaire de $L^2(M, \tau)$ dans lui-même, de norme 1. $0 = F^2 - Id_{M\Omega}$ se prolonge en $J^2 - Id_{L^2(M, \tau)}$ par unicité du prolongement par continuité, donc $J^2 = 1$. J est donc bien une involution.

Enfin, J est involutive donc bijective, et de norme 1, donc isométrique. □

Remarque 1.4.9. J est une application anti-linéaire, ce n'est donc pas un opérateur au sens habituel. Il a cependant un adjoint, mais dont la propriété fondamentale est $\langle J\xi, \eta \rangle = \langle \xi, J^*\eta \rangle = \langle J^*\eta, \xi \rangle$, légèrement différente de la définition de l'adjoint pour les applications linéaires.

Ainsi, pour un opérateur anti-linéaire T , être « auto-adjoint » signifie que $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle T\eta, \xi \rangle$. (*)

Or $\forall x, y \in M$,

$$\begin{aligned}
\langle J(x\Omega), y\Omega \rangle &= \langle x^*\Omega, y\Omega \rangle \\
&= \langle y^*x^*\Omega, \Omega \rangle \\
&= \tau(y^*x^*) \\
&= \overline{\tau(xy)} \\
&= \overline{\tau(yx)} \\
&= \overline{\langle yx\Omega, \Omega \rangle} \\
&= \langle \Omega, yx\Omega \rangle \\
&= \langle y^*\Omega, x\Omega \rangle \\
&= \langle J(y\Omega), x\Omega \rangle
\end{aligned}$$

J vérifie donc $(*)$ sur $M\Omega \times M\Omega$, donc, par continuité, sur son adhérence $L^2(M, \tau) \times L^2(M, \tau)$. On a donc J « auto-adjoint », i.e. $J = J^* = J^{-1}$.

Proposition 1.4.10. $JMJ = M'$ (le commutant étant pris dans $B(L^2(M, \tau))$).

Démonstration. Par définition de J , on a $\forall x, y \in M$, $(Jx^*J)(y\Omega) = yx\Omega$. Jx^*J agit donc comme la « multiplication à droite » par x . Les multiplications à gauche commutent clairement avec les multiplications à droite, et comme $M = M^*$, on a par conséquent $JMJ \subseteq M'$.

Réciproquement, soient $x \in M$, $x' \in M'$. On a

$$\begin{aligned}
\langle J(x'\Omega), x\Omega \rangle &= \langle Jx\Omega, x'\Omega \rangle \text{ par } (*) \\
&= \langle x^*\Omega, x'\Omega \rangle \\
&= \langle \Omega, xx'\Omega \rangle \\
&= \langle \Omega, x'x\Omega \rangle \text{ car } x' \in M' \\
&= \langle x'^*\Omega, x\Omega \rangle.
\end{aligned}$$

$x \in M$ était pris quelconque, et $M\Omega$ est dense dans $L^2(M, \tau)$, donc $\forall x' \in M'$, $Jx'\Omega = x'^*\Omega$.

Ainsi, par le même raisonnement qu'au début de la preuve, on a $JM'J \subseteq M'' = M$, donc par composition à gauche et à droite par J : $M' \subseteq JMJ$, ce qui montre la seconde inclusion. \square

Remarque 1.4.11. Au cours de la preuve nous avons donc montré que J agit comme $x\Omega \mapsto x^*\Omega$ non seulement pour $x \in M$ mais aussi pour $x \in M'$!

Mais ceci peut aussi se voir par le fait qu'on a en fait $M\Omega = M'\Omega$ (car $M' = JMJ$).

1.5 Dimension de von Neumann d'un espace de Hilbert

Définition 1.5.1. Si N est une algèbre de von Neumann, un N -module est un espace de Hilbert H muni d'une représentation $\pi_H : N \rightarrow B(H)$, i.e. un homomorphisme normal unifié.

Deux N -modules H et K sont *isomorphes* s'il existe $T : H \rightarrow K$ M -linéaire (i.e. T est linéaire borné et $\forall x \in M, \xi \in H, T(x\xi) = x(T(\xi))$) unitaire (donc bijective) d'inverse M -linéaire.

On va décrire un moyen naturel d'associer un nombre réel positif à un M -module H . Ce nombre jouera le rôle d'une dimension, et mesurera la « taille » de H par rapport à $L^2(M, \tau)$.

Soit M facteur II_1 de trace notée τ ou tr_M . $M' = JMJ$ (cf 1.4.10) donc M' (considéré dans $L^2(M, \tau)$), qui est un facteur, a une unique trace τ' donnée par $\tau'(JxJ) = \overline{\tau(x)}$, donc c'est aussi un facteur II_1 .

Soit H un M -module non nul, avec $\pi = \pi_H : M \rightarrow B(H)$. Posons $\tilde{\pi} : M \rightarrow B(H \oplus L^2(M, \tau))$ défini par $\tilde{\pi}(x) = \begin{pmatrix} \pi(x) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Remarquons que $\tilde{\pi}$ est injectif. M est un facteur (une propriété algébrique), $\tilde{\pi}$ est un morphisme d'algèbres injectif, donc $\tilde{\pi}(M)$ est un facteur. Et donc $\tilde{\pi}(M)'$ (le commutant étant pris dans $B(H \oplus L^2(M, \tau))$) est aussi un facteur.

Soit p la projection orthogonale de $H \oplus L^2(M, \tau)$ sur $L^2(M, \tau)$, i.e. $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le commutant de $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est l'ensemble des matrices diagonales, donc en particulier $p \in \tilde{\pi}(M)'$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\tilde{\pi}(x) = \begin{pmatrix} \pi(x) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ commutent seulement si $dx = xd$, donc $p(\tilde{\pi}(M)')p = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x' \end{pmatrix}; x' \in M' \right\}$.

Donc $p(\tilde{\pi}(M)')p$ est isomorphe à M' qui est un facteur II_1 donc fini, donc par la Proposition 1.3.5, p est un projecteur fini de $\tilde{\pi}(M)'$.

$\tilde{\pi}(M)'$ possède une projection finie non nulle, à savoir p . $\tilde{\pi}(M)'$ est donc un facteur de type II . Il peut être II_1 ou II_∞ .

Si $1 - p$ est infinie dans $\tilde{\pi}(M)'$, posons $\dim_M(H) := +\infty$.

Si $1 - p$ est finie, alors $1 = (1 - p) + p$ est finie par le Corollaire 1.2.15.

$1 = (1 - p) + p$ est finie donc $\tilde{\pi}(M)'$ est fini et a une trace $tr_{\tilde{\pi}(M)'}$. On pose $\dim_M(H) := t = \frac{tr_{\tilde{\pi}(M)'}(1 - p)}{tr_{\tilde{\pi}(M)'}(p)}$.

Théorème 1.5.2 (Dimension de von Neumann). *Soit M un facteur II_1 . L'application $\dim_M : \{M\text{-modules}\} \rightarrow [0; +\infty]$ précédemment définie vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) Si H et K sont deux M -modules alors $\dim_M(H \oplus K) = \dim_M(H) + \dim_M(K)$.
- (ii) $\dim_M(L^2(M, \tau)) = 1$.
- (iii) Pour tout $d \in [0; +\infty]$ il existe H_d un M -module tel que $\dim_M(H_d) = d$.
- (iv) Deux M -modules sont isomorphes si et seulement si ils ont même M -dimension.
- (v) $\dim_M(H)$ est fini $\Leftrightarrow \pi_H(M)'$ est un facteur II_1 .
- (vi) Si $\dim_M(H)$ est fini, alors (par (v)) $\pi_H(M)'$ est un facteur II_1 et si $p' \in P(\pi_H(M)'),$ alors

$$\dim_M(p'H) = tr_{\pi_H(M)'}(p').\dim_M(H).$$

- (vii) Si $p \in P(M)$ alors

$$\dim_{pMp}(pH) = \frac{\dim_M(H)}{tr_M(p)}.$$

- (viii) Si $\dim_M(H)$ est fini, alors (par (v)) $\pi_H(M)'$ est un facteur II_1 , et

$$\dim_{\pi_H(M)'}(H) = \frac{1}{\dim_M(H)}.$$

Démonstration. Rigoureusement, les propriétés seront montrés dans l'ordre (i),(ii),(v),(vi),(iii),(iv),(vii),(viii).

(i) Soient H et K deux M -modules, avec $\pi_H : M \rightarrow B(H)$, $\pi_K : M \rightarrow B(K)$, et le $\tilde{\pi} : M \rightarrow$

$B(H \oplus K \oplus L^2(M, \tau))$ associé, valant $\tilde{\pi}(x) = \begin{pmatrix} \pi_H(x) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_K(x) & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

Notons $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, toutes trois dans $\tilde{\pi}(M)'$.

Notons $\tilde{\pi}_H(x) = \begin{pmatrix} \pi_H(x) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. On a un isomorphisme canonique entre $\tilde{\pi}_H(M)'$ et $(p_1 + p_3)\tilde{\pi}(M)'(p_1 + p_3)$,

car $\forall x \in M$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_H(x) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi_H(x) & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\pi_H(x) - \pi_H(x)a & bx - \pi_H(x)b \\ c\pi_H(x) - xc & dx - xd \end{pmatrix} =$$

$$(p_1 + p_3) \left(\begin{pmatrix} a & * & b \\ * & * & * \\ c & * & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_H(x) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_K(x) & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi_H(x) & 0 & 0 \\ 0 & \pi_K(x) & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & * & b \\ * & * & * \\ c & * & d \end{pmatrix} \right) (p_1 + p_3)$$

et car $(p_1 + p_3) \begin{pmatrix} a & * & b \\ * & * & * \\ c & * & d \end{pmatrix} (p_1 + p_3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc, par le 1.3.1 (c), } \dim_M(H) = \frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}_H(M)'} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}_H(M)'} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{\text{tr}_{(p_1+p_3)\tilde{\pi}(M)'(p_1+p_3)} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\text{tr}_{(p_1+p_3)\tilde{\pi}(M)'(p_1+p_3)} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} =$$

$$\frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_1)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_3)}.$$

De même $\dim_M(K) = \frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_2)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_3)}$. Or par définition $\dim_M(H \oplus K) = \frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_1 + p_2)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_3)}$, d'où

le résultat.

(ii) Ici $H = L^2(M)$, $\tilde{\pi}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. On a un isomorphisme canonique évident entre les deux $L^2(M)$, qui transforme p en $1-p$. On a donc $\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p) = \text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(1-p)$, donc $\dim_M(L^2(M)) = 1$.

(iii) Par les (i) et (ii), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim_M((L^2(M))^n) = n$. Donc par le (i) l'espace de Hilbert somme directe infinie de $L^2(M)$ est forcément de dimension supérieure à tout entier, donc de dimension infinie. Ceci règle le cas $d = \infty$

Si $d \in [0; +\infty[$, $d = n + t$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 1[$. Soit $p \in P(\pi_{L^2(M)}(M)')$ de trace t (elle existe par la Proposition 1.2.17). On pose alors $H_d = L^2(M, \tau)^n \oplus pL^2(M, \tau)$ qui est de dimension $n + t = d$ par le (i) et le (vi).

(iv) Soient H et K deux M -modules. On reprend les notations de la démonstration du (i) ci-dessus.

Montrons que $\dim_M(H) = \dim_M(K) \Leftrightarrow p_1 \sim p_2$ dans $\tilde{\pi}(M)'$.

Si $\dim_M(H) = \dim_M(K)$ est infini, c'est immédiat par la Proposition 1.2.18.

Si $\dim_M(H) = \dim_M(K)$ est fini, alors $\dim_M(H) = \dim_M(K) \Leftrightarrow \text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_1) = \text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'}(p_2) \Leftrightarrow p_1 \sim p_2$ dans $\tilde{\pi}(M)'$.

Maintenant, montrons que : $p_1 \sim p_2$ dans $\tilde{\pi}(M)' \Leftrightarrow H$ et K isomorphes en tant que M -modules.

Tout d'abord, si $p_1 \sim p_2$ alors $\exists u \in \tilde{\pi}(M)'$, $u^*u = p_1$, $uu^* = p_2$. On retrouve rapidement les relations $p_2u = u = up_1$, $p_1u = up_2 = 0$, $up_3 = p_3u = 0$. On en déduit que u est nulle sur K et $L^2(M, \tau)$ et est à valeurs dans K , donc se restreint à une application linéaire bornée $u : H \rightarrow K$. De même, $u^* : K \rightarrow H$.

$u \in \tilde{\pi}(M)'$, donc $\forall x \in M, \forall \xi \in H$, $u\pi_H(x)\xi = u\tilde{\pi}(x)(\xi, 0, 0) = \tilde{\pi}(x)u(\xi, 0, 0) = \pi_K(x)u(\xi)$, donc u est M -linéaire. De même u^* est M -linéaire. Enfin $u^*u = id_H$, $uu^* = id_K$, donc u est unitaire. On a donc exhibé un isomorphisme de M -modules entre H et K .

Réciproquement, si H et K sont isomorphes en tant que M -modules, alors soit $\phi : H \rightarrow K$ un tel isomorphisme unitaire, et $\psi : K \rightarrow H$ sa réciproque.

ϕ est linéaire borné, donc $\Phi : \begin{pmatrix} H \oplus K \oplus L^2(M, \tau) & \longrightarrow & H \oplus K \oplus L^2(M, \tau) \\ & \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ est un opérateur borné de $H \oplus K \oplus L^2(M, \tau)$.

On définit de même $\Psi : \begin{pmatrix} H \oplus K \oplus L^2(M, \tau) & \longrightarrow & H \oplus K \oplus L^2(M, \tau) \\ & \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \psi(\eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ opérateur borné de $H \oplus K \oplus L^2(M, \tau)$. On remarque que comme ϕ et ψ sont adjoints et inverses l'un de l'autre, Φ et Ψ le sont aussi.

Enfin, comme ϕ est M -linéaire, on a $\forall (\xi, \eta, \zeta) \in H \oplus K \oplus L^2(M, \tau), \forall x \in M$,

$$\Phi \tilde{\pi}(x) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \pi_H(x)\xi \\ \pi_K(x)\eta \\ x\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\pi_H(x)\xi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_K(x)\phi(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\pi}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\pi}(x)\Phi \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi \in \tilde{\pi}(M)'$.

Ainsi $p_1 = \Phi^*\Phi$ et $p_2 = \Phi\Phi^*$, et finalement $p_1 \sim p_2$.

(v) Tout comme $p(\tilde{\pi}(M)')p$ est isomorphe à M' , on a $(1-p)(\tilde{\pi}(M)')(1-p)$ isomorphe à $\pi_H(M)'$.

$\dim_M(H)$ est fini $\Leftrightarrow (1-p)$ est une projection finie de $\tilde{\pi}(M)' \Leftrightarrow (1-p)(\tilde{\pi}(M)')(1-p)$ est finie (cf Proposition 1.3.5) $\Leftrightarrow \pi_H(M)'$ est un facteur fini $\Leftrightarrow \pi_H(M)'$ est un facteur II_1 (par la Proposition 1.3.1 (c)).

(vi) Supposons $\dim_M(H)$ est fini, donc $\pi_H(M)'$ est un facteur II_1 , et soit $p' \in P(\pi_H(M)')$. Montrons que $\dim_M(p'H) = \text{tr}_{\pi_H(M)'}(p').\dim_M(H)$.

$\forall y \in \pi_H(M)', \text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) . \text{tr}_{\pi_H(M)'}(y)$ par unicité de la trace sur $\tilde{\pi}(M)'$.

Or $\begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ projette sur $p'H$, donc

$$\dim_M(p'H) = \frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} p' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \frac{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}{\text{tr}_{\tilde{\pi}(M)'} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} \cdot \text{tr}_{\pi_H(M)'}(y) = \text{tr}_{\pi_H(M)'}(p') \cdot \dim_M(H).$$

(vii) On va montrer que $\forall p \in P(M)$, $\dim_{pMp}(pH) = \frac{\dim_M(H)}{\text{tr}_M(p)}$.

Tout d'abord, remarquons que si $p \in P(M)$ alors $pMp \subseteq M$ et que $L^2(pMp)$ s'identifie à $pMp\Omega = pJpJM\Omega = pJpJM\Omega = pJpJL^2(M)$.

Ensuite, montrons que si $p \in P(M)$ et H est un M -module avec $\pi_H : M \rightarrow B(H)$ alors on a pH qui est un pMp -module, avec $\pi_{pH} : pMp \rightarrow B(pH)$ égale à la restriction de π_H sur pMp , et enfin que $\phi : \begin{pmatrix} \pi_H(M)' & \longrightarrow & \pi_{pH}(pMp)' \\ x & \longmapsto & x|_{pH} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'*-algèbres.

Il nous faut juste prouver que ϕ est bijectif, le reste étant immédiat. Distinguons deux cas :

Si $\text{tr}_M(p) = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors notons p_1, \dots, p_n des projections de M de somme 1, deux à deux orthogonales (i.e. de produits nuls), toutes équivalentes (de même trace $\frac{1}{n}$) et avec $p_1 = p$.

On construit une réciproque ψ à ϕ . Soit $y \in \pi_{pH}(pMp)'$. On a $M = (p_jMp_i)_{1 \leq i, j \leq n}$. Si $x \in M$, alors $\pi_H(x) = (x_{i,j})_{i,j}$ avec $x_{i,j} \in B(p_iH, p_jH)$. Ainsi, si on pose $y_1 = y \in B(p_1H)$, $y_i \in B(p_iH)$ l'image de y via l'isomorphisme d'identification entre p_1H et p_iH . On pose $\psi(y) =$

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & y_n \end{pmatrix} \in B(H) = B(p_1H \oplus \dots \oplus p_nH).$$

On a $\psi(y) \in \pi_H(M)'$ car si $x \in M$, alors $\pi_H(x)\psi(y) - \psi(y)\pi_H(x) = (y_jx_{i,j} - x_{i,j}y_i)_{i,j} = (0)_{i,j}$ car $y \in \pi_{pH}(pMp)'$ et que les commutations sont préservées par les isomorphismes d'identification. On a donc $\psi : \pi_{pH}(pMp)' \rightarrow \pi_H(M)'$. Montrons que c'est bien une réciproque à ϕ .

Tout d'abord, on a clairement $\forall y \in \pi_{pH}(pMp)'$, $\phi(\psi(y)) = y_1 = y$. D'autre part, si $x \in \pi_H(M)'$, x commute à chaque $\pi_H(p_i)$ donc laisse p_iH invariant. Dans l'écriture matricielle cor-

respondant à $H = p_1H \oplus \dots \oplus p_nH$, on a donc $x = \begin{pmatrix} x|_{p_1H} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x|_{p_nH} \end{pmatrix}$. Donc $\psi(\phi(x)) = x$.

ψ est donc bien une réciproque à ϕ .

Si $\text{tr}_M(p)$ n'est pas l'inverse d'un entier, on a tout de même $\exists n \in \mathbb{N}, \exists q \in P(M)$, $q \leq p$, $\text{tr}_M(p) \geq \frac{1}{n} = \text{tr}_M(q)$ par la Proposition 1.2.17.

On pose alors $\tilde{\phi} : \begin{pmatrix} \pi_{pH}(pMp)' & \longrightarrow & \pi_{qH}(qMq)' \\ x & \longmapsto & x|_{qH} \end{pmatrix}$ car $qMq \subseteq pMp$. On a alors $\tilde{\phi} \circ \phi$ qui vérifie les conditions du cas précédents, car $\text{tr}_M(q) = 1/n$. Donc $\tilde{\phi} \circ \phi$ est bijective, donc $\tilde{\phi}$ est surjective et ϕ est injective. Mais ϕ est une application de restriction, donc par le même raisonnement elle est injective comme ϕ . Finalement ϕ et $\tilde{\phi}$ sont bijectives.

Revenons à montrer que $\forall p \in P(M)$, $\dim_{pMp}(pH) = \frac{\dim_M(H)}{\text{tr}_M(p)}$. Soit $p \in P(M)$. On considère $K = H \oplus L^2(M)$, qui est un M -module, alors $pK = pH \oplus pL^2(M) = pH \oplus (JpJpL^2(M) \oplus (1 - JpJ)pL^2(M))$. Soient q_1, q_2, q_3 les trois projections associées, toutes dans $\pi_{pK}(pMp)'$, et r_1, r_2 celles dans $\pi_K(M)'$ associées à $K = H \oplus L^2(M)$.

On a $\dim_M(H) = \frac{\text{tr}_{\pi_K(M)'}(r_1)}{\text{tr}_{\pi_K(M)'}(r_2)} = \frac{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_1)}{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2 + q_3)}$ par l'isomorphisme précédent.

On a $1 = \dim_{pMp}(L^2(pMp)) = \dim_{pMp}((JpJ)pL^2(M)) = \text{tr}_{\pi_{pL^2(M)}(pMp)'}(JpJ) \cdot \dim_{pMp}(pL^2(M))$

par le (vi), donc $1 = \text{tr}_{\pi_{L^2(M)}(M)'}(JpJ) \frac{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2) + \text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_3)}{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2)}$.

$$\text{Enfin } \dim_{pMp}(pH) = \frac{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_1)}{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2)} = \frac{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_1)}{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2) + \text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_3)} \frac{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2) + \text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_3)}{\text{tr}_{\pi_{pK}(pMp)'}(q_2)}$$

$$\dim_M(H) \frac{1}{\text{tr}_{\pi_{L^2(M)}(M)'}(JpJ)}.$$

Finalement, pour tout M -module H , on a $\dim_{pMp}(pH) = \frac{\dim_M(H)}{\text{tr}_M(p)}$.

(viii) Soit H tel que $\dim_M(H)$ est fini, montrons que $\dim_{\pi_H(M)'}(H) \cdot \dim_M(H) = 1$.

Tout d'abord, si $H = L^2(M)$, comme $L^2(\pi_{L^2(M)}(M)') \cong L^2(M)$, on a $\dim_{\pi_H(M)'}(H) \cdot \dim_M(H) = 1.1 = 1$.

Ensuite, si $H = L^2(M)^n$ (somme directe à n facteurs), on a $\dim_M(H) = n$. Remarquons que comme l'action de M sur $L^2(M)^n$ est représentée par des matrices diagonales, on a $\pi_{L^2(M)^n}(M)' = M_n(\pi_{L^2(M)}(M)')$, et donc en notant p_1 la projection orthogonale de $L^2(M)^n$ sur $L^2(M)$, qui est dans $M_n(\pi_{L^2(M)}(M)')$, $1 = \dim_{\pi_{L^2(M)}(M)'}(L^2(M)) = \dim_{p_1 M_n(\pi_{L^2(M)}(M)')} p_1(L^2(M)^n) =$

$$\frac{\dim_{M_n(\pi_{L^2(M)}(M)')} (L^2(M)^n)}{\text{tr}(p_1)} \text{ par le (vii). Donc } \dim_{\pi_{L^2(M)^n}(M)'}(L^2(M)^n) = \dim_{M_n(\pi_{L^2(M)}(M)')} (L^2(M)^n) =$$

$$\text{tr}(p_1) = \frac{1}{n}. \text{ Finalement } \dim_{\pi_H(M)'}(H) \cdot \dim_M(H) = 1.$$

Enfin, si H est quelconque, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim_M(H) \leq n$. Soit $p' \in M'$ de trace $\frac{\dim_M(H)}{n}$,

et $q' = \begin{pmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{pmatrix} \in \pi_{L^2(M)^n}(M)'$ de même trace. Alors H et $q'(L^2(M)^n)$ sont de même

dimension, donc isomorphes en tant que M -modules par le (iv). Donc $\dim_{\pi_H(M)'}(H) \cdot \dim_M(H) = \dim_{\pi_{q'(L^2(M)^n)}(M)'}(q'(L^2(M)^n)) \cdot \dim_M(q'(L^2(M)^n)) = \dim_{q' \pi_{L^2(M)^n}(M)'}(q'(L^2(M)^n)) \cdot \dim_M(q'(L^2(M)^n)) = \dim_{\pi_{L^2(M)^n}(M)'}(L^2(M)^n) \cdot \dim_M(L^2(M)^n) = 1$ par (vi) et (vii) et le point précédent. \square

1.6 Indice d'une inclusion de facteurs

Définition 1.6.1. Soit $M \subseteq B(H)$ un facteur. Un *sous-facteur* de M est une sous-algèbre de von Neumann $N \subseteq M$ telle que $N \subseteq B(H)$ est aussi un facteur et $1_M \in N$.

Le sous-facteur N est *irréductible* si $N' \cap M = \mathbb{C}.1$.

Définition 1.6.2. Soit M un facteur II_1 et N un sous-facteur de M (donc aussi un facteur II_1). L'*indice* de N dans M est défini comme

$$[M : N] := \dim_N(L^2(M)).$$

Proposition 1.6.3. L'indice vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Si $N \subseteq M$ et H est un M -module de M -dimension finie, alors

$$\dim_N(H) < \infty \Leftrightarrow [M : N] < \infty$$

et on a la relation (même si $\dim_M(H) = \infty$)

$$\dim_N(H) = [M : N] \dim_M(H).$$

- (ii) Si $N \subseteq M \subseteq P$ est une inclusion de facteurs II_1 , alors $[P : N] = [P : M][M : N]$
- (iii) Si $N \subseteq M \subseteq B(H)$ et N' est II_1 alors $[N' : M'] = [M : N]$
- (iv) Si $N \subseteq M \subseteq B(H)$, si $[M : N]$ est fini, et si $p \in P(N' \cap M)$ alors $[pMp : Np] = [M : N] \operatorname{tr}_M(p) \operatorname{tr}_{N'}(p)$

Démonstration. (i) Soient H, K des M -modules de M -dimension finie.

Montrons que $\dim_N(H) < \infty \Leftrightarrow \dim_N(K) < \infty$. On a $\exists n \in \mathbb{N}, \dim_M(H) \leq n \dim_M(K)$, donc $\dim_M(H) = \dim_M(q'(K^n))$ où $q' \in P(\pi_{K^n}(M)')$ de trace appropriée. Donc par le 1.5.2 (iv) on a $H \cong q'(K^n)$ en tant que M -modules, donc $H \cong q'(K^n)$ en tant que N -modules! Donc $\dim_N(H) = \dim_N(q'(K^n)) \leq \dim_N(q'(K^n)) + \dim_N((1-q')(K^n)) = \dim_N(K^n) = n \dim_N(K)$.

Donc pour tous H, K , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim_N(H) \leq n \dim_N(K)$.

Donc $\dim_N(H) < \infty \Leftrightarrow \dim_N(K) < \infty$. D'où le premier résultat, en prenant $K = L^2(M)$.

Montrons maintenant la relation $\dim_N(H) = [M : N] \dim_M(H)$. Elle est vraie pour $H = L^2(M)$ par le 1.5.2(ii) et la définition de l'indice. Elle est vraie pour $H = (L^2(M))^n$ par additivité de \dim_N et \dim_M . Elle est vraie si $\dim_N(H) = \infty$ par le premier point.

Enfin, si H est de dimension $\dim_M(H) = d < \infty$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $d \leq n$, et $p' \in P(\pi_{L^2(M)^n}(M)') \subseteq P(\pi_{L^2(M)^n}(N)')$ tel que $\operatorname{tr}_{\pi_{L^2(M)^n}(M)'}(p') = \frac{d}{n}$. Alors on a aussi $\operatorname{tr}_{\pi_{L^2(M)^n}(N)'} = \frac{d}{n}$ car la restriction de $\operatorname{tr}_{\pi_{L^2(M)^n}(N)'}$ à $\pi_{L^2(M)^n}(M)'$ est égale à $\operatorname{tr}_{\pi_{L^2(M)^n}(M)'}$, par unicité de la trace sur un facteur II_1 , car elles ont la même valeur 1 sur $1_{B(L^2(M)^n)}$.

Ainsi, $H \cong p'(L^2(M)^n)$ en tant que M -modules et donc aussi en tant que N -modules, et $\dim_M(H) = \dim_M(p'(L^2(M)^n)) = \operatorname{tr}_{\pi_{L^2(M)^n}(M)'}(p') \cdot \dim_M(L^2(M)^n)$ par le 1.5.2 (vi)

$$\dim_N(H) = \dim_N(p'(L^2(M)^n)) = \operatorname{tr}_{\pi_{L^2(M)^n}(N)'}(p') \cdot \dim_N(L^2(M)^n)$$

On a donc la relation pour tout H .

(ii) Montrons que $[P : N] = [P : M][M : N]$.

Si $[M : N] < \infty$, alors c'est garanti par les deux points du (i).

Si $[M : N] = \infty$, i.e. $\dim_N(L^2(M)) = \infty$, alors soit e la projection orthogonale de $L^2(P)$ sur $L^2(M)$. Par additivité, on a $\dim_N(L^2(P)) = \dim_N(L^2(M)) + \dim_N((1-e)L^2(P)) = \infty$, donc on a encore l'égalité.

(iii)

$$\begin{aligned}[N' : M'] &= \frac{\dim_{M'}(H)}{\dim_{N'}(H)} \text{ par le (i)} \\ &= \frac{\dim_M(H)^{-1}}{\dim_N(H)^{-1}} \text{ par 1.5.2(viii)} \\ &= \frac{\dim_N(H)}{\dim_M(H)} \\ &= [M : N] \text{ par le (i)}\end{aligned}$$

(iv) L'action de M sur H induit celle de pMp sur pH , et $\dim_{pMp}(pH) = \frac{\dim_M(H)}{\text{tr}_M(p)} < \infty$ par le Théorème 1.5.2 (vii).

D'autre part, elle induit l'action de N sur H , qui induit l'action du facteur pN sur pH , identique à l'action de N sur pH , car $p \in N'$. On a $\dim_{Np}(pH) = \dim_N(pH) = \text{tr}_{N'}(p) \cdot \dim_N(H)$ par le Théorème 1.5.2(vi).

Finalement, par le (i), on a $[pMp : Np] = \frac{\dim_{Np}(pH)}{\dim_{pMp}(pH)} = \text{tr}_M(p) \cdot \text{tr}_{N'}(p) \cdot \frac{\dim_N(H)}{\dim_M(H)} = \text{tr}_M(p) \cdot \text{tr}_{N'}(p) \cdot [M : N]$.

□

Corollaire 1.6.4. *Soit M facteur II_1 et $p \in P(M)$ tel que $pMp \simeq (1-p)M(1-p)$, et soit $\theta : pMp \rightarrow (1-p)M(1-p)$ un isomorphisme d'algèbres de von Neumann associé.*

Alors $N = \{x + \theta(x); x \in pMp\}$ est un sous-facteur II_1 de M , et

$$[M : N] = \frac{1}{\text{tr}_M(p)} + \frac{1}{\text{tr}_M(1-p)}.$$

Démonstration. Tout d'abord, si $x, y \in pMp$, $(x + \theta(x))(y + \theta(y)) = (y + \theta(y))(x + \theta(x)) \Leftrightarrow xy = yx + \theta(x)\theta(y) = \theta(x)\theta(y) \Leftrightarrow xy = yx$, donc N est un facteur car pMp l'est. N est un sous-facteur de M , M est de type II_1 , donc N est de type II_1 .

Par définition de N , on a $p \in N'$, donc $p \in N' \cap M$. On a aussi $pMp = Np$, donc $[pMp : Np] = 1$.

Donc par la Proposition 1.6.3 (iv), on a $1 = \text{tr}_{N'}(p) \cdot \text{tr}_M(p) \cdot [M : N]$, donc $\frac{1}{\text{tr}_M(p)} = \text{tr}_{N'}(p) \cdot [M : N]$.

De même, $\frac{1}{\text{tr}_M(1-p)} = \text{tr}_{N'}(1-p) \cdot [M : N]$.

D'où, en additionnant, $[M : N] = \frac{1}{\text{tr}_M(p)} + \frac{1}{\text{tr}_M(1-p)}$. □

Il est normal à ce niveau de se demander quelles sont les valeurs possibles de $[M : N]$ pour $N \subseteq M$ une inclusion de facteurs II_1 . Le théorème suivant nous donne la réponse, et même davantage :

Théorème 1.6.5. *Soit $N \subseteq M$ une inclusion de facteurs II_1 . Alors $[M : N]$ est un élément de $\{4 \cos^2(\frac{\pi}{n}); n = 3, 4, 5, \dots\} \cup [4; +\infty]$*

De plus, pour tout $\lambda \in \{4 \cos^2(\frac{\pi}{n}); n = 3, 4, 5, \dots\} \cup [4; +\infty]$, il existe un sous-facteur R_λ du facteur hyperfini II_1 R (cf ci-dessous) tel que $[R : R_\lambda] = \lambda$.

Une démonstration peut être trouvée dans [Jon83].

Le Théorème 1.6.5 mentionne le facteur hyperfini II_1 R . C'est un objet fondamental dans la théorie des facteurs, mais sa définition et ses (nombreuses) propriétés nous éloigneraient du sujet premier. Ici nous avons simplement besoin de savoir que R est un facteur II_1 isomorphe à tout réduit pRp , où $p \in P(R)$.

Ainsi, le Corollaire 1.6.4 nous fournit une démonstration du Théorème 1.6.5 pour $\lambda \in [4; +\infty]$, via le fait que $t \mapsto \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\right)$ est surjective de $]0; 1[$ dans $[4; +\infty[$.

2 Construction de l'algèbre des e_i

2.1 La construction de base de Jones

Soit $N \subseteq M$ une inclusion de facteurs II_1 . On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(M, tr_M)$ muni de son vecteur Ω cyclique, spérateur et tracial (cf Partie 1.2).

Par construction, $H_1 = L^2(N, tr_N)$ s'identifie à la fermeture de $N\Omega$ dans $L^2(M, tr_M)$.

(Rigoureusement, on a deux vecteurs Ω_N et Ω_M différents mais identifiables via $\begin{pmatrix} L^2(N) & \rightarrow & L^2(M) \\ x\Omega_N & \mapsto & x\Omega_M \end{pmatrix}$)

qui est une isométrie car Ω_N et Ω_M sont traciaux)

Soit $e_N \in B(L^2(M))$ la projection orthogonale de $L^2(M)$ sur $L^2(N)$.

Proposition 2.1.1. *On a $e_N(M\Omega) = N\Omega$.*

Démonstration. Introduisons le concept d'élément M -borné.

On dit que $\xi \in L^2(M)$ est M -borné si $\exists C > 0, \forall x \in M, \langle x\xi, x\xi \rangle \leq C.tr_M(x^*x)$.

On remarque que tout élément de $M\Omega$ est M -borné, car si $a \in M$, alors $\forall x \in M, \langle x(a\Omega), x(a\Omega) \rangle = tr_M(a^*x^*xa) = tr_M(xaa^*x^*) = \langle a^*x^*\Omega, a^*x^*\Omega \rangle = \|a^*x^*\Omega\|^2 \leq \|a\|^2\|x^*\Omega\| = \|a\|^2 tr_M(x^*x)$.

D'autre part, si $\xi \in L^2(M)$ est M -borné, notons $A \in B(L^2(M))$ l'application linéaire continue qui prolonge $\begin{pmatrix} M\Omega & \rightarrow & L^2(M) \\ x\Omega & \mapsto & x\xi \end{pmatrix}$. A commute avec tout $x \in M$ sur $M\Omega$, donc sur $L^2(M)$, donc $A \in M'$. Or $M' = JMJ$ par la Proposition 1.4.10. Donc $\exists b \in M, A = JbJ$, donc $\xi = JbJ\Omega = b^*\Omega \in M\Omega$.

Ainsi, un élément de $L^2(M)$ est M -borné si et seulement si il est dans $M\Omega$. Montrons maintenant la proposition. Il suffit de montrer que $e_N(M\Omega) \subseteq N\Omega$ car e_N est l'identité sur $N\Omega$. Soit $x \in M$. $x\Omega$ est M -borné, donc $e_N(x\Omega)$ est M -borné (car e_N est une projection orthogonale, donc décroît la norme), donc $e_N(x\Omega)$ est N -borné (car $N \subseteq M$), donc $e_N(x\Omega) \in N\Omega$. □

Définition 2.1.2. Soient $N \subseteq M$ une inclusion d'algèbres de von Neumann. $E : M \rightarrow N$ est une *espérance conditionnelle* si :

- E est linéaire et positive (i.e. elle envoie un positif sur un positif)
- $\forall x \in M, \forall a, b \in N, E(axb) = aE(x)b$.
- $\forall y \in N, E(y) = y$.

Lemme 2.1.3. *Soit $x \in M$.*

(i) $x = x^* \Leftrightarrow \forall y = y^* \in M, tr(xy) \in \mathbb{R}$.

(ii) $x \geq 0 \Leftrightarrow \forall y \geq 0 \in M, tr(xy) \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. (i) (\Rightarrow) Soit $y \in M$ auto-adjoint. Alors $tr(xy) = tr(yx) = tr((x^*y^*)^*) = \overline{tr(x^*y^*)} = \overline{tr(xy)}$, donc $tr(xy) \in \mathbb{R}$.

(i) (\Leftarrow) Soit $x = a + ib, a = a^*, b = b^*$ la décomposition en parties réelle et imaginaire de x , cf Remarque 1.1.6. Alors pour $y = b$ on a $tr(xy) \in \mathbb{R}$, mais $tr(xy) = tr(ab + ib^2) = tr(ab) + itr(b^2)$ qui est encore une décomposition en parties réelle et imaginaire selon le (\Rightarrow) . Donc $tr(b^2) = 0$, donc $b = 0$ car tr est fidèle.

(ii) (\Rightarrow) Soit $y \in M$ positif. On a donc $x = z^*z, y = w^*w$ avec $z, w \in M$. Donc $tr(xy) = tr(z^*zw^*w) = tr(wz^*zw^*) = tr((zw^*)^*(zw^*)) \geq 0$ car tr est positive.

(ii) (\Leftarrow) Soit $x \in M$ tel que $\forall y \in M_+, tr(xy) \geq 0$. En utilisant la décomposition en parties positive et négative, cf Remarque 1.1.9, on a donc $\forall y = y^* \in M, tr(xy) \in \mathbb{R}$. Par le (i) (\Leftarrow) , on a donc $x = x^*$. Écrivons alors $x = x_+ - x_-$, alors pour $y = x_-$ on a $0 \leq tr(xy) = tr(x_+x_-) - tr((x_-)^2) = -tr((x_-)^2) \leq 0$, donc $x_- = 0$ par fidélité de tr , d'où x est positif. □

Proposition 2.1.4. *Par restriction, e_N induit $E : M \rightarrow N$ espérance conditionnelle telle que*

1. $\forall x \in M, e_N x e_N = E(x) e_N$.

2. $\forall x \in M, \text{tr}_N(E(x)) = \text{tr}_M(x)$.

Démonstration. Pour $x \in M$, on définit $E(x)$ comme l'unique élément de N tel que $e_N(x\Omega) = E(x)\Omega$ (il y en a un par la proposition précédente, et il est unique car Ω est séparateur pour N).

E est clairement linéaire.

E est l'identité sur N car pour $x \in N, e_N(x\Omega) = x\Omega$.

Montrons que $\forall x \in M, \forall a, b \in N, E(axb) = aE(x)b$. Soit $x \in M, a, b \in N$.

$E(axb)\Omega = e_N a x b \Omega = e_N a J b^* J(x\Omega)$ et $aE(x)b\Omega = a J b^* J E(x)\Omega = a J b^* J e_N(x\Omega)$. On conclut en utilisant le (i) et le (ii) de la proposition suivante et que Ω est séparateur pour N .

Pour montrer que E est positive, prenons $x \in M_+$. Alors par le Lemme 2.1.3 (ii), on a $\forall y \in N_+, 0 \leq \text{tr}_M(xy) = \langle x\Omega, y\Omega \rangle = \langle x\Omega, e_N y\Omega \rangle = \langle e_N x\Omega, y\Omega \rangle = \langle E(x)\Omega, y\Omega \rangle = \text{tr}_N(E(x)y)$, donc par l'autre sens du 2.1.3(ii) on a $E(x) \in N_+$.

E préserve la trace, car si $x \in M, \text{tr}_M(x) = \langle x\Omega, \Omega \rangle = \langle x\Omega, e_N \Omega \rangle = \langle e_N x\Omega, \Omega \rangle = \langle E(x)\Omega, \Omega \rangle = \text{tr}_N(E(x)) = \text{tr}_N(E(x))$ ce dernier point venant du fait que tr_N est égale à $\text{tr}_M|_N$, car elles envoient toutes deux $1_N = 1_M$ sur 1, donc sont deux traces sur un même facteur fini N , qui n'en possède qu'une. □

Définition 2.1.5. Le passage de l'inclusion initiale $N \subseteq M$ à l'algèbre de von Neumann $\langle M, e_N \rangle = (M \cup \{e_N\})'' \subseteq B(L^2(M))$, et a fortiori à la « tour » d'algèbres de von Neumann $N \subseteq M \subseteq \langle M, e_N \rangle$ est appelé la *construction de base (de Jones)*.

Proposition 2.1.6. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) $e_N \in N'$
- (ii) E préserve l'étoile, c'est-à-dire $J e_N = e_N J$
- (iii) $N = M \cap \{e_N\}'$
- (iv) $\langle M, e_N \rangle = J N' J$
- (v) $\langle M, e_N \rangle$ est un facteur II_1 si et seulement si $[M : N]$ est fini, et dans ce cas on a
 - (a) $[\langle M, e_N \rangle : M] = [M : N]$.
 - (b) $\text{tr}_{\langle M, e_N \rangle}(e_N) = \frac{1}{[M : N]}$
 - (c) (Propriété de Markov) $\forall x \in M, \text{tr}_{\langle M, e_N \rangle}(x e_N) = \frac{\text{tr}_M(x)}{[M : N]}$.

Et donc, si on note $E_M : \langle M, e_N \rangle \rightarrow M$ l'espérance conditionnelle associée à l'inclusion de facteurs $II_1 M \subseteq \langle M, e_N \rangle$ (construite comme ci-dessus pour $N \subseteq M$), on a $E_M(e_N) = \text{tr}_{\langle M, e_N \rangle}(e_N)$.

Démonstration. (i) C'est immédiat par le Lemme 1.4.5, car $L^2(N)$ est invariant par l'action de N .

(ii) J est involutive, donc $J e_N J$ est encore une projection (orthogonale), d'image $J e_N J L^2(M) = J L^2(N) = L^2(N)$, donc $J e_N J = e_N$. On en déduit que $J e_N = e_N J$.

(iii) Remarquons que comme Ω est séparateur pour M , on a $x \mapsto x e_N$ injective sur M (il suffit de spécifier en Ω).

Ainsi, si $x \in M$, par la Proposition 2.1.4.(1), $x e_N = e_N x \Rightarrow x e_N = e_N x e_N \Rightarrow x e_N = E(x) e_N \Rightarrow x = E(x) \Rightarrow x \in N$ et par le (i) $x \in N \Rightarrow x e_N = e_N x$. Finalement, on a bien $M \cap \{e_N\}' = N$.

(iv) On a les égalités suivantes (la troisième vient du fait qu'on prend de toute façon le bicommutant de chaque élément dans l'algèbre de von Neumann engendrée).

$$\begin{aligned}
JN'J &= J(M \cap \{e_N\}')J \text{ par (iii)} \\
&= J\langle M', \{e_N\}'' \rangle J \\
&= J\langle M', e_N \rangle J \\
&= \langle JM'J, Je_NJ \rangle \\
&= \langle M, e_N \rangle.
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
\langle M, e_N \rangle \text{ facteur } II_1 &\Leftrightarrow JN'J \text{ facteur } II_1, \text{ par (iv)} \\
&\Leftrightarrow N' \text{ facteur } II_1 \\
&\Leftrightarrow \dim_N(L^2(M)) < \infty
\end{aligned}$$

par le Théorème 1.5.2(v). D'où le résultat, car $[M : N] = \dim_N(L^2(M))$.

Supposons maintenant que $\langle M, e_N \rangle$ est un facteur II_1 .

(a)

$$\begin{aligned}
[\langle M, e_N \rangle : M] &= \frac{\dim_M(L^2(M))}{\dim_{\langle M, e_N \rangle}(L^2(M))} \text{ par 1.6.3(i)} \\
&= \frac{1}{\dim_{\langle M, e_N \rangle}(L^2(M))} \\
&= \frac{1}{\dim_{JN'J}(L^2(M))} \text{ par (iv)} \\
&= \frac{1}{\dim_{N'}(L^2(M))} \text{ car } JN'J \approx N' \text{ et } L^2(JN'J) \cong L^2(N') \\
&= \dim_N(L^2(M)) \text{ par 1.5.2(viii)} \\
&= [M : N]
\end{aligned}$$

(b) D'une part, $tr_{\langle M, e_N \rangle}(e_N) = tr_{JN'J}(e_N) = tr_{N'}(e_N)$, et d'autre part $1 = \dim_N(L^2(N)) = \dim_N(e_N L^2(M)) = tr_{N'}(e_N) \cdot \dim_N(L^2(M))$ par (i) et par le Théorème 1.5.2 (vi).

$$\text{D'où } tr_{\langle M, e_N \rangle}(e_N) = \frac{1}{[M : N]}.$$

(c) Montrons que $\forall x \in M$, $tr_{\langle M, e_N \rangle}(xe_N) = \tau \cdot tr_M(x)$ où $\tau = tr_{\langle M, e_N \rangle}(e_N) = \frac{1}{[M : N]}$ par le

(b).

Déjà, montrons que c'est vérifié pour tout $x \in N$. Pour cela, remarquons que par le (i), $x \mapsto tr_{\langle M, e_N \rangle}(xe_N)$ est une trace sur N qui est un facteur II_1 , une trace qui vaut τ en 1_N . Par unicité de la trace sur un facteur fini, on a l'identité pour tout $x \in N$.

Pour montrer l'identité sur $x \in M$, on écrit $tr_{\langle M, e_N \rangle}(xe_N) = tr_{\langle M, e_N \rangle}(xe_N e_N) = tr_{\langle M, e_N \rangle}(e_N x e_N) = tr_{\langle M, e_N \rangle}(E(x)e_N) = \tau tr_M(E(x)) = \tau tr_M(x)$ par la Proposition 2.1.4.(2).

Montrons enfin que $E_M(e_N) = tr_{\langle M, e_N \rangle}(e_N) \cdot 1 = \tau \cdot 1$. Posons $y = e_N - \tau \cdot 1_M$. Par l'identité précédente, $\forall x \in M$, $tr_{\langle M, e_N \rangle}(xy) = \tau tr_{\langle M, e_N \rangle}(x) - \tau tr_{\langle M, e_N \rangle}(x) = 0$, or $tr_{\langle M, e_N \rangle}(xy) = \langle y\Omega, x^*\Omega \rangle$, donc $y\Omega \in (L^2(M))^\perp$. Donc $y\Omega$ est l'unique projection orthogonale de $e_N\Omega$ sur $L^2(M)$, qui vaut par définition $e_M e_N \Omega = E_M(e_N)\Omega$. Par conséquent, $E_M(e_N) = \tau \cdot 1$. \square

2.2 L'algèbre des e_i

Partons d'une inclusion de facteurs II_1 $N \subseteq M$ d'indice $[M : N] = \frac{1}{\tau}$ fini.

En effectuant la construction de base sur cette inclusion $N \subseteq M$, on obtient l'inclusion $M \subseteq \langle M, e_N \rangle$, avec $\langle M, e_N \rangle$ encore un facteur II_1 par la Proposition 2.1.6 (v), et $[\langle M, e_N \rangle, M] = [M : N] = \frac{1}{\tau}$.

En itérant la construction de base, on obtient donc une suite M_i de facteurs II_1 , définis par $M_0 = N$, $M_1 = M$, $M_{i+1} = \langle M_i, e_i \rangle$ (avec dans $B(L_2(M_i))$, $e_i : L^2(M_i) \rightarrow L^2(M_{i-1})$ la projection orthogonale et $E_i : M_i \rightarrow M_{i-1}$ l'espérance conditionnelle associée).

On a $N \subseteq M \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_i \subseteq \dots$ (la « tour de Jones ») avec les indices des inclusions successives tous égaux à $\frac{1}{\tau}$.

On s'intéresse à la suite des projections e_i .

Définition 2.2.1. L'algèbre des e_i , notée $A_{n,\tau}$, est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\{1, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dans M_{n+1} , pour la tour définie ci-dessus avec $[M : N] = \frac{1}{\tau}$.

Proposition 2.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons les e_i dans $A_{n,\tau}$:

- (i) $e_i^2 = e_i$ et $e_i^* = e_i$.
- (ii) $e_i e_{i\pm 1} e_i = \tau e_i$
- (iii) $e_i e_j = e_j e_i$ si $|i - j| \geq 2$
- (iv) $tr_{M_{n+1}}(x e_n) = \tau \cdot tr_{M_n}(x)$ si $x \in A_{n-1,\tau}$.

Démonstration. (i) C'est immédiat car les e_i sont des projections orthogonales.

(ii) Montrons que $e_N e_M e_N = \tau e_N$ et que $e_M e_N e_M = \tau e_M$.

$e_M e_N e_M = E_M(e_N) e_M = \tau e_M$ par la Proposition 2.1.6 (v) (b) et (c).

$e_N e_M e_N \Omega_{(M, e_N)} = e_N E_M(e_N) \Omega_{(M, e_N)} = \tau e_N \Omega_{(M, e_N)}$, donc $e_N e_M e_N = \tau e_N$.

Ces arguments sont immédiatement transposables au cas i quelconque, d'où le (ii).

(iii) A l'image du (i) de la Proposition 2.1.6, on a $e_n \in M_n \cap M_{n-2}'$, d'où le résultat.

Enfin, le (iv) découle de la proposition 2.1.6 (v) (c). □

Corollaire 2.2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et τ quelconque, on a $A_{n,\tau}$ de dimension finie.

Démonstration. Ceci est un problème purement combinatoire. Nous dirons qu'un mot w en les e_i est *réduit* s'il est de longueur minimale pour les règles $e_i e_{i\pm 1} e_i \leftrightarrow e_i$, $e_i e_i \leftrightarrow e_i$ et $e_i e_j \leftrightarrow e_j e_i$ pour $|i - j| \geq 2$. Il est clair que tout élément dans l'*-algèbre (pure) engendrée par les e_i et les relations (i),(ii),(iii), est proportionnel à un mot réduit en les e_i . Il est aussi clair qu'un sous-mot d'un mot réduit est lui aussi réduit.

Montrons par récurrence sur m que si $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$ est un mot réduit, alors $m = \max\{i_1, \dots, i_k\}$ n'apparaît qu'une seule fois dans (i_1, \dots, i_k) . C'est évident pour $m = 1$, maintenant supposons le résultat vrai pour $l \leq m - 1$ et montrons le pour m . Soit w un mot réduit en e_1, \dots, e_m . Par l'absurde, supposons $w = w_1 e_m w_2 e_m w_3$ avec w_2 qui ne contient pas e_m . Il y a alors deux possibilités :

a) si w_2 ne contient pas e_{m-1} , alors e_m commute à tous les e_i dans w_2 et w peut être réduit davantage via $e_m^2 \rightarrow e_m$.

b) si w_2 contient e_{m-1} , comme w_2 est réduit et mot en e_1, \dots, e_{m-1} , par hypothèse de récurrence, $w_2 = v_1 e_{m-1} v_2$ avec v_1, v_2 des mots en e_1, e_2, \dots, e_{m-2} , donc qui commutent à e_m , et alors w peut être réduit davantage via $e_m e_{m-1} e_m \rightarrow e_m$.

Dans les deux cas on a une contradiction avec le fait que w est de longueur minimale.

On a donc que si $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$ est un mot réduit, alors $m = \max\{i_1, \dots, i_k\}$ n'apparaît qu'une seule fois dans (i_1, \dots, i_k) .

Ceci nous donne par une récurrence immédiate qu'il n'y a qu'un nombre fini de mots en e_1, \dots, e_n , donc que l'*-algèbre engendrée par e_1, \dots, e_n est de dimension finie.

Ainsi, comme un sous espace-vectoriel d'un $B(H)$ de dimension finie est forcément fermé, et fermé pour les topologies normique, forte et faible, on a l'*-algèbre engendrée par e_1, \dots, e_n qui coïncide avec $A_{n,\tau}$, d'où le résultat. □

Remarque 2.2.4. On peut même majorer $\dim(A_{n,\tau})$ par $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2}$, le $n+1$ -ème nombre de Catalan, de manière optimale, cf [Jon83].

Ainsi la tour d'inclusions $A_{1,\tau} \subseteq A_{2,\tau} \subseteq A_{3,\tau} \subseteq \dots$ peut être représentée par un diagramme de Bratteli, cf Figure 2

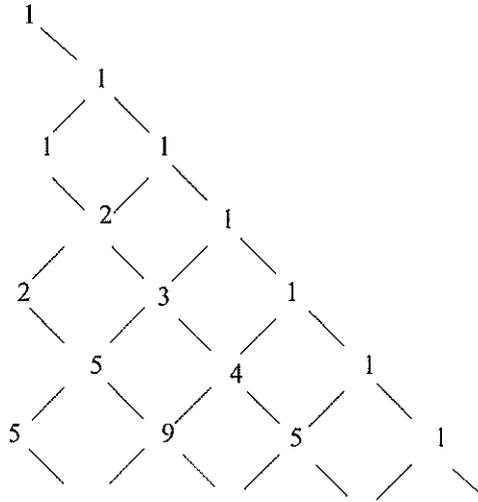


FIGURE 2 – Diagramme de Bratteli de la tour des $A_{n,\tau}$ pour $\tau \leq \frac{1}{4}++$

Le caractère universel de tels diagrammes permet de montrer par récurrence sur n que $A_{n,\tau}$ ne dépend que de n et τ , pas de l'inclusion $N \subseteq M$ utilisée au départ.

De même, la trace utilisée sur $A_{n,\tau}$ peut être définie indépendamment de M_{n+1} , par récurrence sur n .

Ainsi, on pourrait entièrement oublier toute la structure topologique et la construction sous-jacente via la théorie des sous-facteurs pour ne conserver que l'existence d'une *-algèbre avec trace engendrée par les e_i qui vérifient les relations de la Proposition 2.2.2. Ceci suffirait à définir le polynôme de Jones dans la dernière partie. Cependant, se rappeler de la construction via les sous-facteurs permet de démontrer certaines propriétés du polynôme de Jones, cf [Jon87].

3 Groupe de tresses et invariants de nœuds

3.1 Définition et présentation du groupe de tresses

L'objet de cette section est de définir le groupe de tresses à n brins et de se familiariser avec lui. Nous allons introduire une définition géométrique de ce groupe, qui sera toujours à privilégier pour « voir » intuitivement comment les tresses se comportent, puis une définition algébrique du groupe en termes de générateurs et relations. La plupart des résultats de construction seront admis dans la suite, mais les démonstrations peuvent être trouvées dans l'ouvrage de référence [KT08].

Définition 3.1.1. Une *tresse géométrique à n brins* est une partie $b \subseteq \mathbb{R}^2 \times I$ (où $I = [0; 1]$) égale à l'union disjointe de n intervalles topologiques, i.e. des espaces homéomorphes à I , mais tels qu'en plus ils soient homéomorphes à I via la projection $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$, et que

$$b \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$$

$$b \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\} = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}.$$

Un exemple de tresse à 4 brins est dessiné sur la Figure 3, où x et y sont les coordonnées dans \mathbb{R}^2 . Nous choisirons de représenter les tresses comme allant de haut en bas.

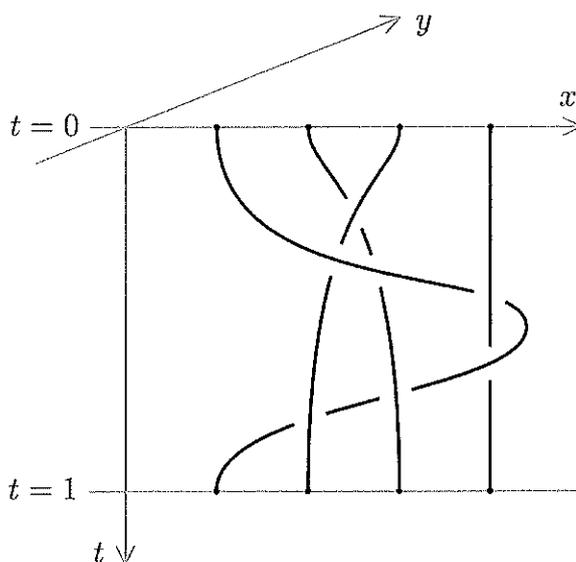


FIGURE 3 – Tresse géométrique à 4 brins

Définition 3.1.2. Deux tresses géométriques b et b' à n brins sont *isotopiques* s'il existe $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ continue telle que $\forall s \in I, F_s : \begin{pmatrix} b & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \times I \\ x & \mapsto & F(x, s) \end{pmatrix}$ soit un homéomorphisme sur son image, que son image soit encore une tresse géométrique à n brins, et que $F_0 = Id_b, F_1(b) = b'$. On dit que F est une *isotopie* de b à b' .

L'isotopie est clairement une relation d'équivalence sur la classe des tresses géométriques à n brins, dont les classes d'équivalences sont appelées *tresses à n brins*.

Ainsi défini, l'ensemble des tresses à n brins s'identifie au groupe fondamental de l'espace des configurations non ordonnées de n points du plan $Conf_n(\mathbb{R}^2) = ((\mathbb{R}^2)^n \setminus \Delta)/S_n$, où Δ est la "diagonale" $\{(x_1, \dots, x_n); \exists i, j, x_i = x_j\}$ et où le groupe symétrique S_n agit par permutation sur les coordonnées. En effet, si γ est un chemin dans $((\mathbb{R}^2)^n \setminus \Delta)/S_n$, $\gamma(t)$ peut être représenté par n points distincts du plan. En empilant ces plans pour $t \in [0; 1]$ on retrouve une tresse à n brins comme sur la Figure 3.

Ceci fournit une structure de groupe à l'ensemble des tresses à n brins, avec comme loi de groupe la concaténation des tresses géométriques (qui correspond à la concaténation des chemins du groupe fondamental). La Figure 4 donne un exemple de telle concaténation, et pose la convention que nous adopterons : si α, β sont des tresses à n brins, $\alpha.\beta$ se dessine en traçant (toujours du haut vers le bas) d'abord α , puis β .

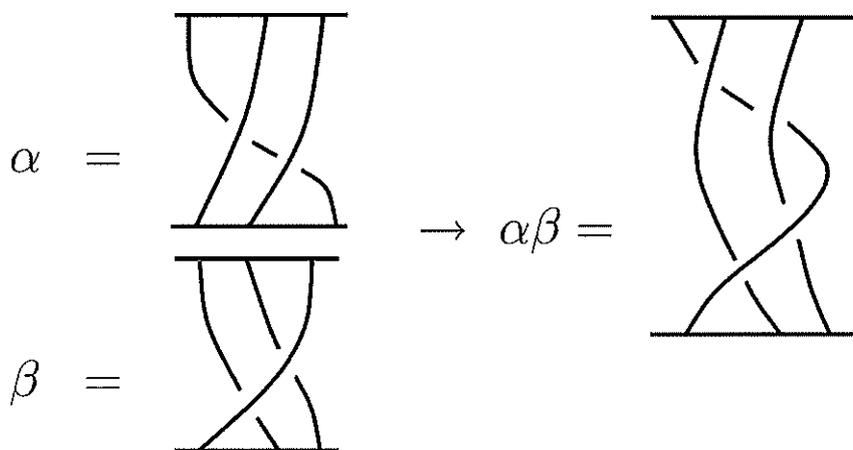


FIGURE 4 – Produit de deux tresses à 3 brins

Il est toujours plus facile de manipuler des objets en deux dimensions qu'en trois. C'est ce que nous allons faire pour les tresses. Si b est une tresse géométrique à n brins, nous pouvons projeter b sur $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ (sur la Figure 3, cela revient à projeter sur le plan $y = 0$) et obtenir un *diagramme de tresse* D_b . Par exemple, la tresse géométrique de la Figure 3 admet pour projeté le diagramme de la Figure 5.

On demande néanmoins qu'un diagramme ne contienne qu'un nombre fini de points multiples, que ces points multiples soient tous doubles et dans lesquels deux brins se rencontrent non tangentiellement, et qu'enfin ces points doubles correspondent à des $t \in I$ différents. Un tel diagramme est dit *régulier*. Nous admettrons que toute tresse géométrique est isotope à une tresse géométrique de diagramme régulier.

Notons que nous représentons les points doubles du diagramme, que nous appellerons désormais *croisements*, par une coupure sur l'un des brins, celui qui va « en-dessous » du point de vue tri-dimensionnel.

Il est clair qu'à tout diagramme on peut associer une tresse géométrique, mais la réciproque n'est pas aussi immédiate : deux tresses géométriques peuvent être en effet isotopes mais de diagrammes très différents au sens où ils n'auraient pas le même nombre de croisements, par exemple.

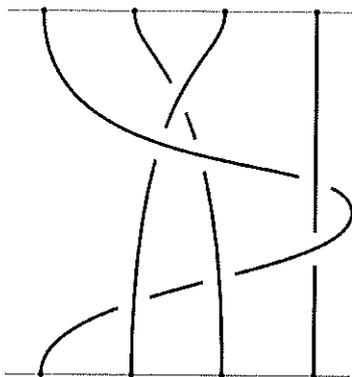


FIGURE 5 – Diagramme d'une tresse à 4 brins

Il faut donc définir une relation d'équivalence sur les diagrammes de tresses. Nous dirons que deux diagrammes D et D' de tresses à n brins sont R -équivalents si on peut obtenir D' à partir de D via une suite finie d'isotopies planaires (qui préservent à chaque étape le nombre et la nature des croisements, mais pas forcément le caractère régulier, cf Figure 6) et des mouvements Ω_2 , Ω_3 et leurs inverses, définis à la Figure 7. Rigoureusement Ω_2 et Ω_3 ne sont appliqués que dans l'intérieur d'un disque suffisamment petit, le reste du diagramme restant inchangé. On a alors :

Théorème 3.1.3. *Deux tresses géométriques sont isotopes si et seulement si leurs diagrammes associés sont R -équivalents.*

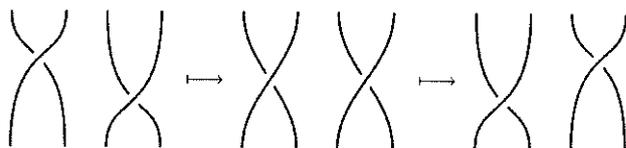


FIGURE 6 – Un exemple d'isotopie planaire entre deux diagrammes de tresses

Remarque 3.1.4. Le R de R -équivalence vient de Reidemeister, qui a donné son nom aux mouvements Ω_2 et Ω_3 , des mouvements qui sont en fait des adaptations des mouvements élémentaires sur les diagrammes de nœuds, que nous verrons un peu plus loin.

Ainsi l'ensemble des classes de diagrammes à n brins à R -équivalence près est virtuellement identique à celui des tresses à n brins. Il en hérite en particulier la structure de groupe.

Il nous reste une dernière équivalence de points de vue à établir, et c'est donner une présentation explicite du groupe de tresses :

Théorème 3.1.5. *Le groupe de tresses à n brins $B_n = \Pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2))$ admet la présentation*

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2 ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq n - 2 \rangle.$$

Les σ_i seront parfois notés $\sigma_i^{(n)}$ pour préciser qu'on considère les générateurs du n -ème groupe de tresses.

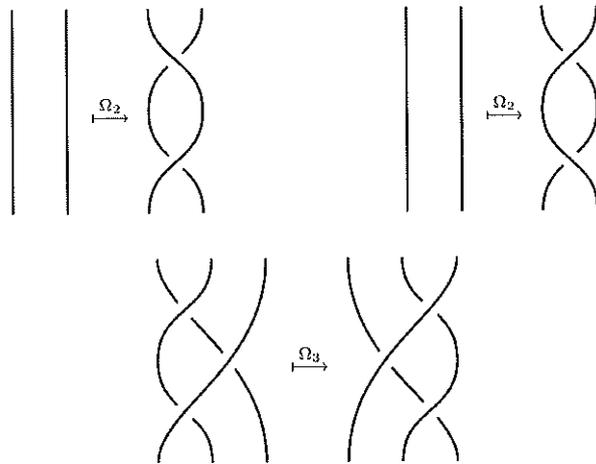


FIGURE 7 – Les mouvements Ω_2 (deux types) et Ω_3

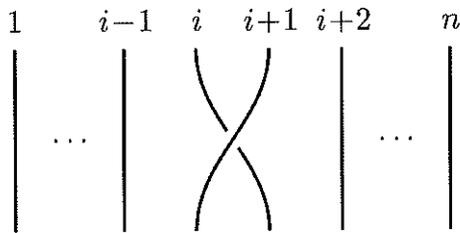


FIGURE 8 – La tresse élémentaire σ_i

Les relations précédentes sont communément appelées *relations de tresses*.

On peut voir un dessin du générateur σ_i sur la figure 8

Son inverse σ_i^{-1} est identique, excepté que le croisement est inversé.

Plus généralement, on peut remarquer que prendre l'inverse d'une tresse revient à prendre le symétrique du diagramme associé par une réflexion d'axe horizontal.

Remarque 3.1.6. Si l'on traduit géométriquement les relations de tresses, on voit que $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ correspond à l'isotopie planaire de la Figure 6, et $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ correspond à Ω_3 . Quant à Ω_2 , il traduit juste la relation $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$.

3.2 Représentations du groupe de tresses

Le Théorème 3.1.5 nous dit que si g_1, \dots, g_{n-1} sont dans un groupe G , ils vérifient les relations de tresses si et seulement s'il existe un morphisme de groupes $\Phi : B_n \rightarrow G$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n-1, \Phi(\sigma_i) = g_i$, et Φ est alors unique.

Exemple 3.2.1. Il existe un unique morphisme surjectif $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n-1, \pi_n(\sigma_i)$ est la transposition $(i, i+1)$. Du point de vue géométrique, π associe à une tresse à n brins la permutation sous-jacente des n points de base.

Exemple 3.2.2. Il existe un unique morphisme injectif $i_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n-1, i_n(\sigma_i^{(n)}) = \sigma_i^{(n+1)}$. On notera à l'avenir, pour $\alpha^{(n)} \in B_n, \alpha^{(n+1)} := i_n(\alpha^{(n)})$. Ceci correspond à rajouter un brin à droite de la tresse α .

Plus généralement, ceci nous permettra de représenter linéairement B_n (un procédé très utile pour mieux comprendre un groupe) en trouvant $n-1$ matrices vérifiant les relations de tresses. La représentation de Burau, définie ci-après, est une telle représentation.

Définition 3.2.3. Soit $n \geq 1$. La représentation de Burau $\psi_n : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ est définie

comme le morphisme de groupe envoyant σ_i sur
$$\begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix}$$

Cette représentation a été initialement découverte en étudiant l'action de B_n sur le groupe libre \mathbb{F}_n .

ψ_n est réductible, car $\psi_n(B_n)$ laisse stable le vecteur dont les n coordonnées sont des 1. Ceci nous amène à définir une sous-représentation

Définition 3.2.4. Définissons $V_1, \dots, V_{n-1} \in GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par $V_1 = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}, V_{n-1} = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$, et pour $i = 2, \dots, n-2, V_i = \begin{pmatrix} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

La représentation de Burau réduite $\tilde{\psi}_n : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ est définie comme le morphisme de groupes prenant les valeurs $\tilde{\psi}_n(\sigma_i) = V_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$.

Remarque 3.2.5. $\tilde{\psi}_2$ et $\tilde{\psi}_3$ sont fidèles, $\tilde{\psi}_n$ ne l'est pas pour $n \geq 5$. La question demeure ouverte pour $\tilde{\psi}_4$.

3.3 nœuds et entrelacs

Définition 3.3.1. Un *nœud* de \mathbb{R}^3 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 diffeomorphe au cercle S^1 . Le nœud est *orienté* si c'est une sous-variété orientée. L'orientation sera alors marquée par une flèche sur un dessin du nœud (le « sens de parcours du nœud »).

Un *entrelacs* de \mathbb{R}^3 à r composantes est une sous-variété de \mathbb{R}^3 diffeomorphe à l'union disjointe de r cercles S^1 . L'entrelacs est *orienté* si c'est une variété orientée. Chaque composante sera alors fléchée.

Quelques exemples de nœuds et d'entrelacs (non orientés) sont dessinés sur la Figure 9

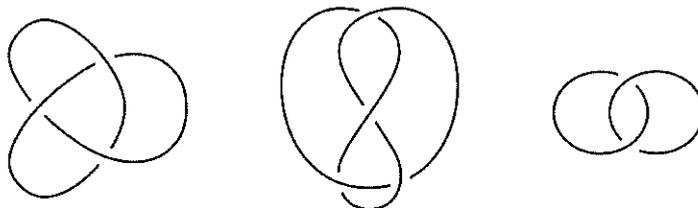


FIGURE 9 – Le nœud de trèfle droit, le nœud de huit, l'entrelacs de Hopf

Nous considérerons que deux entrelacs sont les mêmes si on peut déformer continument l'un en l'autre.

Définition 3.3.2. Deux entrelacs L et L' de \mathbb{R}^3 sont *isotopes* s'il existe $F : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ continue, telle que chaque $F_s = F(\cdot, s)$ soit un diffeomorphisme (pour éviter qu'un entrelacs passe à travers lui-même pendant la déformation), et telle que $F_0 = Id_{\mathbb{R}^3}, F_1(L) = L'$.

Si les entrelacs sont orientés, on dit qu'ils sont *isotopes* si en plus le diffeomorphisme F_1 préserve l'orientation.

Dans la suite, on assimilera un entrelacs à sa classe d'isotopie.

D'autre part, dans la suite de ce mémoire, sauf mention contraire, les entrelacs seront considérés orientés.

La théorie des nœuds consiste notamment à trouver des invariants permettant de distinguer des classes d'isotopies d'entrelacs. Il est souvent difficile de trouver un juste milieu entre la puissance de distinction de l'invariant et à quel point il est facile (voire faisable) de le calculer pour un entrelacs donné.

Exemple 3.3.3. Le *nœud trivial* est le simple cercle S^1 . L'*entrelacs trivial* à r composantes est une union de r cercles dans \mathbb{R}^3 , chacun pris inclus dans une boule, avec les r boules disjointes.

Remarque 3.3.4. En identifiant S^3 à $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, la projection stéréographique $s : S^3 \setminus \{(0, i)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un diffeomorphisme. On peut ainsi définir les nœuds et les entrelacs dans S^3 au lieu de \mathbb{R}^3 .

Exemple 3.3.5. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Le *nœud torique* $T(p, q)$ associé est défini

comme l'image du plongement $\gamma_{p,q} : \left(\begin{array}{ccc} S^1 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ z & \mapsto & s \left(\frac{z^p}{\sqrt{2}}, \frac{z^q}{\sqrt{2}} \right) \end{array} \right)$.

Il est aussi paramétré par $\left(\frac{\cos(pt)}{\sqrt{2} - \sin(qt)}, \frac{\sin(pt)}{\sqrt{2} - \sin(qt)}, \frac{\cos(qt)}{\sqrt{2} - \sin(qt)} \right)$.

Remarquons que $T(2, 3)$ est le nœud de trèfle (droit).

Avant de passer aux représentations diagrammatiques, quelques définitions supplémentaires :

Définition 3.3.6. Soit K un nœud orienté. On note $-K$ le nœud avec l'orientation inverse, on l'appelle *l'opposé de K* . K est *inversible* si K est isotope à $-K$. Cette définition s'étend aux entrelacs, mais en demandant d'inverser l'orientation dans toutes les composantes.

Soit L un entrelacs. L'*image miroir* de L est son image par la réflexion $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$, et sera notée L^* .

L est *positivement* (resp. *négativement*) *amphichéral* si L est isotope à L^* (resp. à $-L^*$).

Comme pour les tresses, on manipulera plus facilement les nœuds en les regardant en deux dimensions au lieu de trois.

Définition 3.3.7. Un *diagramme d'entrelacs générique* (orienté) est l'image D d'une immersion (préservant l'orientation) d'une union disjointe de cercles dans le plan \mathbb{R}^2 avec les conditions supplémentaires que D n'a qu'un nombre fini de points multiples, que ce sont tous des points doubles à vecteurs tangents non colinéaires.

Chaque point double sera appelé *croisement* et sera distingué avec une information « dessus-dessous » .

A chaque diagramme on peut associer une classe d'entrelacs dans \mathbb{R}^3 : on considère le diagramme dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ puis on résout les points doubles en déplaçant un segment faisant partie de l'arc « dessous » dans le demi-espace inférieur. Réciproquement :

Théorème 3.3.8. *Tout entrelacs est isotope à un entrelacs dont la projection sur les deux premières coordonnées est un diagramme générique.*

Le théorème suivant est dû à Reidemeister, et est à rapprocher du Théorème 3.1.3

Théorème 3.3.9. *Deux diagrammes génériques définissent des entrelacs isotopes si et seulement s'ils se correspondent par une suite finie d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister R_1, R_2, R_3 (cf Figure 10) (ou plutôt de leurs versions orientées).*

Les mouvements de Reidemeister de la figure 10 ont des variantes orientées : il s'agit simplement de distinguer les cas selon l'orientation des différents arcs.

On dira qu'un croisement d'un diagramme est *positif* ou *négatif* suivant la Figure 11.

Remarquons que prendre l'image miroir d'un entrelacs correspond à inverser tous les croisements d'un de ses diagrammes.

Définition 3.3.10. Soit D un diagramme d'entrelacs. Son *entortillement* $w(D)$ est défini comme la somme des signes de ses croisements, $+1$ pour un croisement positif, -1 pour un croisement négatif.

Définition 3.3.11. Soit D un diagramme d'un entrelacs L à deux composantes L_1, L_2 , notons D_1 et D_2 les projections de L_1 et L_2 . L'*enlacement* $lk(L)$ de L est défini comme la demi-somme des signes des croisements entre D_1 et D_2 .

Proposition 3.3.12. *L'enlacement de L ne dépend pas du diagramme D choisi, et est invariant à isotopie près.*

Démonstration. Il est clair que $lk(L)$ est inchangé si on effectue des isotopies planaires sur le diagramme D . Montrons que $lk(L)$ est inchangé par les mouvements de Reidemeister. On aura alors le résultat via le Théorème 3.3.9.

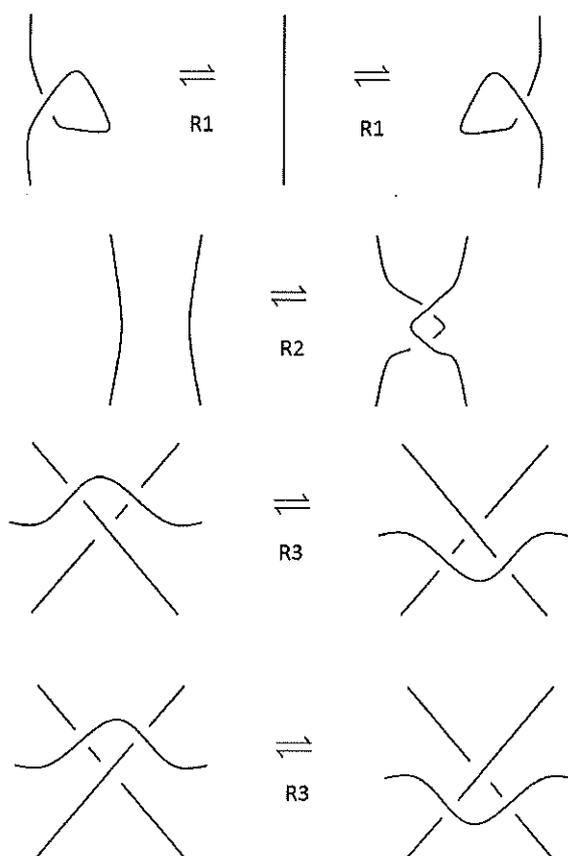


FIGURE 10 – Les trois mouvements de Reidemeister (non orientés)

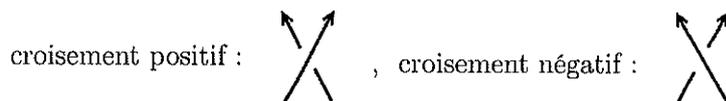


FIGURE 11 – Signe d'un croisement dans un diagramme orienté

Les mouvements de type $R1$ ne rajoutent que des croisements d'une composante avec elle-même, ce qui ne change pas la valeur de l'enlacement.

On voit sur la Figure 10 que $R2$ rajoute ou retire une paire de croisements, l'un positif, l'autre négatif, ce qui ne change pas l'enlacement.

Enfin, $R3$ déplace juste les croisements sans changer leur type ou leur signe, donc l'enlacement n'est pas changé. \square

Nous avons construit un premier invariant d'entrelacs (à deux composantes), mais la technique est universelle : en définissant une fonction sur les diagrammes invariante par les isotopies planaires et les mouvements de Reidemeister, on obtient un invariant d'entrelacs.

Dans la section suivante nous allons découvrir une méthode similaire, mais différente, passant

par le groupe de tresses.

3.4 Tresses et nœuds : le théorème de Markov

Définition 3.4.1. Soit $\beta \in B_n$, qu'on considère comme une tresse géométrique. La *fermeture* de β est l'entrelacs de \mathbb{R}^3 obtenu en « refermant les n brins indépendamment », cf Figure 12. On le note $\hat{\beta}$.

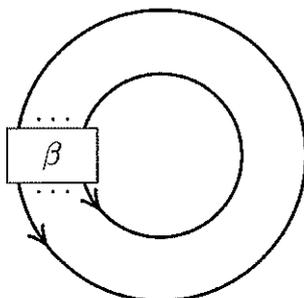


FIGURE 12 – Fermeture d'une tresse

Ce procédé est invariant par isotopie, car on peut toujours prendre les arcs qui referment les brins suffisamment loin de la zone de déformation par une isotopie considérée, qui est bornée dans $\mathbb{R}^2 \times I$.

Exemple 3.4.2. La fermeture de $\sigma_1 \in B_2$ est le nœud trivial.

Exemple 3.4.3. La fermeture de $1 \in B_n$ est l'entrelacs trivial à n composantes.

Théorème 3.4.4 (Alexander). Soit L un entrelacs de \mathbb{R}^3 . Alors $\exists n \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in B_n, L = \hat{\alpha}$.

Une démonstration peut être trouvée dans [KT08].

Il est donc tentant d'utiliser les tresses et leur structure de groupe pour étudier les nœuds et les entrelacs, et trouver des invariants. Le problème est que de nombreuses tresses peuvent avoir la même fermeture. Le théorème suivant résout le problème et donne une relation d'équivalence explicite entre deux tresses de même fermeture, à l'image du Théorème 3.3.9 pour la représentation des entrelacs par des diagrammes.

Définition 3.4.5. Un *mouvement de Markov de type M1* est le processus de transformer $\beta \in B_n$ en $\gamma\beta\gamma^{-1} \in B_n$ avec $\gamma \in B_n$.

Un *mouvement de Markov de type M2* est le processus de transformer $\beta \in B_n$ en $i_n(\beta)\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$. Le processus inverse (passer de B_m à B_{m-1}) sera dit de type $M2^{-1}$.

Théorème 3.4.6 (Markov). Soient $\alpha \in B_n, \beta \in B_m$. Alors $\hat{\alpha}$ est isotope à $\hat{\beta}$ si et seulement si β peut être obtenu à partir de α par une suite finie de mouvements de Markov de types M1, M2 et $M2^{-1}$.

Remarque 3.4.7. Le sens (\Leftarrow) n'est pas difficile à montrer, en remarquant que du point de vue des diagrammes, un mouvement de type M2 ou $M2^{-1}$ revient après fermeture à ajouter ou retirer une boucle de type R1, et un mouvement de type M1 se dissipe après fermeture, car la tresse γ du haut peut être « glissée » le long des n arcs de fermeture pour se trivialisier avec γ^{-1} par le bas.

L'autre sens, lui, est plus difficile à montrer. Une démonstration peut être trouvée dans [KT08].

Ainsi, pour définir un invariant d'entrelacs, il suffit de définir une fonction sur les tresses invariante par les mouvements de Markov !

3.5 Fonctions de Markov : L'exemple du polynôme d'Alexander

Le Théorème 3.4.6 implique que pour obtenir un invariant de nœuds, il suffit de définir une fonction sur le groupe de tresses invariante par les mouvements de Markov (on appelle *fonction de Markov* une telle fonction).

Un moyen d'obtenir un tel invariant est via la représentation de Burau réduite :

$\Delta_{\hat{\alpha}}(t) = \frac{\det(\tilde{\psi}_n(\alpha) - I_{n-1})}{1 + t + \dots + t^{n-1}}$, si $\alpha \in B_n$, est un invariant d'entrelacs à valeurs dans $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, appelé le *polynôme d'Alexander* de l'entrelacs $\hat{\alpha}$. (Là encore, une démonstration de ce fait peut être trouvé dans [KT08].)

Le polynôme d'Alexander a en fait été découvert bien avant les fonctions de Markov ; il a été défini en 1928 par Alexander comme un certain déterminant calculé à partir de la matrice de présentation du premier groupe d'homologie du revêtement infini cyclique du complément du nœud, ce groupe étant vu comme un $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -module. Ceci est fait en détail dans [Cro04].

Nous mentionnons ci-après une autre définition possible du polynôme d'Alexander, pour sa simplicité et sa grande similitude à une des définitions possibles du polynôme de Jones (voir Proposition 4.2.1) :

Définition 3.5.1. Un *triplet de Conway* est un triplet (L_+, L_-, L_0) d'entrelacs de \mathbb{R}^3 qui ont des diagrammes identiques en dehors d'un disque, la différence à l'intérieur du disque étant selon la Figure 13.

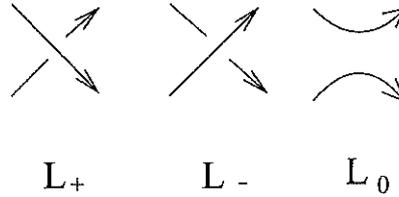


FIGURE 13 – Triplet de Conway

Définition 3.5.2. On peut définir le polynôme d'Alexander $\Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}^{\pm 1}]$ d'un entrelacs L par induction, en demandant qu'il soit invariant par isotopie, de valeur 1 sur le nœud trivial, et vérifie

$$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\Delta_{L_0}(t).$$

pour tout triplet de Conway (L_+, L_-, L_0) (une telle relation pour un triplet de Conway est appelée *relation skein*).

Remarque 3.5.3. En fait, ces deux définitions ne sont égales qu'à un produit par $\pm(\sqrt{t})^k$ près. Mais même en autorisant cette ambiguïté, le polynôme d'Alexander permet de distinguer énormément d'entrelacs.

Dans la suite, quand nous écrirons Δ , cela signifiera le polynôme défini par 3.5.2

Remarque 3.5.4. Nous allons montrer pourquoi la définition précédente par la relation skein est valable ; voyons pourquoi le processus d'induction termine.

Supposons que nous connaissions la valeur de Δ sur tous les entrelacs admettant un diagramme avec moins de k croisements, et montrons qu'on peut déterminer Δ sur un entrelacs L

ayant un diagramme D minimal (i.e. un diagramme de nombre minimal de croisements) à $k + 1$ croisements. D étant minimal, on ne peut réduire son nombre de croisements par des mouvements de Reidemeister.

(a) Partons d'un point arbitraire simple M d'une composante D_0 du diagramme rencontrant au moins un croisement de D . De ce point on suit D_0 selon son orientation jusqu'à tomber sur un croisement c_1 avec une composante différente (s'il n'y en a pas, passer à l'étape (b)), par exemple de type positif. Considérons alors le triplet de Conway de diagrammes $(D, D_-^{(1)}, D_0^{(1)})$ associé à c_1 . $D_0^{(1)}$ a k croisements, donc on peut calculer son polynôme d'Alexander, par hypothèse de récurrence. Connaître Δ_D est donc équivalent à connaître $\Delta_{D_-^{(1)}}$. L'idée est maintenant de continuer à suivre la composante D_0 en inversant ou non les croisements rencontrés, pour se retrouver finalement avec un diagramme D' dont la composante contenant M croise les autres composantes en passant *toujours par-dessus*. On peut alors faire glisser cette composante loin du diagramme (via des mouvements $R2$ et $R3$), ce qui nous donne un diagramme équivalent avec moins de k croisements, et on peut donc calculer le polynôme d'Alexander de D' par hypothèse de récurrence, ce qui nous donne celui de D .

(b) Mais si D_0 ne rencontre pas d'autre composante (par exemple si L est un nœud et n'a donc qu'une seule composante), il faut réduire le nombre de croisements d'une autre manière. Par le même raisonnement qu'au (a), il suffit de trouver un diagramme D' obtenu de D par inversion d'un certain nombre de croisements de D_0 tel que D' est équivalent à un diagramme avec moins de k croisements. Pour ceci, en partant de M , notons c_1, \dots, c_k les croisements rencontrés en revenant à M , en autorisant les répétitions. k est pair et est le double du nombre de croisements dans D_0 , car chaque croisement est rencontré deux fois en suivant le long de D_0 : une fois par le dessus, une fois par le dessous. On modifie alors les croisements pour qu'en partant de M et en suivant l'orientation de D_0 , on passe toujours au-dessus d'un croisement qu'on rencontre la première fois. La figure 14 illustre ce procédé. Un tel diagramme de nœud est appelé *descendant*.

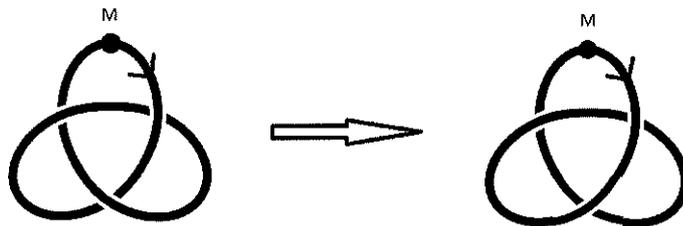


FIGURE 14 – Trivialisation d'un nœud en inversant certains croisements

On peut voir que c'est un diagramme du nœud trivial en se plaçant dans \mathbb{R}^3 et en plaçant les croisements à des altitudes distinctes descendantes, le nœud suivant une altitude strictement décroissante entre deux croisements successifs, jusqu'au dernier où on remonte jusqu'à M ; on peut voir sans trop de difficulté que ce nœud est alors isotope au nœud trivial en « lissant » la partie descendante de la courbe. Comme D' est un diagramme du nœud trivial, on connaît son polynôme d'Alexander, c'est 1.

(c) Enfin, il faut montrer l'initialisation : si D n'a aucun croisement, alors il contient r cercles, c'est le diagramme d'un entrelacs trivial à r composantes. Ainsi, quitte à effectuer une

isotopie dans \mathbb{R}^3 , on peut supposer que D est comme sur la Figure 15. Alors, D est la partie

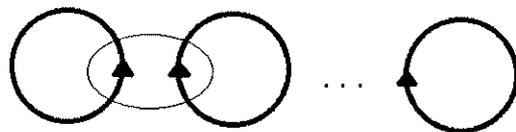


FIGURE 15 – Diagramme trivial à r composantes, avec un non-croisement entouré

L_0 d'un triplet de Conway, cf Figure 15, et les parties L_{\pm} représentent un entrelacs trivial à $r - 1$ composantes. Ainsi, par une récurrence immédiate et en utilisant le fait que le polynôme d'Alexander vaut 1 pour le nœud trivial, on voit qu'on peut calculer le polynôme d'Alexander de D . (En fait, ce polynôme est nul dès que $r \geq 2$, mais ce raisonnement général sur les réductions de diagrammes via les relations skein nous sera utile plus loin).

De la même façon, nous définirons dans la partie suivante le polynôme de Jones comme fonction de Markov via une certaine représentation de B_n , mais ce polynôme pourra être également défini par une relation skein.

4 Le Polynôme de Jones, invariant de nœuds

4.1 Représentation du groupe de tresses dans l'algèbre des e_i et première définition de $V_L(t)$

Les relations (ii) et (iii) de la Proposition 2.2.2 rappellent les relations qui définissent le groupe de tresses B_n dans le Théorème 3.1.5. Une idée pour obtenir une représentation de B_n est donc d'envoyer les générateurs σ_i sur $a.e_i + b.1$ dans $A_{n,\tau}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ (prendre une bonne combinaison linéaire avec l'identité est un moyen classique d'obtenir un inversible à partir d'une projection).

Un rapide calcul nous dit qu'en prenant t tel que $2 + t + t^{-1} = \frac{1}{\tau}$ et $a = t + 1$, $b = -1$,

$\pi_{n,\tau} : \begin{pmatrix} B_n & \longrightarrow & A_{n,\tau} \\ \sigma_i & \longmapsto & (t+1)e_i - 1 \end{pmatrix}$ définit une représentation de B_n dans l'algèbre des e_i $A_{n,\tau}$.

Remarque 4.1.1. $\pi_{n,\tau} : \begin{pmatrix} B_n & \longrightarrow & A_{n,\tau} \\ \sigma_i & \longmapsto & (t+1)e_i - 1 \\ \sigma_i^{-1} & \longmapsto & (\frac{1}{t} + 1)e_i - 1 \end{pmatrix}$

Remarque 4.1.2. $\pi_{n+1,\tau} \circ i_n = \pi_{n,\tau}$ car les $A_{n,\tau}$ forment une tour d'inclusions successives.

Définition 4.1.3. (Le polynôme de Jones $V_L(t)$)

Soit L un entrelacs, et $\alpha \in B_n$ une tresse de fermeture égale à L .

Le polynôme de Jones de L pris en t est

$$V_L(t) := \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{n-1} (\sqrt{t})^{e(\alpha)} tr(\pi_{n,\tau}(\alpha))$$

où $2 + t + t^{-1} = \frac{1}{\tau}$ (i.e. $\tau = \frac{t}{(t+1)^2}$), tr est la trace dans $A_{n,\tau}$, et $e : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ est l'abélianisation (qui envoie chaque σ_i sur 1), ou la « somme des exposants ».

Vérifions maintenant que $V_L(t)$ est invariant si on applique des mouvements de Markov à $\alpha \in B_n$. Ceci prouvera qu'il est un invariant d'entrelacs.

Appliquons un mouvement de type $M1$. Soit $\gamma \in B_n$, et L' la fermeture de $\gamma\alpha\gamma^{-1}$, alors

$$V_{L'}(t) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{n-1} (\sqrt{t})^{e(\gamma\alpha\gamma^{-1})} tr(\pi_{n,\tau}(\gamma\alpha\gamma^{-1})) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{n-1} (\sqrt{t})^{e(\gamma\alpha\gamma^{-1})} tr(\pi_{n,\tau}(\gamma)\pi_{n,\tau}(\alpha)\pi_{n,\tau}(\gamma)^{-1}) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{n-1} (\sqrt{t})^{e(\alpha)} tr(\pi_{n,\tau}(\alpha)) = V_{\hat{\alpha}}(t).$$

Considérons maintenant un mouvement de type $M2$. On a $tr(\pi_{n+1,\tau}(i_n(\alpha)\sigma_n)) = tr(\pi_{n,\tau}(\alpha)\pi_{n+1,\tau}(\sigma_n)) = tr(\pi_{n,\tau}(\alpha)((t+1)e_n - 1)) = tr(\pi_{n,\tau}(\alpha)).((t+1)\tau - 1) = -\frac{1}{t+1} tr(\pi_{n,\tau}(\alpha))$. De même, $tr(\pi_{n+1,\tau}(i_n(\alpha)\sigma_n^{-1})) = -\frac{t}{t+1} tr(\pi_{n,\tau}(\alpha))$. Donc en notant L'' la fermeture de $i_n(\alpha)\sigma_n$, on a

$$V_{L''}(t) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{(n+1)-1} (\sqrt{t})^{e(i_n(\alpha)\sigma_n)} tr(\pi_{n+1,\tau}(i_n(\alpha)\sigma_n)) = V_{\hat{\alpha}}(t).$$

De même pour la fermeture de $i_n(\alpha)\sigma_n^{-1}$.

Exemple 4.1.4. Soit L l'entrelacs trivial à r composantes. Alors L est la fermeture de $\alpha = 1 \in B_r$.

$$\text{Donc } V_L(t) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{r-1} (\sqrt{t})^0 tr(\pi_{r,\tau}(1)) = \left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}} \right)^{r-1}.$$

Montrons maintenant des propriétés basiques des polynômes d'Alexander et de Jones en utilisant leurs relations skein.

Proposition 4.2.2. *Si L est un entrelacs, $\Delta_L = \Delta_{-L}$ et $V_L = V_{-L}$.*

Démonstration. Cela vient du fait qu'inverser l'orientation dans un triplet de Conway ne change pas sa nature. \square

Ainsi, ni Δ ni V ne peuvent détecter si un entrelacs est inversible. Cependant, pour ce qui est de l'amphichéralité, V se distingue :

Proposition 4.2.3. *Si L est un entrelacs, $V_L(t) = V_{L^*}(\frac{1}{t})$.*

Démonstration. Prendre l'image miroir d'un entrelacs revient à inverser tous les croisements dans son diagramme, ce qui échange L_+ et L_- dans tout triplet de Conway, ce qui revient à prendre $t \mapsto \frac{1}{t}$ dans la relation skein. Comme V est défini inductivement par la relation skein, on en déduit le résultat. \square

Remarque 4.2.4. On a vu au 4.1.5 que le polynôme de Jones du nœud de trèfle droit est $t + t^3 - t^4$, et ce polynôme n'est pas invariant quand on remplace t par $\frac{1}{t}$. Ceci prouve donc que les nœuds de trèfle droit et gauche ne sont pas isotopes !

Remarque 4.2.5. Le polynôme d'Alexander Δ est moins puissant pour ce qui est de détecter l'amphichéralité d'un entrelacs. En effet, on a aussi $\Delta_{L^*}(t) = \Delta_L(\frac{1}{t})$, mais $\Delta_L(\frac{1}{t}) = (-1)^c \Delta_L(t)$ avec c le nombre de composantes de L . Ainsi le polynôme d'Alexander ne peut pas détecter l'amphichéralité d'un nœud (où de tout entrelacs avec un nombre pair de composantes), contrairement au polynôme de Jones.

Pour finir, citons plusieurs propriétés de valeurs spécifiques de ces polynômes et deux applications de ces résultats à la théorie des nœuds, et plus précisément, à la question du minimum de brins nécessaires pour tresser un nœud donné.

Les démonstrations complètes peuvent être trouvées dans [Jon87].

Proposition 4.2.6. - (i) *Pour tout entrelacs L , $V_L(-1) = \Delta_L(-1)$.*

- (ii) *Pour tout entrelacs L à c composantes, $V_L(1) = (-2)^{c-1}$*

- (iii) *Pour tout nœud K , $V_K(e^{2i\pi/3}) = 1$.*

- (iv) *Pour tout nœud K , $V'_K(1) = 0$.*

(i), (ii) et (iv) peuvent se démontrer en utilisant uniquement la relation skein. (iii) nécessite de revenir à l'algèbre $A_{n,\tau}$ qui est remarquablement simple puisqu'alors $\tau = 1$.

Proposition 4.2.7. *Si $\alpha \in B_3$ d'abélianisé e et tel que $\hat{\alpha}$ est un nœud, alors*

$$V_{\hat{\alpha}}(t) = t^{e/2} \left(1 + t^e + t + \frac{1}{t} - t^{e/2-1}(1+t+t^2)\Delta_{\hat{\alpha}}(t) \right).$$

Corollaire 4.2.8. *Si K est un nœud et $|\Delta_K(i)| > 3$ alors K n'est pas la fermeture d'une tresse à trois brins.*

Proposition 4.2.9. *Si $\alpha \in B_4$ d'abélianisé e et tel que $\hat{\alpha}$ est un nœud, alors*

$$t^{-e}V_{\hat{\alpha}}(t) + t^eV_{\hat{\alpha}}(1/t) = (t^{-3/2} + t^{-1/2} + t^{1/2} + t^{3/2})(t^{e/2} + t^{-e/2}) - (t^{-2} + t^{-1} + 2 + t + t^2)\Delta_{\hat{\alpha}}(t).$$

Corollaire 4.2.10. *Si K est un nœud et si $\Delta_K(e^{2i\pi/5}) > 6.5$ alors K n'est pas la fermeture d'une tresse à quatre brins.*

Ces propositions donnent des critères facilement vérifiables pour déterminer si un nœud donné s'écrit comme la fermeture d'une tresse à 3 ou 4 brins.

Remerciements

J'aimerais remercier tout d'abord Georges Skandalis, pour m'avoir fait découvrir un sujet passionnant et pour avoir toujours réussi à me sortir d'une impasse mathématique.

Merci à Mikaël de la Salle et Andrzej Zuk pour m'avoir fait découvrir les algèbres d'opérateurs, et à Christian Blanchet pour m'avoir fait connaître la théorie des nœuds, deux domaines que j'ai eu grand plaisir à explorer, et que je compte bien tenter de comprendre encore mieux dans l'avenir.

Merci à Arthur, Martin, Thomas, Thibaut, et Yannick pour nos discussions mathématiques toujours enrichissantes. Un remerciement tout particulier à Amaury et Maxime pour leur aide pour la relecture de ce mémoire, et à Rémi pour son amitié et son aide précieuses.

Enfin, merci à Marie, pour tout son soutien.

Références

- [BH03] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*. Walter de Gruyter and Co., 2003.
- [Bla] C. Blanchet. Notes de cours "noeuds, tresses et théories d'homologie". <http://www.math.jussieu.fr/~blanchet/enseignement/>.
- [Cro04] P. Cromwell. *Knots and Links*. Cambridge University Press, 2004.
- [Dix96] J. Dixmier. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Éditions Jacques Gabay, 1996.
- [Jona] V. Jones. The jones polynomial. <http://www.math.berkeley.edu/~vfr/jones.pdf>.
- [Jonb] V. Jones. Von neumann algebras. <http://www.math.berkeley.edu/~vfr/MATH20909/VonNeumann2009.pdf>.
- [Jon83] V. Jones. Index for subfactors. *Invent. Math.*, 72(1-25), 1983.
- [Jon85] V. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12(103-111), 1985.
- [Jon87] V. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. Math.*, 126(335-388), 1987.
- [Jon91] V. Jones. *Subfactors and Knots*. American Mathematical Society, 1991.
- [JS97] V. Jones and V. S. Sunder. *Introduction to Subfactors*. Cambridge University Press, 1997.
- [KT08] C. Kassel and V. Turaev. *Braid Groups*. Springer, 2008.
- [Ost01] O. P. Ostlund. Invariants of knot diagrams and relations among Reidemeister moves. *J. Knot Theory and Its Ramifications*, 10(1215-1227), 2001.
- [Sun87] V. S. Sunder. *An Invitation to von Neumann Algebras*. Springer-Verlag, 1987.
- [SZ79] S. Stratila and L. Zsido. *Lectures on von Neumann algebras*. Abacus Press, 1979.