

La théorie des nœuds via le polynôme d'Alexander

Fathi Ben Aribi

UCLouvain, Advanced Topics, Printemps 2021

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
2. Préliminaires	4
2.1. La sphère \mathbb{S}^3	4
2.2. Nœuds et entrelacs	5
2.3. Le polynôme d'Alexander des nœuds	6
2.4. Diagrammes	10
2.5. Tables et notations	16
2.6. Nombre et matrice d'enlacement d'un entrelacs	18
2.7. Morceaux choisis de l'histoire de la théorie des nœuds	19
2.8. Solutions des exercices	20
3. La première définition d'Alexander	23
3.1. La définition	23
3.2. Somme connexe	25
3.3. Régions et colonnes	26
3.4. Preuve de l'invariance	28
3.5. Nœuds toriques $T(2, q)$	29
3.6. Solutions des exercices	29
4. Surfaces de Seifert	35
4.1. Préliminaires sur les CW-complexes	35
4.2. Préliminaires sur les surfaces (orientables)	35
4.3. Préliminaires sur l'orientation	37
4.4. Surface de Seifert d'un entrelacs	37
4.5. Références des exercices	40
5. Forme et matrice de Seifert	43
5.1. Équivalence de surfaces	43
5.2. Forme et matrice de Seifert	44
5.3. Signature	45
5.4. Polynôme d'Alexander	46
5.5. Étude de deux exemples	47
5.6. Références des exercices	47
6. Relations skein	50
6.1. Le nombre de dénouement	50
6.2. Triplets skein	50
6.3. Polynôme de Conway et Définition X	52
6.4. Polynôme de Jones	54
6.5. Polynôme de Jones et nombre de croisements	55
6.6. Le polynôme HOMFLY-PT à 2 variables	55
6.7. Pour aller plus loin, avec qui discuter à l'IRMP	56
6.8. Solutions des exercices	56
7. Le groupe d'un entrelacs	58
7.1. Extérieurs d'entrelacs	58
7.2. Propriétés des extérieurs	58
7.3. Le groupe d'un entrelacs	59
7.4. Présentation par générateurs et relations	59

7.5.	Présentation de Wirtinger	60
7.6.	Système périphérique d'un nœud	61
7.7.	Rappels sur l'abélianisation	62
7.8.	Distinguer l'inverse ou l'image miroir	62
7.9.	Solutions des exercices	63
8.	Modules d'Alexander	66
8.1.	Matrice de présentation d'un module	66
8.2.	Revêtements et groupes	67
8.3.	Module d'Alexander d'un nœud	67
8.4.	Le revêtement infini cyclique via une surface de Seifert	68
8.5.	Module et polynôme d'Alexander	68
8.6.	Cas des entrelacs, cas univarié	69
8.7.	Cas des entrelacs, cas multivarié	70
8.8.	Solutions des exercices	71
9.	Calcul de Fox	75
9.1.	Dérivées de Fox	75
9.2.	Matrice de Fox	75
9.3.	Cas des entrelacs	77
9.4.	Les nœuds toriques $T(p, q)$	78
9.5.	Les nœuds satellites	79
9.6.	Présentation de Dehn	81
9.7.	Références des exercices	83
10.	Groupes de tresses	87
10.1.	Tresses	87
10.2.	Tresses et entrelacs	88
10.3.	Tresses et polynôme HOMFLY	89
10.4.	Mouvements de Markov	90
10.5.	Représentation de Burau	90
10.6.	Fidélité des représentations de Burau	91
10.7.	Tresses et calcul de Fox	92
10.8.	Solutions des exercices	94
11.	Torsions de Reidemeister	96
11.1.	La définition	96
11.2.	L'exemple du cercle	96
11.3.	Le cas des nœuds	97
	Références	98

1. INTRODUCTION

Objectifs du cours :

- Offrir une vue d'ensemble de la théorie des nœuds et des différents types d'objets qu'elle implique.
- Informer les étudiants sur les nombreuses interactions entre la théorie des nœuds et d'autres domaines des mathématiques, et sur les chercheurs de l'IRMP qu'ils peuvent contacter s'ils veulent en savoir plus sur ces domaines. Certaines parties du cours pourront servir de point de départ pour trouver un sujet pour un mémoire de master ou une thèse de doctorat.
- Enseigner aux étudiants comment calculer explicitement des invariants des nœuds tels que le polynôme d'Alexander, et comment trouver la méthode la plus appropriée pour le faire en fonction de la situation.
- Former les étudiants à savoir quels outils utiliser pour résoudre des problèmes de recherche en topologie de basse dimension.
- Entraîner les étudiants à la rédaction d'une démonstration rigoureuse.
- Lister de nombreuses références bibliographiques pour des résultats (parfois obscurs) du domaine.

Les moyens d'évaluation :

- Un examen écrit final à la fin du quadrimestre, avec documents autorisés.
- Dans la mesure du possible au vu de la situation sanitaire, des évaluations intermédiaires. Celles-ci pourront prendre la forme de courts examens écrits pendant les créneaux de cours ou bien de projets à domicile à résoudre en groupe suivis d'entretiens individuels. Les moyens exacts seront décidés en fonction des mesures sanitaires et du nombre d'étudiants.
- La note finale sera le maximum entre la note de l'examen final et une moyenne pondérée de la note de l'examen final et des notes intermédiaires, de sorte que les évaluations intermédiaires pourront constituer un bonus mais pas un malus.
- De manière facultative, les étudiants pourront préparer chaque semaine des exercices inclus dans le cours, et les rendre à l'enseignant pour obtenir corrections et retours constructifs. Faire ces exercices sera un bon entraînement à l'examen final du cours, mais n'apportera pas de bonus chiffré à la note finale.

Prérequis :

- Algèbre commutative de niveau bachelor (groupes, anneaux, algèbres, modules)
- Bases de la topologie algébrique (groupe fondamental, revêtements, homologie)
- **Pas un pré-requis** : avoir suivi "Low-dimensional topology" de Pedro Vaz en 2019-2020. Le contenu de notre cours sera complémentaire à celui de Pedro Vaz.
- Certains rappels pourront être faits selon les préférences des élèves.

Public attendu :

- Les étudiants intéressés par la topologie et/ou l'algèbre.
- Les étudiants intéressés par une description large et pas trop technique d'un domaine (la théorie des nœuds).
- Les étudiants cherchant des idées pour des sujets de mémoire et voulant connaître des domaines d'expertise des chercheurs de l'IRMP.
- Les chercheurs (topologues ou non) sont également les bienvenus.

2. PRÉLIMINAIRES

2.1. **La sphère \mathbb{S}^3 .** On considèrera la plupart du temps des entrelacs plongés dans la sphère de dimension 3 (notée \mathbb{S}^3), parfois dans l'espace tri-dimensionnel \mathbb{R}^3 , et plus rarement comme plongés dans la boule de dimension 3 (notée \mathbb{B}^3). Commençons par rappeler des définitions équivalentes de \mathbb{S}^3 (chacune ayant son intérêt), avant d'expliquer les nuances entre la considération de \mathbb{S}^3 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{B}^3 comme espace ambiant.

Définition 2.1. La 3-sphère \mathbb{S}^3 est définie par n'importe laquelle des définitions suivantes équivalentes :

(a) La sphère unité de \mathbb{R}^4 :

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}.$$

(b) Le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^3 (par ajout d'un point noté ∞) :

$$\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}.$$

Dans l'image habituelle que l'on se fait de \mathbb{R}^3 , le même unique point ∞ est atteint comme limite de toute suite de points dont la norme dans \mathbb{R}^3 tend vers l'infini.



FIGURE 1. \mathbb{S}^2 est le compactifié de \mathbb{R}^2

(c) L'union de deux boules \mathbb{B}^3 recollées le long de leur bord \mathbb{S}^2 :

$$\mathbb{S}^3 = \mathbb{B}^3 \cup_{\mathbb{S}^2} \mathbb{B}^3.$$

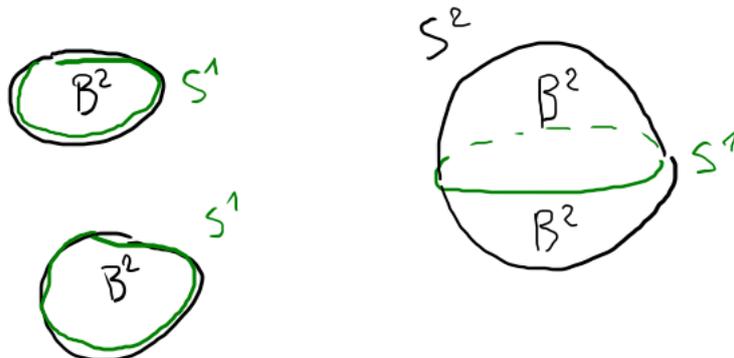


FIGURE 2. \mathbb{S}^2 est le recollement de deux disques \mathbb{B}^2

Pour mieux visualiser \mathbb{S}^3 , on peut ré-interpréter chacune de ces définitions en dimension inférieure, avec \mathbb{S}^2 ou \mathbb{S}^1 , et en s'aidant de dessins, comme les Figures 1 et 2.

Précisons maintenant quelques nuances entre \mathbb{S}^3 , \mathbb{R}^3 et \mathbb{B}^3 :

- L'espace \mathbb{S}^3 est compact, ce qui a toujours ses avantages. Il admet notamment une structure de CW-complexe avec un nombre *fini* de cellules.
- L'espace \mathbb{R}^3 n'est pas compact, mais est un espace auquel nous sommes bien habitués, et il est plus facile à visualiser que \mathbb{S}^3 .
- L'espace \mathbb{B}^3 (la boule unité *fermée*) est compact et facile à visualiser, mais a un bord.

Exercice 2.2. (1) *Montrer que \mathbb{B}^3 et \mathbb{R}^3 sont homotopiquement équivalents mais pas homéomorphes.*

(2) *Montrer que \mathbb{B}^3 et \mathbb{S}^3 ne sont pas homotopiquement équivalents.*

2.2. Nœuds et entrelacs. Pour le reste de ce cours, on choisit une orientation de \mathbb{S}^3 , par exemple celle venant de la règle de la main droite dans \mathbb{R}^3 .

Définition 2.3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Un *entrelacs* L à m composantes est une sous-variété orientée (lisse) de \mathbb{S}^3 difféomorphe à une union disjointe de m cercles \mathbb{S}^1 (orientés).

Un *nœud* est un entrelacs à une composante, i.e. une courbe fermée simple lisse orientée dans \mathbb{S}^3 .

Dans la littérature on désigne parfois comme *entrelacs* le *plongement* $L: \sqcup_{i=1}^m \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ au lieu de son image (comme nous le faisons dans la Définition 2.3).

Exemple 2.4. Le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{S}^3$, muni d'une de ses deux orientations, est appelé le *nœud trivial* (*unknot* en anglais) et est noté U , O ou 0_1 .

L'union de n cercles unité orientés appartenant chacun à un plan horizontal d'altitude différente est appelé *entrelacs trivial à n composantes*.

Définition 2.5. Soient S, T deux sous-variétés d'une variété M (toutes trois orientées). Une *isotopie ambiante* (lisse) entre S et T est une application lisse $F: [0, 1] \times M \rightarrow M$ telle que

- $F(0, \cdot): M \rightarrow M$ est l'identité de M ,
- Pour tout $t \in [0, 1]$, $F(t, \cdot): M \rightarrow M$ est un difféomorphisme de M respectant l'orientation,
- $F(1, S) = T$.

Définition 2.6. Deux entrelacs L, L' de \mathbb{S}^3 sont *équivalents* (ou *ambient-isotopes*) s'ils vérifient les conditions suivantes équivalentes :

- il existe une isotopie ambiante entre L et L' en tant que sous-variétés de \mathbb{S}^3 .
- il existe un auto- (C^∞) -difféomorphisme $h: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ respectant l'orientation tel que $h(L) = h(L')$.

(L'équivalence entre ces deux définitions sera admise est n'est pas triviale!) On notera parfois $[L]$ la classe d'équivalence de L (appelée aussi *classe d'isotopie*).

Exercice 2.7. Prenons J le nœud trivial donné par un cercle unité orienté, et K le cercle muni de l'orientation inverse.

(1) *Montrez qu'il existe une isométrie de \mathbb{R}^3 respectant l'orientation et envoyant J sur K (on pourra utiliser des rotations et translations).*

(2) *En déduire que J et K sont équivalents.*

Définition 2.8. Soit K un nœud. On note $-K$ le *nœud inverse* de K , obtenu depuis K en inversant le sens de parcours.

Un nœud K est *inversible* s'il est équivalent à son inverse.

L'Exercice 2.7 consiste donc à prouver que le nœud trivial est inversible. Remarquons tout de suite qu'il est difficile de trouver des exemples de nœuds non inversibles.

Les Définitions 2.3 et 2.6 ne sont pas les seules façons utilisées dans la littérature pour définir les notions d'*entrelacs* et d'*équivalence d'entrelacs*.

On peut également définir un entrelacs comme un *plongement* d'une union disjointe de cercles (là où la Définition 2.3 décrit plutôt l'image d'un tel plongement), ou comme une union de courbes *polygonaux* fermées simples (aussi appelé entrelacs *PL* ou *Piecewise-Linear*).

Comme ce cours donne la priorité à l'exploration en largeur plutôt qu'en profondeur, nous nous contenterons des Définitions 2.3 et 2.6, mais surtout de la compréhension intuitive qu'un nœud est une ficelle parcourant une trajectoire dans l'espace sans auto-intersection et revenant à son point de départ, et l'équivalence correspond à déplacer la ficelle de manière lisse sans l'autoriser à se traverser elle-même.

Le but de la théorie des nœuds est de classer les nœuds et entrelacs à équivalence près, ce qui permet de les classer dans des tables comme celle de la Figure 3. Pour ce faire, on utilise des *invariants* :

Définition 2.9. Un *invariant d'entrelacs* est une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des entrelacs et qui prend la même valeur sur des entrelacs équivalents.

Ainsi, si F est un invariant d'entrelacs et si L, L' sont des entrelacs tels que $F(L) \neq F(L')$, alors par contraposée L et L' ne sont pas équivalents, et sont donc *distingués par F* .

En général, *calculer* ou *comparer* $F(L)$ et $F(L')$ peut ne pas être évident, notamment selon l'ensemble d'arrivée de F .

Exemple 2.10. La classe d'équivalence $[L]$ de l'entrelacs L est un invariant, par conséquence immédiate des définitions. C'est l'invariant le plus puissant possible mais le moins pratique à comparer pour différencier des entrelacs.

Exemple 2.11. À l'inverse, associer 0 à tout entrelacs donne un invariant très facile à calculer et à comparer, mais a un pouvoir de détection nul.

Exemple 2.12. Un peu mieux que l'invariant constant, il y a le *nombre de composantes* $\mu(L)$ d'un entrelacs $L = L_1 \cup \dots \cup L_{\mu(L)}$.

Exemple 2.13. L'ensemble (fini) des classes d'isotopies des nœuds composant l'entrelacs

$$L = L_1 \cup \dots \cup L_{\mu(L)} \mapsto \{[L_i] \mid 1 \leq i \leq \mu(L)\}$$

est un invariant d'entrelacs.

Pour lire des invariants de nœuds et d'entrelacs, il y a les sites web *Knotinfo* et *Linkinfo*, voir Figure 4.

Dans le tableau de la Figure 5 nous recenserons tous les invariants d'entrelacs abordés dans ce cours (sauf le polynôme d'Alexander, qui a son propre tableau dans la Figure 7).

2.3. Le polynôme d'Alexander des nœuds. Présentons maintenant l'objet central de ce cours, à savoir le polynôme d'Alexander d'un nœud. Cet invariant de nœuds sera notre guide, notre point d'ancrage, tout au long de notre exploration de différentes régions de la théorie des nœuds.

Remarquons tout de suite que nous le désignons ici comme invariant de *nœuds*, pas d'entrelacs, car s'il se généralise aux entrelacs, il peut le faire de plusieurs manières, comme nous le découvrirons dans les prochains chapitres.

Le polynôme d'Alexander d'un nœud K est noté Δ_K ou $\Delta_K(t)$, et vit dans l'anneau $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ des polynômes de Laurent à coefficients entiers (t étant ici l'indéterminée).

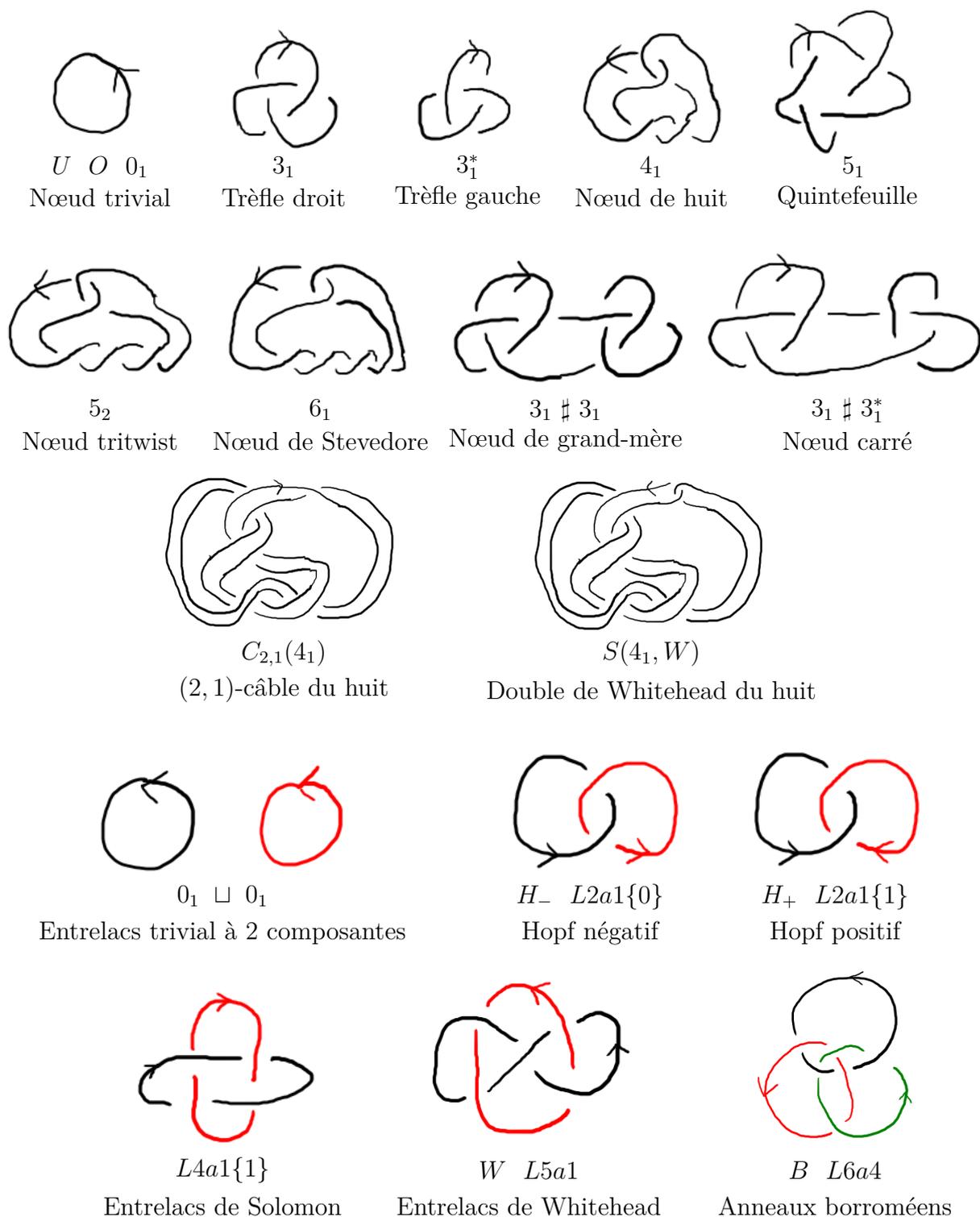


FIGURE 3. Notations et noms de quelques nœuds et entrelacs

Ci-après dans la Figure 6 sont listées ses valeurs pour quelques nœuds simples, dans le but de vous familiariser avec cet objet.

Dans ce cours nous aborderons les définitions suivantes du polynôme d'Alexander, liées à différents types d'objets :

- comme déterminant d'une matrice construite depuis le diagramme,
- via une relation d'écheveaux (*skein relation*),
- via des représentations de groupes de tresses,

KnotInfo: Table of Knots Search Results

[Export to CSV](#)

Name	Fibered	Genus	Alexander	Volume
<u>3_1</u>	Y	1	1-t ²	0
<u>4_1</u>	Y	1	1-3*t ²	2.029883213
<u>5_1</u>	Y	2	1-t ² -t ³ +t ⁴	0
<u>5_2</u>	N	1	2-3*t ²	2.828122088
<u>6_1</u>	N	1	2-5*t ²	3.163963229
<u>6_2</u>	Y	2	1-3*t ² +3*t ² -3*t ³ +t ⁴	4.400832516
<u>6_3</u>	Y	2	1-3*t ² +5*t ² -3*t ³ +t ⁴	5.693021091
<u>7_1</u>	Y	3	1-t ² -t ³ +t ⁴ -t ⁵ +t ⁶	0
<u>7_2</u>	N	1	3-5*t ²	3.331744232
<u>7_3</u>	N	2	2-3*t ² +3*t ² -3*t ³ +2*t ⁴	4.592125697
<u>7_4</u>	N	1	4-7*t ²	5.137941202
<u>7_5</u>	N	2	2-4*t ² +5*t ² -4*t ³ +2*t ⁴	6.443537381
<u>7_6</u>	Y	2	1-5*t ² +7*t ² -5*t ³ +t ⁴	7.084925954
<u>7_7</u>	Y	2	1-5*t ² +9*t ² -5*t ³ +t ⁴	7.643375172
<u>8_1</u>	N	1	3-7*t ²	3.427205246

FIGURE 4. Le site web KnotInfo

Notation	Nom	Référence
$[L]$	Classe d'équivalence	2.10
$\mu(L)$	Nombre de composantes	2.12
$\{[L_i]\}_i$	Classes des composantes	2.13
$\text{lk}(L)$	Nombre d'enlacement	2.26
$\text{Lk}(L)$	Matrice d'enlacement	2.29
$c(L)$	Nombre de croisements	2.23
$K = -K ?$	Inversibilité	2.8
$K = K^* ?$	Être amphichéral	4.9, 5.12
	Type de symétrie	5.12
	Nombre de facteurs premiers	3.12
	Être alterné	2.24
	Être scindé	2.25
$g(L)$	Genre	4.10
$\sigma(L)$	Signature	5.15
$\det(L)$	Déterminant	5.19
$u(K)$	Nombre de dénouement	6.1
$\nabla_L(z)$	Polynôme de Conway	6.15
$J_L(t)$	Polynôme de Jones	6.20
$P_L(v, z)$	Polynôme HOMFLY-PT	6.28
E_L	Extérieur	7.1
G_L	Groupe	7.8
$(G_K, [m_K], [l_K])$	Système périphérique	7.23
\mathcal{A}_K	Module d'Alexander	8.16
$\mathcal{A}_L^{\mathbb{Z}}$	Module d'Alexander univarié	8.27
\mathcal{A}_L^{μ}	Module d'Alexander multivarié	8.32
$b(L)$	Indice de tressage	10.14

FIGURE 5. Index des définitions d'invariants d'entrelacs

- via une surface de Seifert,
- via l'homologie d'un revêtement,
- via le calcul de Fox sur le groupe libre,

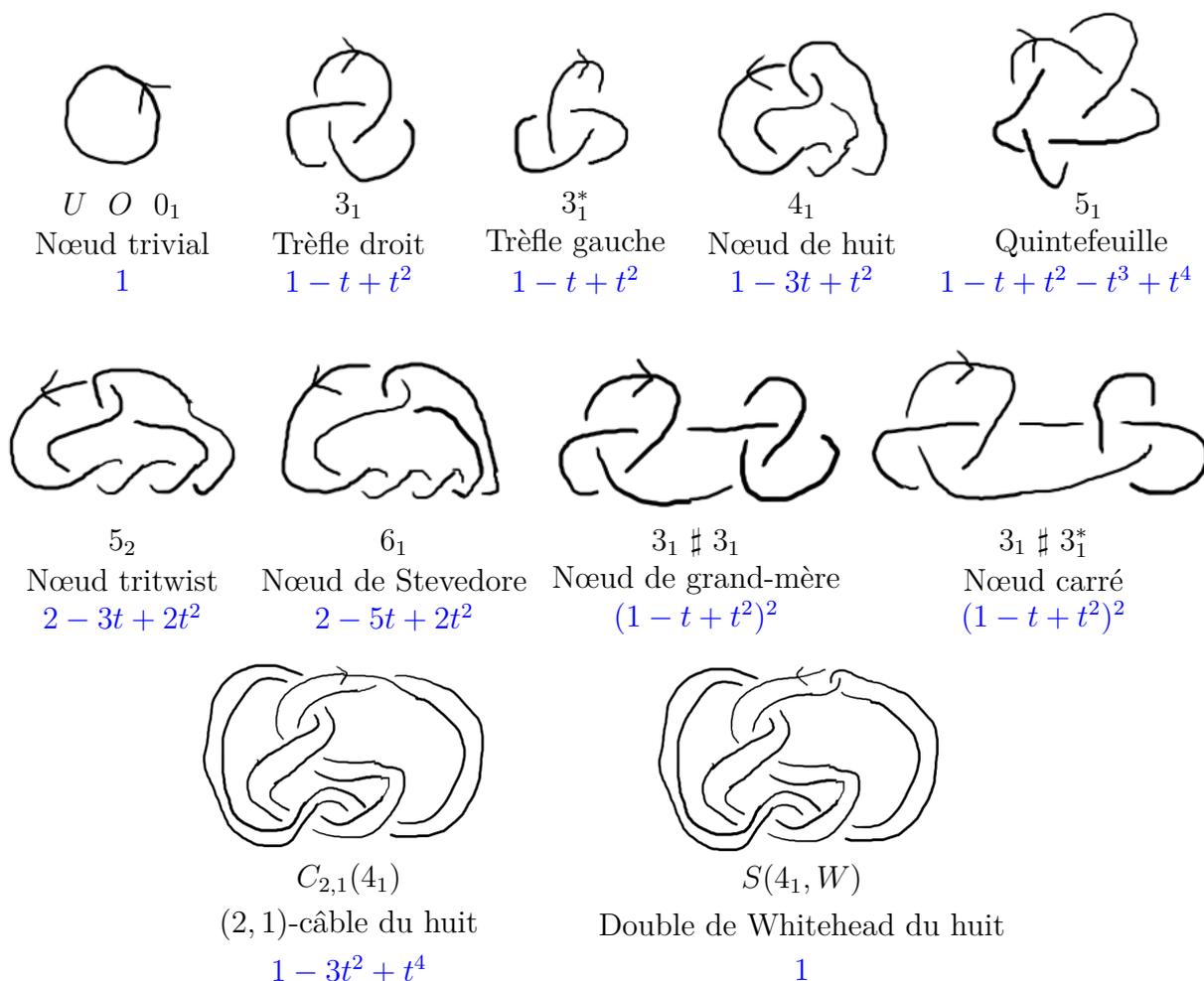


FIGURE 6. Premières valeurs du polynôme d'Alexander $\Delta_K(t)$ (en bleu)

- comme une torsion de Reidemeister,
- etc. (si le temps le permet).

Plusieurs de ces définitions se généralisent à d'autres objets que les nœuds dans \mathbb{S}^3 , comme les entrelacs dans \mathbb{S}^3 (pour lesquels il y a *plusieurs* généralisations!), mais aussi :

- les enchevêtrements (*tangles*),
- les graphes,
- les nœuds en plus haute dimension,
- les nœuds dans d'autres 3-variétés que \mathbb{S}^3
- les 3-variétés,
- les groupes de présentation finie,
- etc.

Dans le tableau ci-dessous (Figure 7), on listera les différentes définitions vues dans le cours et pour quels objets autres que les nœuds chacune se généralise. Un L signifie une généralisation aux entrelacs avec un polynôme à une seule variable, et L^μ signifie une généralisation aux entrelacs avec un polynôme multivarié.

La Figure 8 représente les liens abordés dans le cours entre les différentes définitions du polynôme d'Alexander. Une définition (représentée par une ou deux lettres capitales)

Définition	Référence	Origine	Généralisations
A	3.2, 3.17, 9.47	Alexander (régions de diagramme)	L
B	10.23	Représentation de Burau	L
C	8.19, 8.28, 8.34	Homologie du revêtement infini cyclique	L, L^μ
F	9.10, 9.17	Calcul de Fox, pgcd des mineurs	L, L^μ
FW	9.12, 9.18	Calcul de Fox, présentation de Wirtinger, tout mineur	L
G	8.24	G'/G'' où G est le groupe du nœud	
R	11.2	Torsion de Reidemeister	L, L^μ
RF	9.14, 9.19	Calcul de Fox, facteur de compensation	L, L^μ
S	5.20	Surface de Seifert	L
X	6.14	Relation d'écheveaux	L

FIGURE 7. Index des définitions du polynôme d'Alexander

encerclée en pointillés est exclusive aux nœuds, une encerclée simplement s'applique aux nœuds et aux entrelacs (avec une seule variable t), et une avec un double cercle s'applique aux entrelacs sous forme univariée et multivariée.

2.4. Diagrammes.

Définition 2.14. Un *diagramme d'entrelacs* (orienté) D est la donnée des objets suivants :

- une immersion (lisse) $\sqcup_{i=1}^m \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une union disjointe de cercles orientés dans le plan, dont les seuls points multiples sont des points doubles en nombre fini (appelés *croisements* de D) où les deux tangentes sont distinctes (voir Figure 9),
- une information “dessus/dessous” à chaque croisement, représentée d'une des deux façons de la Figure 10.

La Figure 3 comprend plusieurs exemples de diagrammes d'entrelacs (pour le câble et le double de Whitehead, on a omis de dessiner certains traits courts évidents pour une meilleure lisibilité).

On peut associer à tout diagramme d'entrelacs D un entrelacs L , de la manière suivante : pour chaque point du diagramme D hors d'un voisinage de chaque croisement, on associe un point de \mathbb{R}^3 via

$$D \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3,$$

et au voisinage de chaque croisement on procède comme à la Figure 11, en déplaçant le brin du dessous un peu en-dessous du plan d'altitude 0 (sur la Figure 11, les points d'altitude 0 sont en noir, ceux d'altitude $-\epsilon < 0$ sont en rouge, et les intermédiaires sont en bleu).

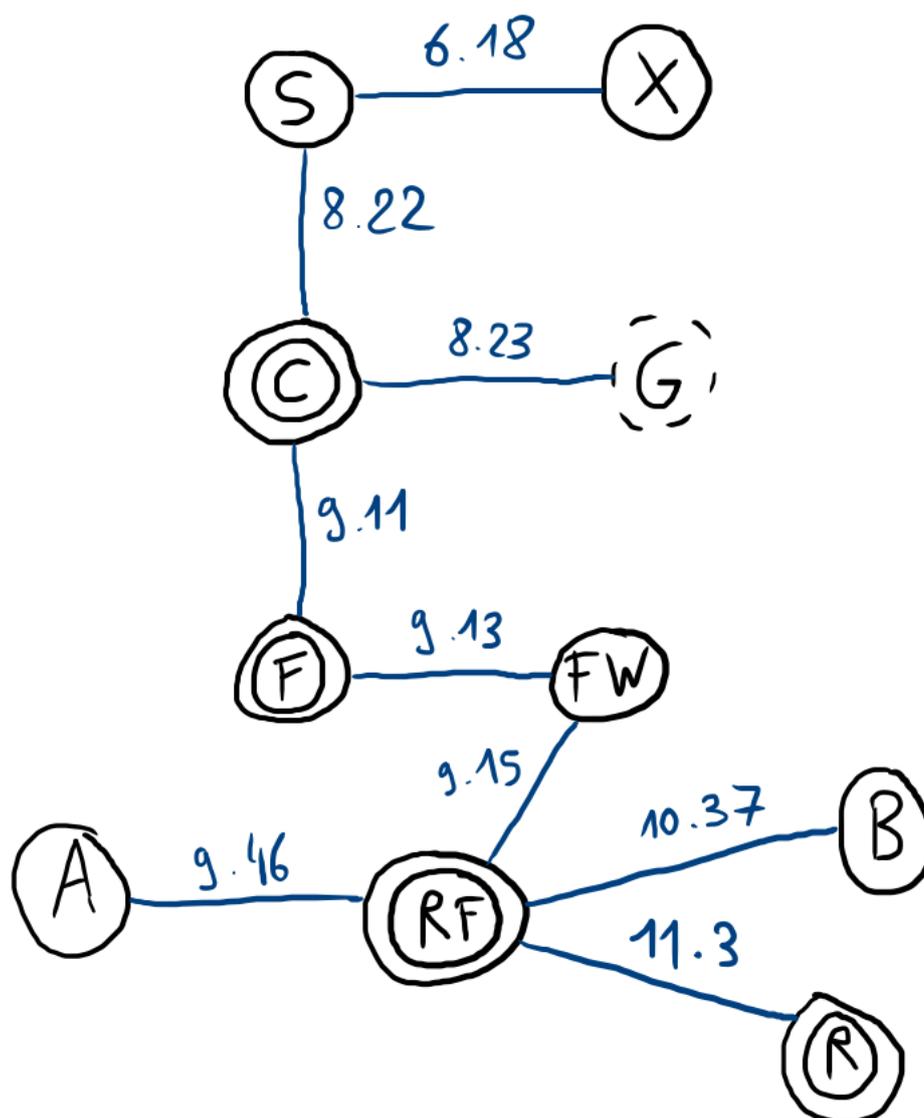
Réciproquement, on peut associer à un entrelacs un diagramme d'entrelacs, par le théorème suivant.

Théorème 2.15. *Tout entrelacs de \mathbb{R}^3 est équivalent à un entrelacs dont la projection sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ donne un diagramme d'entrelacs.*

La preuve du Théorème 2.15 sera admise. Remarquons que le diagramme obtenu ainsi est loin d'être unique, comme on peut s'en convaincre en tournant un nœud dans l'espace et en voyant comment le diagramme projeté change.

En passant à la représentation bi-dimensionnelle très pratique, on gagne donc beaucoup d'ambigüité. Heureusement, cette ambigüité est entièrement décrite par quatre types de mouvements simples sur les diagrammes.

Définition 2.16 (Reidemeister). Les *mouvements de Reidemeister* sont des opérations sur l'ensemble des diagrammes d'entrelacs, de quatre types :



S-X : 6.18
 S-C : 8.22
 C-G : 8.23
 C-F 9.11
 F-FW 9.13
 FW-RF 9.15
 A-RF 9.46
 B-RF 10.37
 RF-R 11.3

FIGURE 8. Index des définitions du polynôme d'Alexander

— *le type R0* : une *isotopie planaire*, i.e. une isotopie entre deux diagrammes d'entrelacs par rapport au plan ambiant, dont l'image à chaque temps est un diagramme d'entrelacs (sans singularité interdite comme à la Figure 9)).

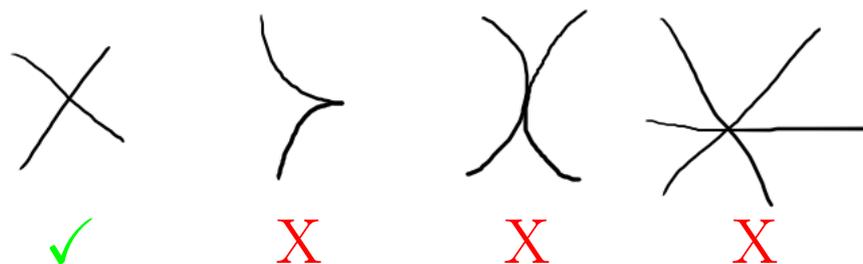


FIGURE 9. Points multiples autorisés (✓) et interdits (X).



FIGURE 10. Deux façons d’encoder l’information “dessus/dessous”.

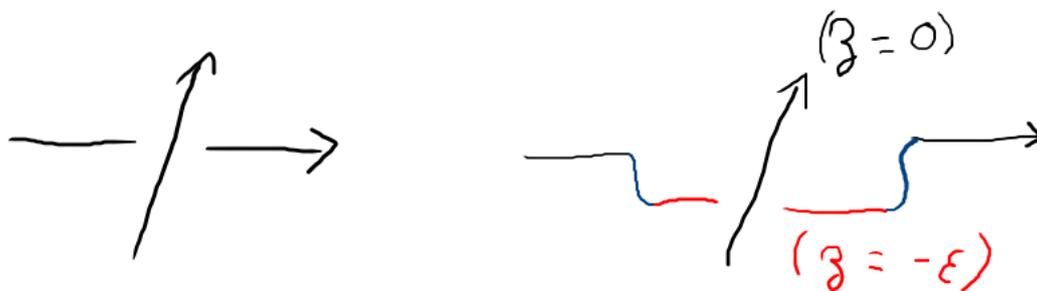
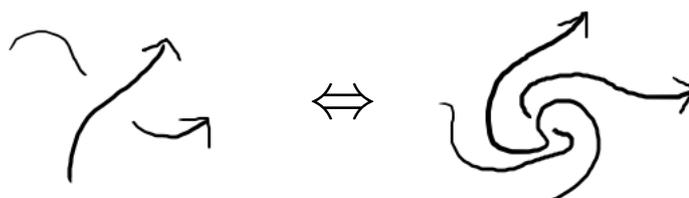
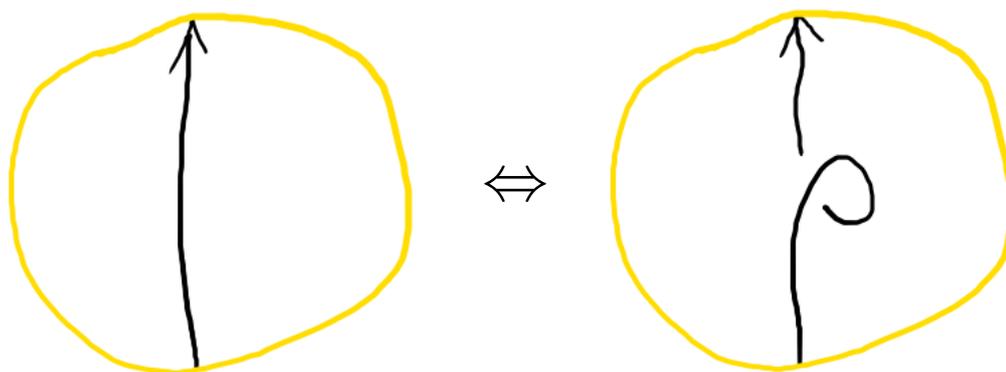


FIGURE 11. Construire un entrelacs (droite) à partir d’un diagramme (gauche).

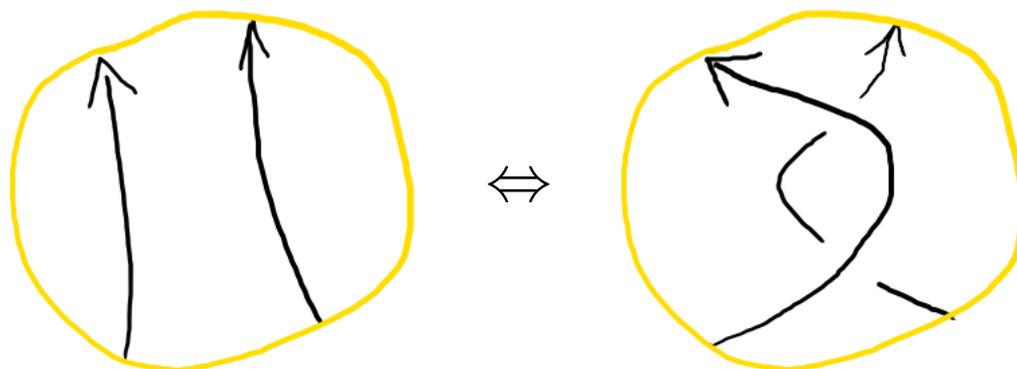


— *le type R1* : ajout ou retrait d’une boucle, i.e. remplacement d’un disque du plan par un autre de la manière suivante :



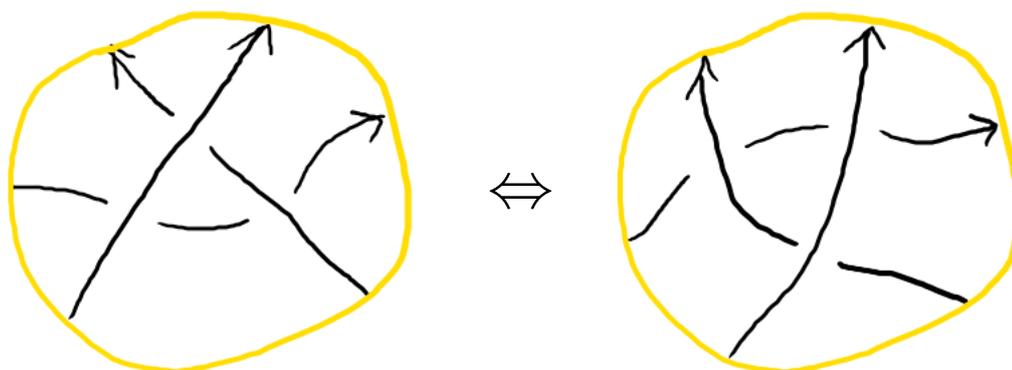
ou d'autres manières similaires (cf Remarque 2.17 ci-après).

- *le type R2* : glissement d'un brin au-dessus d'un autre brin, i.e. remplacement d'un disque du plan par un autre de la manière suivante :



ou d'autres manières similaires (cf Remarque 2.17 ci-après).

- *le type R3* : glissement d'un brin au-dessus ou en-dessous d'un croisement, i.e. remplacement d'un disque du plan par un autre de la manière suivante :



ou d'autres manières similaires (cf Remarque 2.17 ci-après).

On dira que deux diagrammes d'entrelacs sont *R-équivalents* si l'ont peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.

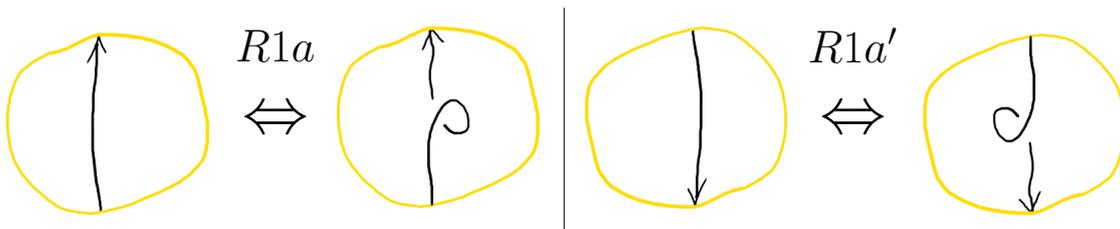
Remarque 2.17. Les "autres manières équivalentes" mentionnées dans la Définition 2.16 sont a priori nombreuses, particulièrement en travaillant avec des diagrammes orientés. Par souci de complétude, listons-les ci-après.

- Pour $R1$, il y a 8 configurations : en partant d'un brin vertical sans boucle, la boucle peut être ajoutée à droite ou à gauche, l'orientation du brin peut être vers le haut ou le bas, et le croisement créé peut être positif ou négatif.
- Pour $R2$, il y a 8 configurations : en partant de deux brins verticaux parallèles, le sens de parcours du brin de gauche peut être ascendant ou descendant, de même pour le brin de droite, et le brin passant par dessus l'autre peut être le gauche ou le droit.
- Pour $R3$, il y a 32 configurations : en partant d'une configuration triangulaire où la pointe est en haut et le brin glissant est l'horizontal, on peut choisir indépendamment des sens de parcours pour chacun des trois brins, le signe du croisement sur lequel le brin horizontal glisse, et enfin si le brin horizontal est au-dessus ou en-dessous des deux autres.

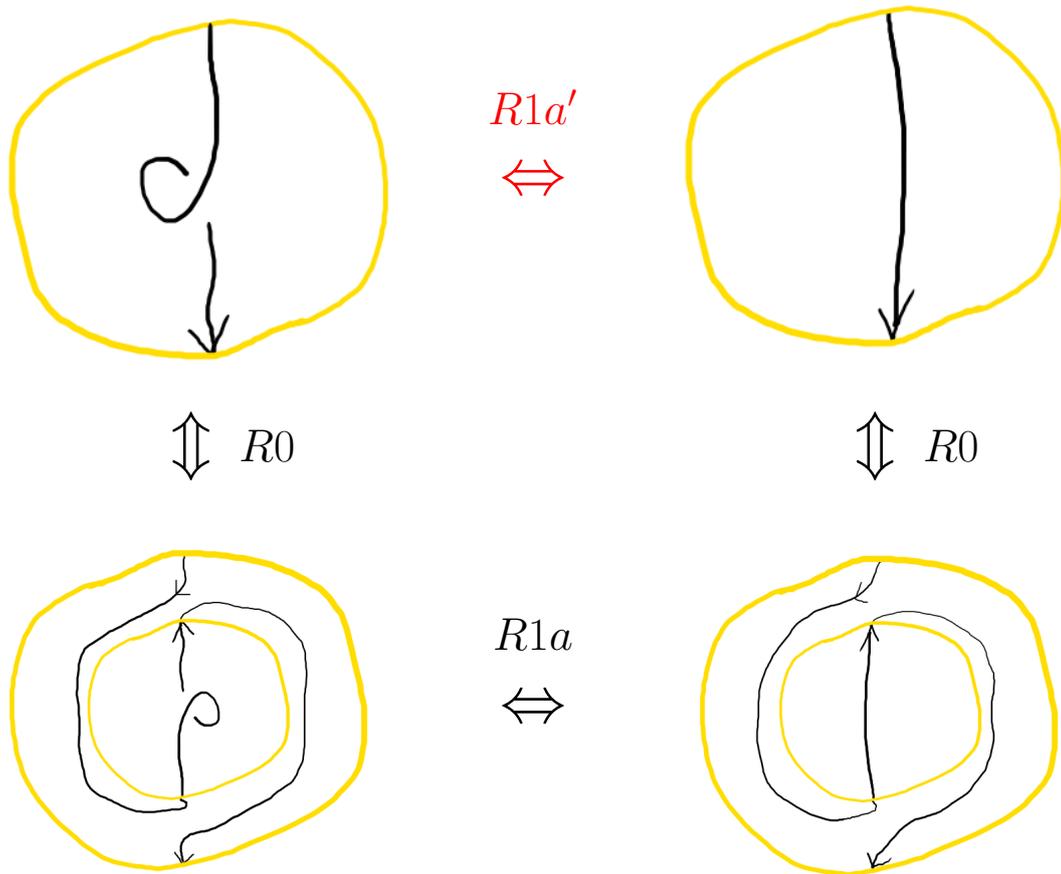
Si nous n'avons pas dessiné toutes ces configurations dans la Définition 2.16, ce n'est pas seulement pour ne pas faire fuir les lecteurs, mais aussi car, comme nous allons le voir bientôt, on peut se contenter de retenir et d'utiliser seulement une petite partie de ces nombreuses configurations.

Remarque 2.18. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on utilisera régulièrement l'abus de langage suivant : un mouvement de type Ri désignera plutôt la **composition** d'une isotopie planaire de type $R0$, du remplacement de disque décrit dans la Définition 2.16, et d'une autre isotopie planaire. En conséquence, on n'a plus besoin qu'un diagramme d'entrelacs ait un disque *exactement comme* dans la Définition 2.16 pour pouvoir appliquer un mouvement de type Ri . La compréhension intuitive des mouvements de Reidemeister ("on enlève une boucle" par exemple) coïncide maintenant rigoureusement avec le terme "mouvement de type Ri ".

Pour le mouvement de type $R1$, deux des 8 configurations mentionnées dans la Remarque 2.17 sont $R1a$ et $R1a'$ dessinées ci-après :



On peut maintenant voir dans la figure suivante que quitte à composer avec des isotopies planaires et changer de disque de restriction, les mouvements de type $R1a'$ et de type $R1a$ sont équivalents :



Exercice 2.19. (1) En vous aidant de dessins et en raisonnant comme ci-dessus, montrer qu'au sens de la Remarque 2.18, il n'existe qu'au plus 4 sortes différentes de mouvements de type $R1$, au plus 4 de type $R2$ et au plus 8 de type $R3$, tous étant dessinés respectivement dans les Figures 12, 13 et 14.

(2) Question plus ouverte : montrer que les 16 cas des Figures 12, 13 et 14 sont tous différents, i.e. qu'il n'en existe pas deux équivalents via composition par des isotopies planaires.

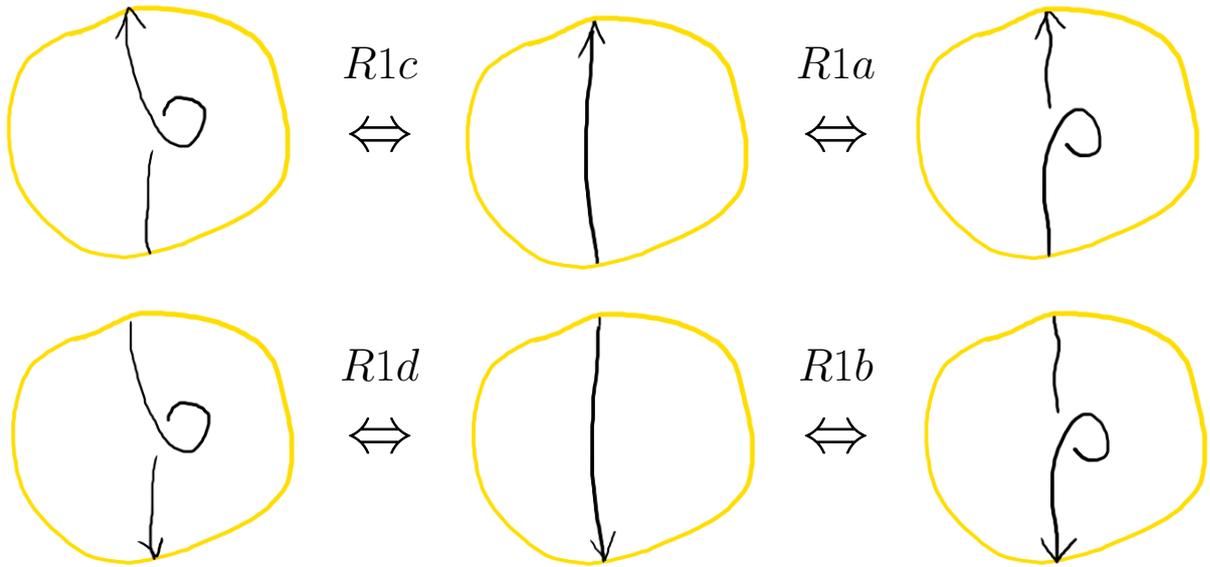
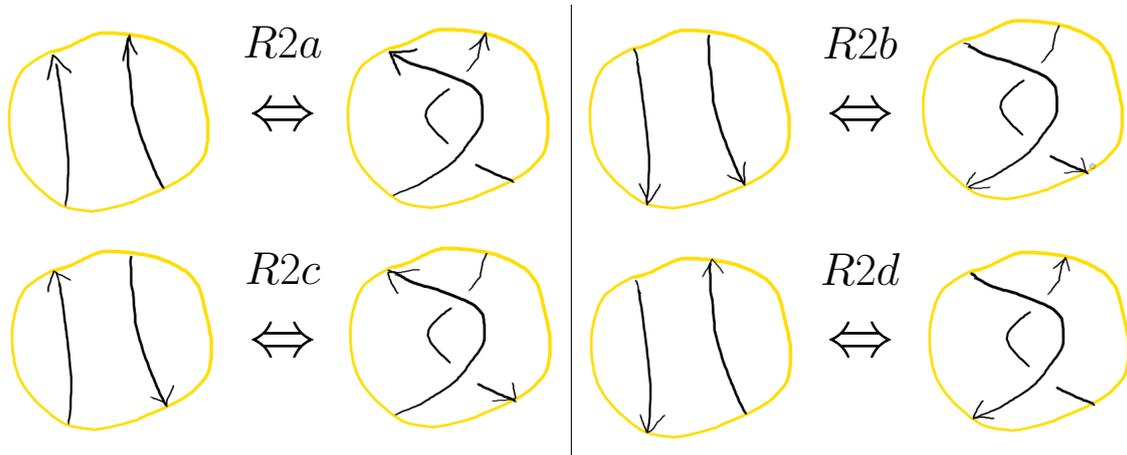
Théorème 2.20 (Reidemeister). Soient D, D' des diagrammes des entrelacs L, L' . Alors L et L' sont équivalents si et seulement si D et D' sont R -équivalents.

Corollaire 2.21. Soit une fonction F définie sur l'ensemble des diagrammes d'entrelacs. Supposons que pour tous diagrammes D, D' R -équivalents, on ait $F(D) = F(D')$.

Alors, en notant ψ une fonction qui envoie un entrelacs sur un de ses diagrammes, $F \circ \psi$ est un invariant d'entrelacs.

Il suit du Corollaire 2.21 que pour construire un invariant d'entrelacs, on peut se contenter de travailler sur les diagrammes planaires, à condition de vérifier l'invariance par les mouvements de Reidemeister.

Une difficulté apparaît alors. Rigoureusement, chacun des types $R1, R2, R3$ sur les diagrammes orientés englobe en fait plusieurs types de mouvements qui ne sont pas interchangeables (en tout cas, pas d'une manière qui saute aux yeux). Ces 16 mouvements aller-retour (ou 32 si on compte l'aller et le retour séparément) sont listés sur les Figures 12, 13 et 14. Pour prouver qu'une fonction F de diagrammes d'entrelacs est invariante par mouvements de Reidemeister, il faudrait donc montrer qu'elle est invariante par isotopie planaire et par les 32 mouvements des Figures 12, 13 et 14, ce qui peut sembler peu attrayant.

FIGURE 12. Les 4 mouvements de type $R1$ (à $R0$ près)FIGURE 13. Les 4 mouvements de type $R2$ (à $R0$ près)

Heureusement, M. Polyak et P. Suwara [Po, Su] ont démontré qu'il suffit de vérifier l'invariance par isotopie planaire et seulement **quatre** mouvements aller-retour (donc huit mouvements en tout), car ces mouvements engendrent tous les autres. Ces quatre mouvements sont notés $R1a$, $R1b$, $R2a$ et $R3a$ et sont décrits sur la Figure 15.

Théorème 2.22 (Polyak-Suwara [Po, Su]). *Soit D, D' des diagrammes d'entrelacs orientés R -équivalents. Alors il existe une suite finie de mouvements de types $R0, R1a, R1b, R2a$ et $R3a$ qui permet de passer de D à D' .*

2.5. Tables et notations. La Figure 3 illustre beaucoup de notations et d'exemples caractéristiques qu'il est utile de connaître pour s'y retrouver dans les différentes tables et dénominations de la littérature (comme *Knot Atlas*, *Knotinfo*, *Linkinfo*, etc.). Le but de cette section est de définir et clarifier la plupart de ces notions, sans nécessairement en donner des définitions complètes et rigoureuses (celles-ci viendront dans les chapitres suivants).

Définition 2.23. Le nombre de croisements (*crossing number*) $c(L)$ d'un entrelacs L est le nombre minimum de croisements que peut avoir un diagramme de L , et c'est un invariant d'entrelacs.

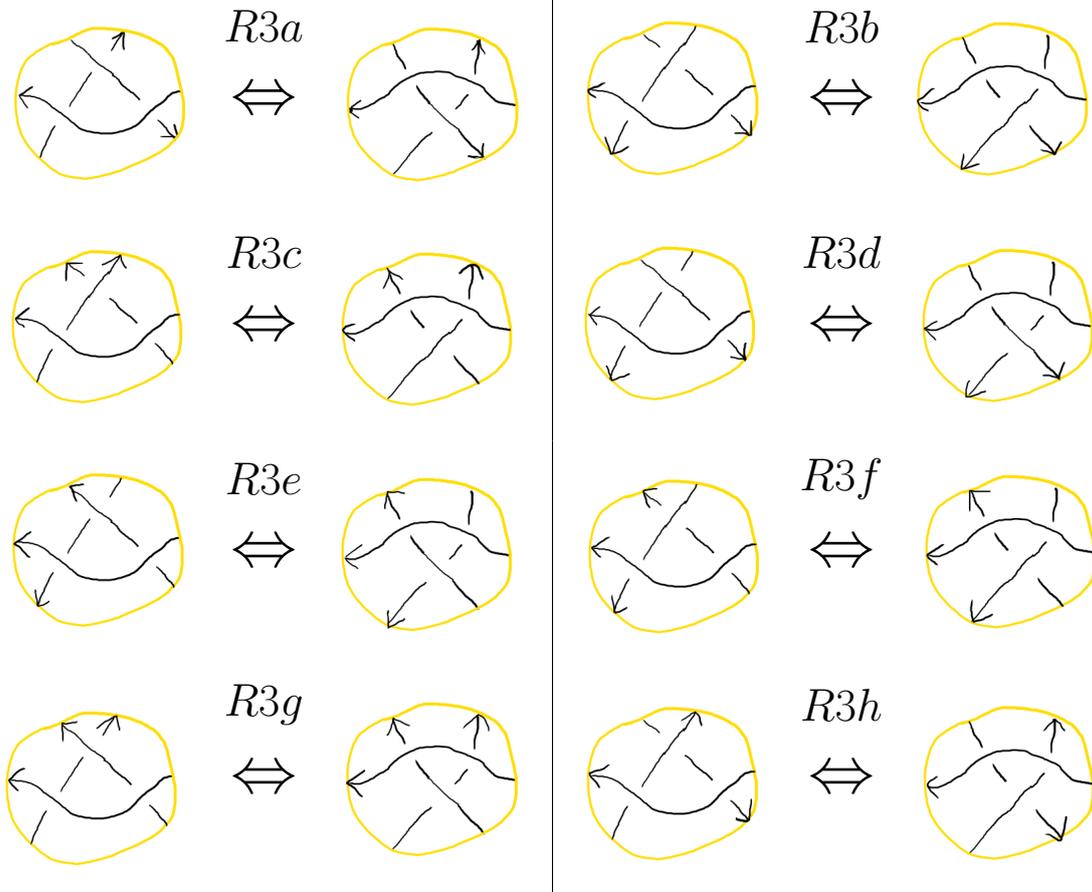
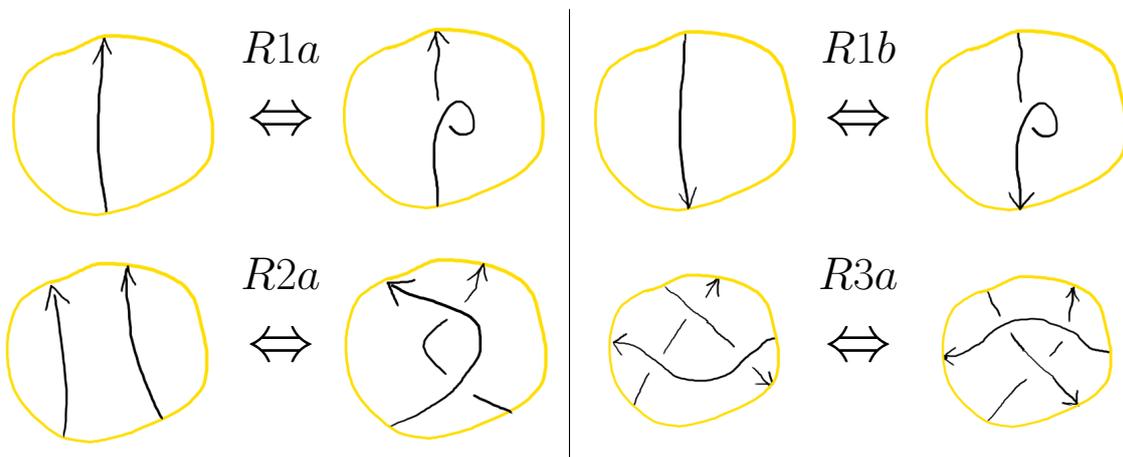
FIGURE 14. Les 8 mouvements de type $R3$ (à $R0$ près)

FIGURE 15. Une famille génératrice minimale de mouvements de Reidemeister

Il est aisé d'en trouver des bornes supérieures par l'exemple, mais difficile de le calculer exactement. Ce nombre est néanmoins le premier critère utilisé pour lister les entrelacs.

La *somme connexe* $J \sharp K$ des nœuds J, K est obtenue en retirant un segment à chacun et en connectant les courbes restantes en une seule composante connexe d'une manière cohérente avec les orientations (voir les exemples sur la Figure 3). On peut se convaincre qu'à équivalence près, $J \sharp K$ ne dépend pas des endroits précis de J et K où ces coupures et recollements sont faits.

Un nœud est *composé* s'il est égal à la somme connexe de deux nœuds non triviaux, et *premier* sinon. On peut démontrer que la décomposition d'un nœud en facteurs premiers

(non triviaux) est unique à l'ordre près. Ainsi, "il suffit" de classifier et nommer les nœuds premiers.

Les notions de somme connexe et de primalité s'appliquent également aux entrelacs, mais on doit alors spécifier sur quelle composante de chaque entrelacs a lieu le recollement, ce qui complexifie également les notations.

Un nœud premier sera noté k_d s'il est le d -ème nœud premier de nombre de croisements k . Les critères pour ordonner les nœuds premiers ayant le même nombre de croisements sont plus obscurs.

Définition 2.24. Un entrelacs est *alterné* s'il admet un *diagramme alterné*, i.e. un diagramme où en suivant n'importe quelle composante on passe les croisements successifs par dessus et par dessous en alternance.

Pour $k = 11, 12$, on rajoute un **a** ou un **n** en indice, comme 11_{n74} , pour préciser si le nœud est **alterné** ou **non**.

Pour les entrelacs de deux composantes ou plus, on utilise la notation $L k a d$ ou $L k n d$ de *Linkinfo*, où k, d, a, n ont le même sens que pour les nœuds.

Pour les entrelacs à deux composantes, un $\{0\}$ ou $\{1\}$ à la fin de la notation traduit un changement d'orientation d'une des composantes mais pas de l'autre (pour les nœuds on peut se contenter d'ajouter le signe $-$ avant le nom, cf Définition 2.8). Pour un entrelacs à μ composantes, il y aura $\mu - 1$ valeurs 0 ou 1 entre les accolades, avec une signification similaire.

L'*image miroir* d'un entrelacs L est notée L^* et est l'image de L par une réflexion planaire de \mathbb{R}^3 (à équivalence d'entrelacs près, peu importe la réflexion choisie). Sur un diagramme d'entrelacs, prendre l'image miroir revient à remplacer tous les croisements positifs par des négatifs et vice-versa.

Définition 2.25. L'*union disjointe* $L \sqcup L'$ des entrelacs L et L' est obtenu de la manière suivante : prenons des représentants de $[L]$ et $[L']$ inclus respectivement dans deux boules \mathbb{B}^3 disjointes dans \mathbb{S}^3 ; $L \sqcup L'$ est alors l'union disjointe (au sens ensembliste) de ces deux représentants. Un entrelacs L est *scindé* (*split*) s'il s'écrit comme une union disjointe de deux entrelacs. En général on préfère travailler avec des entrelacs non-scindés.

2.6. Nombre et matrice d'enlacement d'un entrelacs. Pour c un croisement d'un diagramme d'entrelacs D , on dira que son *signe* $\epsilon(c)$ est égal à 1 si c est positif (voir Figure 10) et -1 si c est négatif.

Voyons maintenant un premier invariant d'entrelacs qu'on peut définir à partir de diagrammes, le *nombre d'enlacement*.

Proposition 2.26. Soit $L = L_1 \cup L_2$ un entrelacs et D un diagramme de L . Alors la quantité

$$\text{lk}(L) = \text{lk}(L_1, L_2) = \text{lk}(D) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c \text{ croisement de } D \\ \text{entre } L_1 \text{ et } L_2}} \epsilon(c)$$

est un nombre entier, ne dépend pas du choix de D , et est appelée le *nombre d'enlacement* (*linking number*) de L . Le nombre d'enlacement est un invariant d'entrelacs.

Démonstration. On va démontrer que $\text{lk}(D)$ est inchangé par les mouvements de Reidemeister. Le fait que $\text{lk}(D)$ est entier sera laissé en exercice ci-après. Par le Théorème 2.22, on peut se restreindre à prouver l'invariance par les mouvements de types $R0$, $R1a$, $R1b$, $R2a$ et $R3a$.

Type $R0$: Une isotopie planaire ne change pas la nature des croisements, leur signe ou quelles composantes de L ils impliquent. Ainsi $\text{lk}(D)$ est inchangé.

Types R1a et R1b : Ces mouvements ajoutent ou retirent un croisement entre une composante et elle-même, qui n'est donc pas pris en compte dans le calcul de $\text{lk}(D)$. Ainsi, $\text{lk}(D)$ est inchangé.

Type R2a : Ce mouvement ajoute ou retire une paire de croisements de signes opposés. Ainsi, que ce mouvement mette en jeu deux brins venant de la même composante ou de deux composantes distinctes, $\text{lk}(D)$ restera inchangé.

Type R3a : Ce mouvement modifie le placement de trois croisements, mais pour chacun de ces trois croisements, ni le signe ni les composantes de L auxquelles appartiennent les deux brins ne sont modifiés. Ainsi $\text{lk}(D)$ est inchangé. \square

Remarque 2.27. La définition du nombre d'enlacement repose implicitement sur l'orientation choisie pour l'espace ambiant \mathbb{S}^3 , à savoir celle de la main droite. Si \mathbb{S}^3 est muni de l'orientation main gauche, alors le nombre d'enlacement est multiplié par (-1) .

Exercice 2.28. Soit $L = (L_1, L_2)$ un entrelacs à deux composantes de diagramme D et $L' := L_1 \sqcup L_2$.

(1) Montrer qu'il existe une famille de croisements de D entre L_1 et L_2 tels que si l'on inverse les signes de ces croisements, on obtient un diagramme D' de L' .

(2) Montrer que changer le signe d'un croisement ne change pas la parité de

$$\sum_{\substack{c \text{ croisement} \\ \text{entre } L_1 \text{ et } L_2}} \epsilon(c).$$

(3) Calculer le nombre d'enlacement de L' .

(4) Conclure que le nombre d'enlacement de L est entier.

Définition 2.29. Soit $L = (L_1, \dots, L_m)$ un entrelacs à $m \geq 2$ composantes. Sa matrice d'enlacement est notée $\text{Lk}(L) \in M_{m,m}(\mathbb{Z})$ et est la matrice symétrique de diagonale nulle et de coefficient $\text{Lk}(L)_{i,j}$ égal à $\text{lk}(L_i, L_j)$.

Il est immédiat que la matrice d'enlacement est aussi un invariant d'entrelacs.

Exercice 2.30. Calculer les matrices d'enlacement des entrelacs de la Figure 3.

2.7. Morceaux choisis de l'histoire de la théorie des nœuds. (La plupart des faits racontés dans cette section sont consultables avec plus de détails sur les pages *Wikipedia* correspondantes, et nous vous encourageons à y jeter un oeil.)

Bien que l'humanité ait noué des ficelles depuis longtemps, on date le début de la théorie des nœuds en tant que théorie scientifique à la deuxième moitié du 19e siècle, sur l'impulsion du physicien William Thomson (Lord Kelvin).

Ce dernier proposa en effet dans les années 1860 une nouvelle théorie *physique* : les atomes seraient des nœuds ou des entrelacs formés par des tourbillons dans l'*éther* (une substance sous-jacente à notre univers), à l'image d'anneaux de fumée. Le physicien Peter Guthrie Tait expérimentait sur de tels anneaux de fumée, et travailla avec Kelvin sur les premières tables de nœuds, similaires à celles qu'on connaît de nos jours.

La théorie de Kelvin fut ensuite abandonnée à la suite de l'expérience de Michelson-Morley dans les années 1880 qui mettait en doute l'existence de l'éther. Cependant, le travail purement *mathématique* de classification des nœuds entamé par Tait fut repris dès le début du 20e siècle par des mathématiciens, comme une nouvelle partie de la *topologie*.

Cette première page de l'histoire de la théorie des nœuds met déjà en évidence l'imprévisibilité et l'interconnectivité de la science : une étape intermédiaire d'une théorie physique sans succès mène au développement d'une théorie mathématique majeure, qui elle-même aura des applications extraordinaires dans d'autres sciences. Mais n'anticipons pas.

Les fondements de la théorie (mathématique) des nœuds sont dûs à des topologues du début du 20e siècle comme Max Dehn, J. W. Alexander et Kurt Reidemeister (des noms

que nous retrouverons souvent dans ce cours). Les outils utilisés provenaient principalement de la *topologie algébrique*, comme les groupes d'homotopie ou d'homologie.

Dans les années 1970, William Thurston établit de profonds liens entre la théorie des nœuds et la géométrie des variétés de dimension 3, notamment la *géométrie hyperbolique*.

Les années 1980 virent ensuite la naissance de la *topologie quantique*, à la suite de la découverte par Vaughn Jones du polynôme portant son nom en 1984, que le physicien Edward Witten interpréta dans une théorie de physique quantique. Comme un siècle auparavant, une théorie physique (la théorie quantique des champs) inspira alors de nouveaux objets mathématiques, les *invariants quantiques*. De tels objets sont les invariants de (Witten-)Reshetikhin-Turaev et les invariants de Turaev-Viro, et plus généralement des *théories des champs quantiques topologiques* (ou *TQFT* en anglais).

Plus étonnant encore, la physique n'est pas la seule autre science avec laquelle la théorie des nœuds a interagi. Dans les années 1990, la biologie moléculaire bénéficia des outils mathématiques tels que les enchevêtrements, via les travaux de Claus Ernst et De Witt L. Sumners. Ces derniers identifièrent comment agissait une certaine enzyme (une *topoisomérase*) sur la topologie de la double hélice de la molécule d'ADN, en identifiant les entrelacs avant et après l'action de l'enzyme. Les topoisomérases ont eu depuis des applications en biologie moléculaire et en médecine, notamment pour traiter certains cancers.

Difficile maintenant de dire ce que le futur apportera à la théorie des nœuds. Qui sait, peut-être que suivre ce cours vous donnera envie de rejoindre l'aventure...

2.8. Solutions des exercices.

5 exercices : 2.2, 2.7, 2.19, 2.28 et 2.30.

Exercice 2.2 :

(1) Montrer que \mathbb{B}^3 et \mathbb{R}^3 sont homotopiquement équivalents mais pas homéomorphes.

(2) Montrer que \mathbb{B}^3 et \mathbb{S}^3 ne sont pas homotopiquement équivalents.

(1) Les espaces \mathbb{B}^3 et \mathbb{R}^3 sont contractibles, donc homotopiquement équivalents à un point, donc sont homotopiquement équivalents. En revanche, \mathbb{B}^3 est une boule fermée donc est compacte, alors que \mathbb{R}^3 n'est pas compact, donc \mathbb{B}^3 et \mathbb{R}^3 ne sont pas homéomorphes.

(2) Il suffit de montrer que \mathbb{S}^3 n'est pas contractible. Pour cela, on remarque que son troisième groupe d'homologie $H_3(\mathbb{S}^3, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est non nul. D'où le résultat.

Exercice 2.7 : Prenons J le nœud trivial donné par un cercle unité orienté, et K le cercle muni de l'orientation inverse.

(1) Montrez qu'il existe une isométrie de \mathbb{R}^3 respectant l'orientation et envoyant J sur K (on pourra utiliser des rotations et translations).

(2) En déduire que J et K sont équivalents.

(1) Soit C le cercle unité en question, sans orientation. Soit P le plan où vit C , et D une droite de P passant par le centre de C . Soit $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotation d'axe D et d'angle π . Cette rotation r laisse P et C globalement invariants, mais si on munit C d'une orientation, r l'envoie sur le même cercle avec l'orientation inverse. En tant que rotation, r est bien une isométrie de \mathbb{R}^3 respectant l'orientation de \mathbb{R}^3 , qui envoie de plus J sur K et vice-versa.

(2) Dans la veine du (1), on peut construire une isotopie ambiante dans \mathbb{R}^3 de J à K , en prenant simplement la rotation d'axe D et d'angle $t\pi$ à chaque temps t (c'est bien un difféomorphisme à chaque temps et globalement).

Cependant, il n'est pas évident pourquoi l'extension de cette isotopie ambiante à \mathbb{S}^3 (en envoyant bien sûr ∞ sur ∞) est lisse.

Pour démontrer rigoureusement l'équivalence de J et K dans \mathbb{S}^3 , on peut appliquer le raisonnement précédent sur un voisinage borné du cercle, laisser agir l'identité dans

un voisinage de l'infini, et interpoler de manière lisse dans le reste de \mathbb{S}^3 . Soit ainsi une fonction d'interpolation $\phi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ lisse, décroissante, constante égale à 1 sur $[0, 2]$ et nulle sur $[3, \infty]$. Pour simplifier, posons les coordonnées de \mathbb{R}^3 de façon à ce que C soit le cercle unité de $x0z$ et D la droite verticale $0z$. Soit $F: [0, 1] \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $F(t, \cdot)$ est la rotation d'axe D et d'angle

$$\theta_{t,x,y,z} := \phi(x^2 + y^2)\phi(z^2)t\pi,$$

dans le sens que $F(t, \infty) = \infty$ et

$$F\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{t,x,y,z}) & -\sin(\theta_{t,x,y,z}) & 0 \\ \sin(\theta_{t,x,y,z}) & \cos(\theta_{t,x,y,z}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Soit G définie comme F mais avec $-\theta_{t,x,y,z}$ au lieu de $\theta_{t,x,y,z}$. Alors il est clair que $F(t, \cdot)$ et $G(t, \cdot)$ sont inverses l'une de l'autre.

D'autre part, montrons que $F(t, \cdot)$ et $G(t, \cdot)$ sont toutes lisses et respectent l'orientation. Sur le voisinage ouvert V de ∞ composé des (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 > 3$ ou $z^2 > 3$, elles agissent comme l'identité (qui est lisse et respecte l'orientation). D'autre part, sur un voisinage borné ouvert U de 0 tel que $U \cup V = \mathbb{S}^3$, $F(t, \cdot)$ et $G(t, \cdot)$ sont lisses par composition et produit de fonctions lisses, et respectent l'orientation similairement aux rotations.

Enfin, F est lisse par une décomposition en cartes et des arguments similaires à ceux du paragraphe précédent.

Exercice 2.19

- (1) En vous aidant de dessins et en raisonnant comme ci-dessus, montrer qu'au sens de la Remarque 2.18, il n'existe qu'au plus 4 sortes différentes de mouvements de type $R1$, au plus 4 de type $R2$ et au plus 8 de type $R3$, tous étant dessinés respectivement dans les Figures 12, 13 et 14.
- (2) Question plus ouverte : montrer que les 16 cas des Figures 12, 13 et 14 sont tous différents, i.e. qu'il n'en existe pas deux équivalents via composition par des isotopies planaires.

(1) Les 4 autres mouvements de type $R1$ pas sur la Figure 12 (avec la boucle à gauche) sont obtenus via le même type d'isotopie planaire que pour $R1a'$, à savoir une interpolation avec un demi-tour.

Pour le type $R2$, les 4 mouvements pas sur la Figure 13 ont tous le brin de droite passant au-dessus et non le gauche, et sont obtenus encore une fois par un tel demi-tour.

Pour le type $R3$, commençons par remarquer que les 8 mouvements de la Figure 14 réunissent tous les cas où le brin horizontal passe au-dessus du croisement et est orienté de droite à gauche (4 possibilités pour les orientations des deux autres brins et 2 pour le signe du croisement entre eux).

Considérons une configuration où le brin horizontal passe toujours au-dessus du croisement, mais est orienté vers la droite. Alors via un demi-tour et un échange des deux côtés de l'équivalence, on retombe sur un des 8 mouvements de la Figure 14.

Enfin, si l'on prend une des 16 configurations où le brin horizontal passe en-dessous du croisement, alors via une rotation de $\pm\frac{\pi}{3}$ et un échange des deux côtés de l'équivalence, on se ramène à un cas d'un des deux paragraphes précédents.

(2) Pour le type $R1$, le signe du croisement de la boucle distingue $R1a$ et $R1b$ (positif) de $R1c$ et $R1d$ (négatif), car ce signe ne change pas par isotopie planaire. On distingue $R1a$ de $R1b$ en considérant si le lacet de la boucle commence ou finit par un passage au-dessus, et on distingue similairement $R1c$ de $R1d$.

Pour le type $R2$, regardons les disques avec 2 croisements. Une isotopie planaire ne change pas le nombre de brins orientés partant de chaque croisement pour arriver à

l'autre, ce qui distingue $R2a$ et $R2b$ (deux départs du même croisement) de $R2c$ et $R2d$ (un départ de chaque croisement). D'autre part, les signes des croisements rencontrés dans l'ordre en suivant les orientations des brins (ordre de signes qui ne change pas par isotopie planaire) sont différents pour $R2a$ (positif puis négatif) et pour $R2b$ (négatif puis positif). Un argument similaire sur le brin du dessus distingue $R2c$ et $R2d$.

Pour le type $R3$, remarquons qu'une isotopie planaire sur une configuration triangulaire (à gauche ou à droite de l'équivalence) ne peut pas permuter les "altitudes" des brins (lequel passe au-dessus deux fois, etc.). Appelons-les donc les brins haut, médian et bas. D'autre part, une isotopie planaire ne peut pas changer le signe du croisement entre deux brins spécifiques. De plus, le mouvement $R3$ ne change pas non plus la nature des brins et les signes des croisements respectifs. Enfin, les 8 mouvements de la Figure 14 ont tous des triplets ordonnés de signes différents (ordonnés par exemple par le croisement haut-médian, puis le médian-bas, puis le haut-bas). D'où le résultat.

Exercice 2.28 : Soit $L = (L_1, L_2)$ un entrelacs à deux composantes de diagramme D et $L' := L_1 \sqcup L_2$.

- (1) *Montrer qu'il existe une famille de croisements de D entre L_1 et L_2 tels que si l'on inverse les signes de ces croisements, on obtient un diagramme D' de L' .*
- (2) *Montrer que changer le signe d'un croisement ne change pas la parité de*

$$\sum_{\substack{c \text{ croisement} \\ \text{entre } L_1 \text{ et } L_2}} \epsilon(c).$$

- (3) *Calculer le nombre d'enlacement de L' .*
- (4) *Conclure que le nombre d'enlacement de L est entier.*

(1) Intervertissons des croisements mixtes de D de façon à ce que le brin de L_1 passe toujours au-dessus de celui de L_2 , et appelons D' le diagramme obtenu. Alors on peut construire un entrelacs à partir de D' en suivant la méthode du cours, mais en envoyant la partie de D' correspondant à L_1 sur des altitudes 1 à $1 - \epsilon$ (autour des croisements internes à L_1) et l'autre sur des altitudes 0 à $-\epsilon$ comme d'habitude. ainsi on obtient un entrelacs scindé (pour $\epsilon < \frac{1}{2}$) qui est bien équivalent à L' .

(2) Changer un signe ajoute ou retranche 2 à la somme, donc ne change pas sa parité.

(3) Comme L' est scindé, il admet un diagramme sans croisements entre ses deux composantes, donc $\text{lk}(L') = 0$.

(4) Il suit du (3) que la somme du (2) est nulle pour le diagramme D' , donc elle est paire. Par le (2), elle reste paire en changeant des signes de D' . Il découle donc du (1) que cette somme est paire pour D , donc que sa moitié est un nombre entier.

Exercice 2.30 : Calculer les matrices d'enlacement des entrelacs de la Figure 3.

$\text{lk}(0_1 \sqcup 0_1) = 0$, $\text{lk}(H_-) = -1$, $\text{lk}(H_+) = 1$, $\text{lk}(L4a1\{1\}) = 2$, $\text{lk}(W) = 0$, et $\text{Lk}(B)$ est la matrice nulle de taille 3 .

3. LA PREMIÈRE DÉFINITION D'ALEXANDER

Dans ce chapitre nous présenterons la première définition du polynôme d'Alexander, due au mathématicien du même nom et publiée dans [Al]. Nous nous appuierons également sur [Lo]. Cette définition peut sembler *ad hoc* à première vue, mais est une des plus pratiques pour calculer le polynôme d'Alexander pour un nœud quelconque donné.

3.1. La définition. Considérons un diagramme de nœud D orienté, à n croisements.

Exercice 3.1. *Montrer que D délimite le plan en $n + 2$ régions homéomorphes à des disques. On pourra utiliser la caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathbb{S}^2 .*

Dénotons pour la suite de ce chapitre c_1, \dots, c_n les croisements de D , et R_0, \dots, R_{n+1} les régions délimitées par D , avec R_0 la région non bornée. On construit alors une matrice $A \in M_{n, n+2}(\mathbb{Z}[t])$ de la manière suivante : chaque ligne de A correspond à un croisement c_i , chaque colonne à une région R_j , et le coefficient $(i, j + 1)$ de A vaut

- 0 si R_j ne touche pas c_i ,
- $-t$ si R_j est la région à **gauche** du brin de **dessous, avant** qu'il n'arrive à c_i ,
- 1 si R_j est la région à **droite** du brin de **dessous, avant** qu'il n'arrive à c_i ,
- t si R_j est la région à **gauche** du brin de **dessous, après** qu'il n'arrive à c_i ,
- -1 si R_j est la région à **droite** du brin de **dessous, après** qu'il n'arrive à c_i ,
- la somme de deux termes précédents si leurs deux cas se produisent à la fois.

Ces conventions sont résumées sur la Figure 16. Remarquons que le signe du croisement n'est pas important ici.

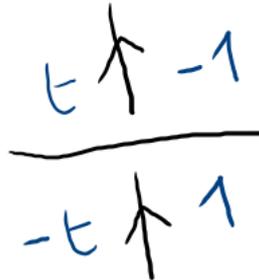


FIGURE 16. Coefficients autour d'un croisement

Définition 3.2 (Définition A, [Al]). Soit K un nœud orienté. Soit D un diagramme de K . Soit n le nombre de croisements de D .

Soit A la matrice de $M_{n, n+2}(\mathbb{Z}[t])$ définie ci-dessus, et $A' \in M_{n, n}(\mathbb{Z}[t])$ une sous-matrice de A obtenue en retirant deux colonnes de A correspondant à des régions de D adjacentes.

Alors le *polyôme d'Alexander* de K est noté $\Delta_K(t)$ et est défini comme la classe d'équivalence du déterminant de A' à multiplication par un inversible de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ près :

$$\Delta_K(t) := [\det(A')] \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / \{\pm t^{\mathbb{Z}}\}.$$

Remarquons qu'avec la Définition 3.2, $\Delta_K(t)$ n'a pas de termes de degré strictement négatif, mais pour plusieurs définitions suivantes, il sera naturel de considérer cette possibilité ; c'est pourquoi nous mentionnons $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] / \{\pm t^{\mathbb{Z}}\}$ comme l'ensemble où vit $\Delta_K(t)$ dès maintenant.

Pour deux polynômes de Laurent $P, Q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, on notera $P \doteq Q$ s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $P(t) = \pm t^m Q(t)$. En manipulant des polynômes d'Alexander, on utilisera souvent l'abus de langage consistant à identifier la \doteq -classe d'équivalence à un de ses représentants, et on utilisera $=$ ou \doteq selon le contexte.

Exemple 3.3. Pour $K = U$ le nœud trivial, le diagramme le plus simple a 0 croisements et 2 régions, ce qui implique que A' est la matrice vide, de déterminant 1 par convention.

On peut ne pas être complètement à l'aise avec le raisonnement précédent, et c'est un cas de figure qui arrivera quelquefois avec l'exemple du nœud trivial. Pour se rassurer, on peut prendre un autre diagramme de U , en symbole "infini", comme sur la Figure 17.

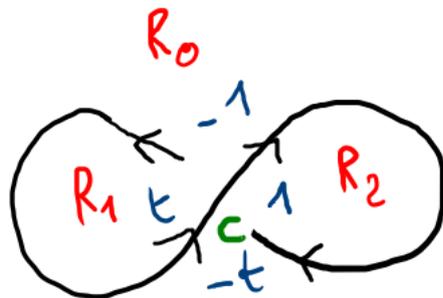


FIGURE 17. L'exemple du nœud trivial

Ce diagramme a un seul croisement c et trois régions R_0, R_1, R_2 , et la matrice A est $A =_c \begin{matrix} & R_0 & R_1 & R_2 \\ \begin{bmatrix} -1 & -t & t & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$. Ainsi, en retirant la paire de colonnes correspondant à R_0, R_1 (resp. à R_0, R_2), on trouve encore $\Delta_U = 1$ (resp. $\Delta_U = t$, ce qui est la même chose à multiplication par $\pm t^{\mathbb{Z}}$ près).

En revanche, retirer les colonnes des régions R_1, R_2 , qui ne sont pas adjacentes, donnerait un polynôme $-t - 1$, non équivalent à 1.

Exemple 3.4. Pour $K = 3_1$ le nœud de trèfle droit, prenons le diagramme orienté D de la Figure 18.

La matrice A est donc :

$$A = \begin{matrix} & R_0 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} t & -t & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & -t & -1 & 1 \\ t & -1 & 0 & -t & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Si l'on retire les deux premières colonnes (qui correspondent bien à deux régions adjacentes R_0 et R_1), on calcule donc

$$\Delta_K(t) = \det(A') = 1 - t + t^2.$$

Le théorème suivant établit que la Définition 3.2 donne bien un invariant de nœuds. Nous le démontrerons dans le reste de ce chapitre.

Théorème 3.5. [Al] *L'objet $\Delta_K(t)$ de la Définition 3.2 est bien défini et ne dépend ni du choix du diagramme D , ni de l'ordre choisi sur les croisements ou les régions, ni de la paire de colonnes retirée.*

Pour se convaincre de la véracité du Théorème 3.5, on pourra essayer de modifier des choix à partir des Exemples 3.3 ou 3.4.

Plus loin dans le cours, à l'aide d'autres définitions que la Définition 3.2, on démontrera que le polynôme d'Alexander est toujours (à \doteq près) :

- inchangé en remplaçant un nœud par son image miroir,
- inchangé en remplaçant un nœud par son inverse,
- inchangé en remplaçant t par $\frac{1}{t}$, i.e. ses coefficients sont symétriques.

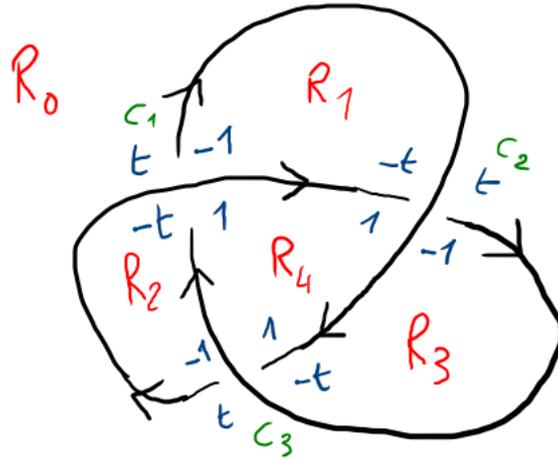


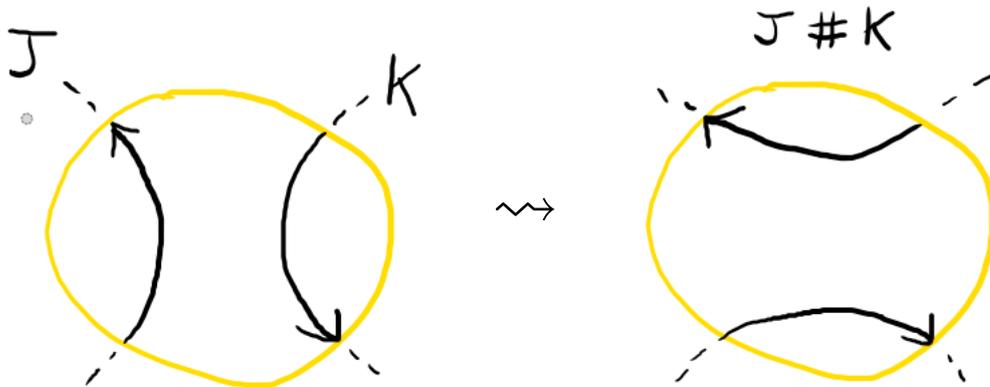
FIGURE 18. L'exemple du trèfle droit

Pour l'heure, on peut démontrer le résultat partiel suivant :

Proposition 3.6. Soit K un nœud et $-K$ son inverse. Alors $\Delta_{-K}(t) \doteq \Delta_K\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 3.7. Démontrer la Proposition 3.6.

3.2. **Somme connexe.** Formalisons la notion de somme connexe de deux nœuds, qui correspond à retirer un petit morceau à chacun et à les relier (sans nouage additionnel) en respectant les orientations.

FIGURE 19. Passer de l'union disjointe $J \sqcup K$ à la somme connexe $J \# K$

Définition 3.8. Soient J, K deux nœuds de \mathbb{S}^3 . Considérons un diagramme D_{\sqcup} de leur union disjointe $J \sqcup K$ tel qu'il existe un disque du plan au voisinage duquel D_{\sqcup} est comme à la gauche de la Figure 19 (resp. ainsi mais avec les orientations opposées), i.e. le disque contient un brin sans croisements de J et un de K . Alors la *somme connexe* $J \# K$ de J et K (ou *produit*, ou *composition*) est le nœud correspondant au diagramme D obtenu depuis D_{\sqcup} en remplaçant le disque précédent par celui à droite de la Figure 19 (resp. le même mais avec les orientations opposées).

On admettra que le procédé précédent donne le même résultat peu importe le diagramme et le disque choisis.

Exemple 3.9. Le nœud carré $3_1 \sharp 3_1^*$ est la somme connexe des trèfles droit et gauche (voir Figure 3 ou ci-après).



Proposition 3.10. *La somme connexe \sharp des nœuds est commutative, associative et admet le nœud trivial U comme élément neutre.*

Elle donne donc une structure de monoïde commutatif à l'ensemble des classes d'équivalence de nœuds.

Démonstration. Les deux derniers points découlent immédiatement de la définition. La commutativité se visualise en trois dimensions en faisant glisser un des nœuds le long de l'autre. \square

Définition 3.11. Un nœud K est *composé* s'il existe J, J' non triviaux tels que $K = J \sharp J'$. Un nœud est *premier* s'il n'est pas composé et pas trivial.

Remarque 3.12. On verra plus loin que la décomposition d'un nœud non trivial en somme connexe de nœuds premiers (appelés *facteurs premiers*) existe toujours et est unique à permutation des facteurs premier près, par un théorème dû à H. Schubert.

En particulier, le monoïde des nœuds est *simplifiable* : pour tous nœuds J, J', K , on a :

$$J \sharp K = J' \sharp K \Rightarrow J = J'.$$

Cependant, aucun nœud non trivial n'admet un inverse pour \sharp . Le monoïde des nœuds n'est pas un groupe.

Proposition 3.13. *Le polynôme d'Alexander est multiplicatif pour la somme connexe des nœuds, i.e. pour tous nœuds J et K , on a*

$$\Delta_{J \sharp K}(t) \doteq \Delta_J(t) \cdot \Delta_K(t).$$

Exercice 3.14. *Prouver la Proposition 3.13. On pourra commencer par chercher, dans un diagramme de somme connexe, une paire de régions adjacentes particulièrement appropriée.*

3.3. Régions et colonnes. Pour le reste de cette section, soit D un diagramme de nœud, à n croisements notés c_1, \dots, c_n et $n + 2$ régions notées R_0, \dots, R_{n+1} . Supposons de plus que R_0 est la région non bornée du plan.

Une *famille d'indices* pour D est la donnée d'un entier $i(R)$ pour chacune des régions R de D (l'*indice* de R), de sorte que si deux régions sont adjacentes comme sur la Figure 20, alors leurs indices diffèrent de 1 comme sur la même Figure 20 (passer de droite à gauche d'un brin augmente l'indice de 1).

Une telle famille d'indices ne dépend que de la donnée d'un seul de ces indices (les autres étant automatiquement imposés en conséquence), et est bien définie (on peut s'en convaincre via le fait que le nombre d'intersection algébrique de deux courbes du plan est toujours nul). Ainsi on peut fixer arbitrairement que l'indice de R_0 est nul.

Exemple 3.15. Avec la convention $i(R_0) = 0$, on trouve

$$i(R_1) = 1, \quad i(R_2) = -1$$

sur la Figure 17, et

$$i(R_1) = i(R_2) = i(R_3) = -1, \quad i(R_4) = -2$$

sur la Figure 18.

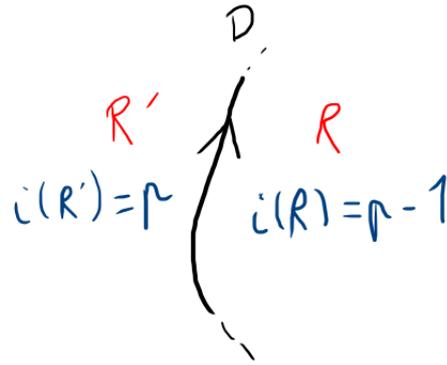


FIGURE 20. Deux indices de régions adjacentes sont consécutifs

La répartition des indices des quatre régions autour d'un croisement (ou trois dans de rares cas comme celui de la Figure 17) dépend du signe de ce croisement, comme on peut le voir sur la Figure 21.

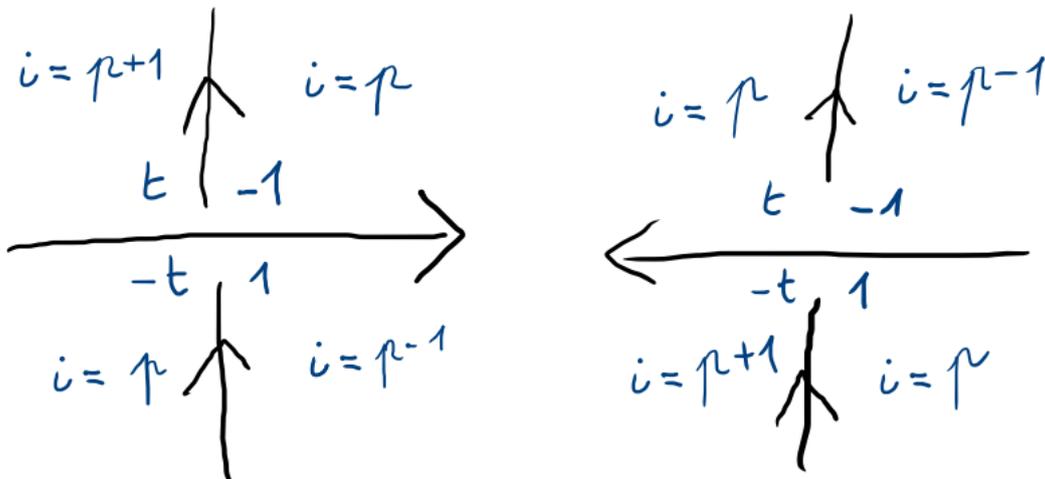


FIGURE 21. Indices autour d'un croisement

Nous allons étudier comment change le déterminant d'une sous-matrice $n \times n$ de A selon quelle paire de colonnes on retire à A (pas forcément des colonnes venant de régions adjacentes).

Proposition 3.16. Les vecteurs $C = \begin{matrix} R_0 \\ \vdots \\ R_{n+1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{matrix} R_0 \\ \vdots \\ R_{n+1} \end{matrix} \begin{bmatrix} t^{-i(R_0)} \\ \vdots \\ t^{-i(R_{n+1})} \end{bmatrix}$ vérifient $A \cdot C = 0 = A \cdot I$.

Démonstration. On vérifie les deux égalités pour chaque ligne de A , donc en regardant croisement par croisement. Selon la Figure 21, on a bien à chaque croisement

- $t + (-1) + (-t) + 1 = 0$,
- $t^{-(p+1)}t + t^{-p}(-1) + t^{-p}(-t) + t^{-(p-1)}1 = 0$ pour un croisement positif,
- $t^{-p}t + t^{-(p-1)}(-1) + t^{-(p+1)}(-t) + t^{-p}1 = 0$ pour un croisement négatif.

D'où le résultat. \square

Pour deux indices $j, k \in \{0, \dots, n+1\}$ différents, on notera $A_{j,k}$ ou $A_{k,j}$ la sous-matrice de A obtenue en retirant les j -ème et k -ème colonnes de A .

Proposition 3.17. *Pour tous $j, k, l, m \in \{0, \dots, n+1\}$ avec $j \neq k$ et $l \neq m$, on a*

$$\left(t^{i(R_j)-i(R_k)} - 1\right) \det(A_{l,m}) \doteq \left(t^{i(R_l)-i(R_m)} - 1\right) \det(A_{j,k}).$$

En particulier, $\det(A_{j,k}) = 0$ si $i(R_j) = i(R_k)$.

De plus, si on appelle K le nœud de diagramme D , alors on a :

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{t-1}{t^{i(R_j)-i(R_k)} - 1} \det(A_{j,k})$$

pour tous j, k tels que $i(R_j) \neq i(R_k)$.

Démonstration. On utilise les relations linéaires entre les colonnes données par la Proposition 3.16. Les détails sont donnés dans [Lo] et [Al] et seront admis. \square

On pourra vérifier la formule de la Proposition 3.17 avec les matrices des Exemples 3.3 et 3.4.

3.4. Preuve de l'invariance. Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le Théorème 3.5.

Démonstration du Théorème 3.5. Montrons que $\det(A')$ ne dépend pas des choix faits.

Soient R_j, R_k deux régions adjacentes de D telles que $A' = A_{j,k}$. Alors il suit de la Proposition 3.17 que $\det(A')$ ne dépend pas des indices j, k ainsi choisis (à \doteq près toujours).

D'autre part, toute permutation des croisements de D (si on les avait ordonnés d'une autre manière) se traduira en une permutation des lignes de A' , et multipliera donc $\det(A')$ par ± 1 .

De même, ordonner les régions de D différemment causera une permutation des colonnes de A , et ne changera pas $\det(A')$ à \doteq près.

Enfin, vérifions que $\det(A')$ reste inchangé si on modifie D par les mouvements de Reidemeister. On peut se restreindre aux mouvements $R0, R1a, R1b, R2a, R3a$ du Théorème 2.22.

Une isotopie planaire $R0$ ne change pas les configurations locales autour des croisements, donc ne change pas A ni $\det(A')$.

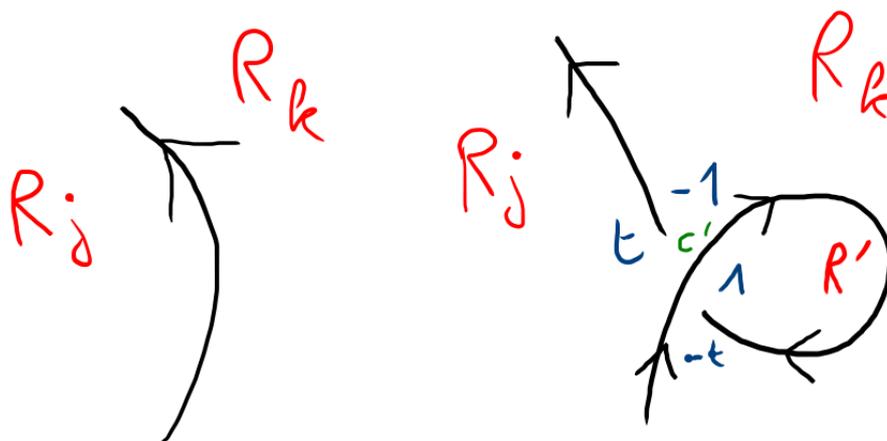
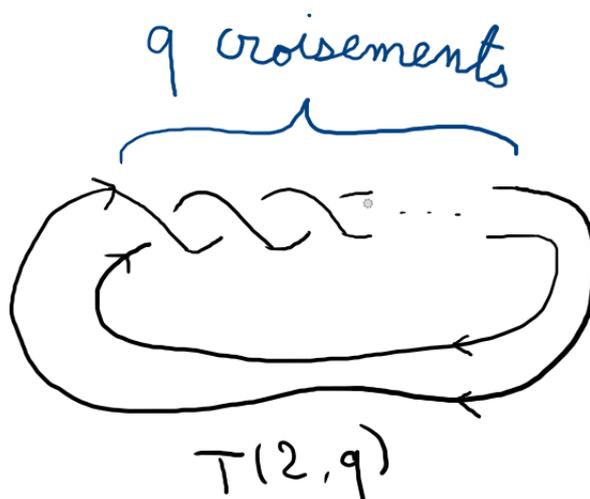
Montrons l'invariance par $R1a$. Soient R_j et R_k les deux régions adjacentes de D de part et d'autre du brin où on ajoute une boucle. La boucle crée un nouveau croisement c' et une nouvelle région R' , cf Figure 22. Appelons $A(D)$ la matrice A du diagramme D , D' le diagramme obtenu depuis D par ajout de la boucle, et $A(D')$ la matrice A de D' . Il suit de la Figure 22 que

$$A(D') =_{c'} \begin{bmatrix} & R_j & R_k & R' \\ A(D)_{j,k} & * & * & 0 \\ 0 & t & -t-1 & 1 \end{bmatrix},$$

donc $\det(A(D')_{j,k}) = \det(A(D)_{j,k})$.

Les invariances par $R1b, R2a$ et $R3a$ se démontrent similairement et sont laissées en exercice (Exercice 3.18 ci-après). \square

Exercice 3.18. Compléter la démonstration du Théorème 3.5 en montrant l'invariance par $R1b, R2a$ et $R3a$.

FIGURE 22. Invariance par $R1a$ FIGURE 23. Le nœud torique $T(2, q)$ (avec $q \geq 1$ impair)

3.5. **Noeuds toriques** $T(2, q)$. Soit $q \geq 1$ un entier impair. Le nœud torique $T(2, q)$ est défini par le diagramme de la Figure 23.

On définira plus loin des *entrelacs toriques* généraux $T(m, n)$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, dont le nombre de composantes est $\text{pgcd}(m, n)$.

Exemple 3.19. Les premiers nœuds de cette famille sont $T(2, 1) = U$, $T(2, 3) = 3_1$, $T(2, 5) = 5_1$, et $T(2, 7) = 7_1$. On peut consulter les suivants sur *Knotinfo* ou *Knot Atlas*.

Exercice 3.20. Pour tous les entiers $q \geq 1$ impairs, calculer le polynôme d'Alexander $\Delta_{T(2, q)}(t)$.

3.6. **Solutions des exercices.** 5 exercices : 3.1, 3.7, 3.14, 3.18, 3.20.

Exercice 3.1 : Montrer que D délimite le plan en $n + 2$ régions homéomorphes à des disques. On pourra utiliser la caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathbb{S}^2 .

Notons r le nombre de régions, et montrons que $r = n + 2$. Considérons D comme une immersion d'une union de cercles, donc chaque croisement est vu comme un point.

Le plan compactifié \mathbb{S}^2 admet donc une décomposition cellulaire en n points (un pour chaque croisement), b brins entre des points, et r régions homéomorphes à des disques

(point important). Le fait que toutes les régions sont contractiles est dû au fait que D n'est pas un diagramme d'entrelacs scindé (mais d'un nœud).

Quatre demi-brins partent de chaque croisement, donc $2b = 4n$, donc $b = 2n$.

D'autre part, la caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathbb{S}^2 est 2, donc $n - b + r = 2$, donc $r = 2 - n + 2n = n + 2$.

Exercice 3.7 : Démontrer la Proposition 3.6.

Soit K un nœud de diagramme D . Alors $-K$ a pour diagramme D' , obtenu depuis D en changeant le sens de parcours de tous les brins. Ainsi, la répartition des coefficients autour de chaque croisement change suivant la Figure 24.

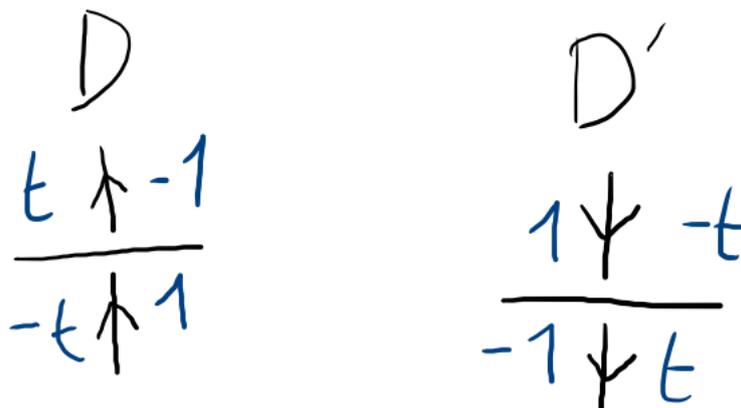


FIGURE 24. Coefficients autour d'un croisement

Ainsi, on remarque (ligne par ligne) que $\frac{1}{t}A(D')$ est égale à la matrice $A(D)$ où la variable t est remplacé par $\frac{1}{t}$.

Donc, en notant R_j, R_k deux régions adjacentes de D (ou D'), on a bien

$$\Delta_K \left(\frac{1}{t} \right) \doteq \det \left(\frac{1}{t} A(D')_{j,k} \right) \doteq \det (A(D')_{j,k}) \doteq \Delta_{-K}(t).$$

Exercice 3.14 : Prouver la Proposition 3.13. On pourra commencer par chercher, dans un diagramme de somme connexe, une paire de régions adjacentes particulièrement appropriée.

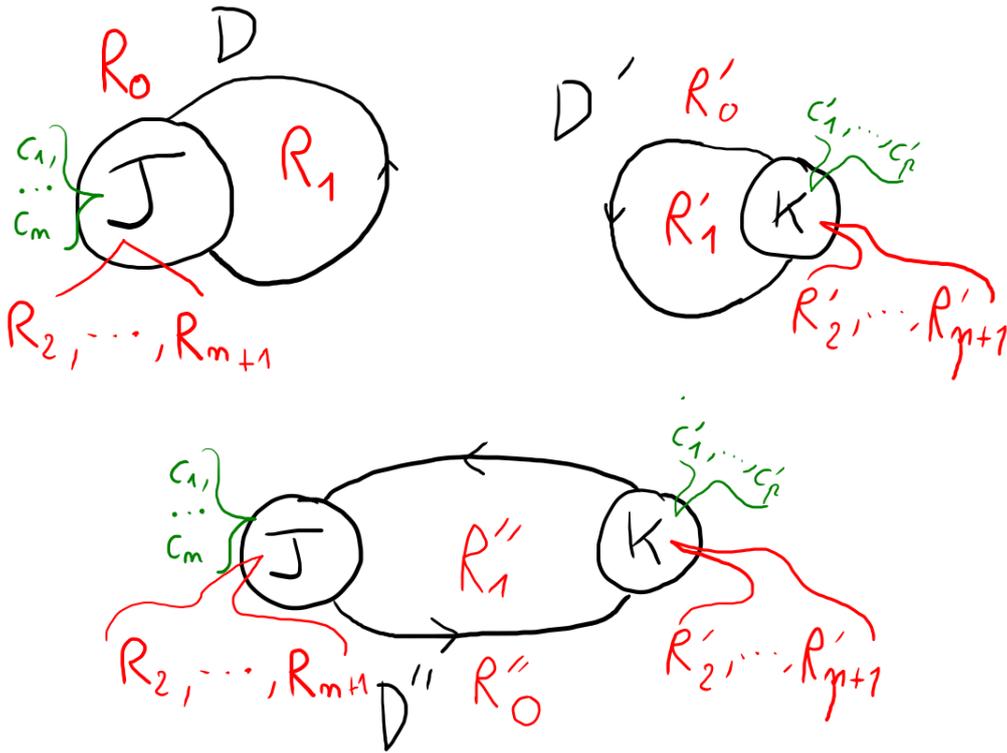
Soient J, K des nœuds de diagrammes D et D' de sorte que $J \sharp K$ ait un diagramme D'' obtenu depuis l'union disjointe de D et D' comme dans la Définition 3.8 (voir Figure 25). Notons $c_1, \dots, c_n, R_0, \dots, R_{n+1}$ les croisements et régions de D , et $c'_1, \dots, c'_p, R'_0, \dots, R'_{p+1}$ ceux de D' , comme sur la Figure 25. Alors D'' admet les croisements $c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_p$ et les régions $R''_0, R''_1, R_2, \dots, R_{n+1}, R'_2, \dots, R'_{p+1}$.

Alors la matrice $A(D'')_{R''_0, R''_1}$ construite avec la Définition A en retirant les colonnes des régions R''_0, R''_1 est la somme directe des matrices $A(D)_{0,1}$ et $A(D')_{0,1}$, donc son déterminant est le produit des leurs, d'où le résultat.

Exercice 3.18 : Compléter la démonstration du Théorème 3.5 en montrant l'invariance par R1b, R2a et R3a.

L'invariance par R1b se démontre exactement comme pour R1a, en laissant la colonne correspondant à la nouvelle région R' .

Pour R2a, on choisit les diagrammes, les croisements et les régions comme dans la Figure 26. On note c_l (avec un indice abstrait l) les croisements ne touchant pas la région

FIGURE 25. Diagrammes D, D', D'' des nœuds $J, K, J\#K$

R_k, c'_l ceux touchant R_k en haut des pointillés (ou touchant R'_k) et c''_l les autres. On note c' et c'' les nouveaux croisements.

Parmi les régions de noms différents sur la Figure 26, seules R'_k et R''_k ont même indice et peuvent potentiellement être connectées hors du disque considéré. Montrons cependant par l'absurde qu'elles sont bien distinctes.

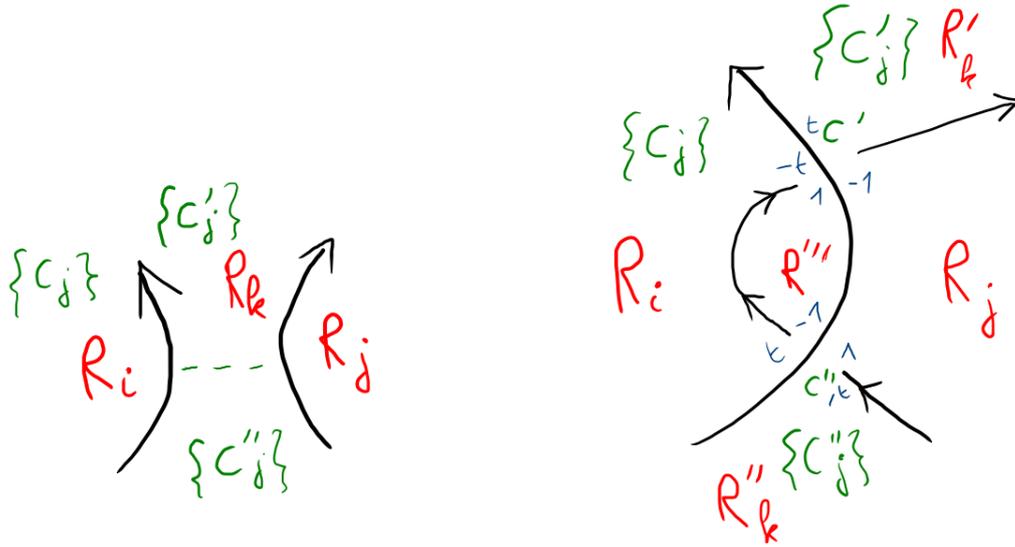
Supposons $R'_k = R''_k$. Alors il existe un chemin γ' entre elles en dehors du voisinage de D' de la Figure 26, auquel correspond un chemin γ immédiat sur le diagramme D connectant deux points de R_k de part et d'autre de la ligne horizontale verte pointillée. On peut alors connecter ces deux mêmes points par un chemin δ transverse à la ligne pointillée et entièrement inclus dans la Figure 26. L'union $C = \gamma \cup \delta$ est alors un cercle plongé dans le plan, qui n'intersecte pas D , et qui sépare deux parties non vides du diagramme D . Mais alors D n'est pas connexe, ce qui contredit le fait qu'il est un diagramme de *nœud*.

La matrice associée au diagramme D à gauche de la Figure 26 est

$$A(D) = \begin{matrix} & \{R_l\}_l & R_i & R_j & R_k \\ \{c_l\}_l & \begin{bmatrix} B & C & D & 0 \\ E & F & G & \star \\ H & I & J & \square \end{bmatrix} \\ \{c'_l\}_l & & & & \\ \{c''_l\}_l & & & & \end{matrix},$$

donc en retirant les colonnes des régions adjacentes R_j, R_k , on obtient le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ E & F \\ H & I \end{pmatrix}.$$

FIGURE 26. Invariance par $R2a$ (diagramme D à gauche, D' à droite)

D'autre part, la matrice associée au diagramme D' à droite de la Figure 26 est

$$A(D') = \begin{matrix} & \{R_l\}_l & R_i & R_j & R'_k & R''_k & R''' \\ \begin{matrix} \{c_l\}_l \\ \{c'_l\}_l \\ \{c''_l\}_l \\ c' \\ c'' \end{matrix} & \begin{bmatrix} B & C & D & 0 & 0 & 0 \\ E & F & G & \star & 0 & 0 \\ H & I & J & 0 & \square & 0 \\ 0 & -t & -1 & t & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 & -t & -1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

donc en retirant les colonnes des régions adjacentes R_j , R'_k , on obtient le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 \\ E & F & 0 & 0 \\ H & I & \square & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \\ 0 & t & -t & -1 \end{pmatrix}. \text{ Par opérations élémentaires, on calcule finalement :}$$

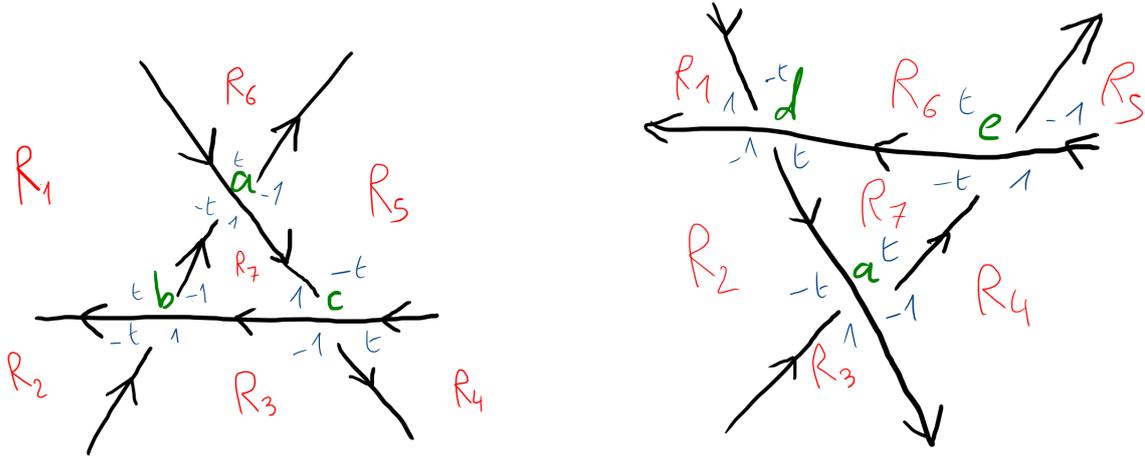
$$\det \begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 \\ E & F & 0 & 0 \\ H & I & \square & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \\ 0 & t & -t & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 \\ E & F & 0 & 0 \\ H & I & \square & 0 \\ 0 & -t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} B & C & 0 \\ E & F & 0 \\ H & I & \square \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = t \det \begin{pmatrix} B & C \\ E & F \\ H & I \end{pmatrix},$$

ce qui montre l'invariance (au sens \doteq).

Montrons l'invariance par $R3a$. On adopte les notations de la Figure 27.

Les matrices A et A' construites depuis les diagrammes D et D' de la Figure 27 sont :

$$A = \begin{matrix} & \{R_l\}_l & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & R_7 \\ \begin{matrix} \{c_l\} \\ a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} B & C & D & E & F & G & H & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & t & -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

FIGURE 27. Invariance par $R3a$ (diagramme D à gauche, D' à droite)

$$A' = \begin{matrix} \{c_i\} \\ a \\ d \\ e \end{matrix} \begin{matrix} \{R_l\}_l \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{matrix} \begin{bmatrix} B & C & D & E & F & G & H & 0 \\ 0 & -t & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & t & -t \end{bmatrix}.$$

Notons L_a, \dots (resp. L'_a, \dots) les lignes de A (resp. A'). Alors après les opérations élémentaires

$$\begin{aligned} L_a &\leftarrow L_a + L_b & L'_a &\leftarrow L'_a + L'_e \\ L_b &\leftarrow L_c + L_b & \text{resp. } L'_d &\leftarrow t(L'_d + L'_e) \\ L_c &\leftarrow L_b & L'_e &\leftarrow \frac{1}{t}L'_e \end{aligned}$$

les matrices A et A' deviennent toutes deux de la forme

$$\begin{pmatrix} B & C & D & E & F & G & H & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 & 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & t & -t & 0 & t & -t & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * & -1 \end{pmatrix},$$

donc leur retirer la même paire de colonnes R_1, R_2 et prendre le déterminant donnera le même polynôme à \doteq près (via développement par rapport à la dernière colonne R_7). D'où l'invariance.

Exercice 3.20 : Pour tous les entiers $q \geq 1$ impairs, calculer le polynôme d'Alexander $\Delta_{T(2,q)}(t)$.

On complète le diagramme de la Figure 23 comme à la Figure 28, et on trouve la matrice A suivante :

$$A = \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \end{matrix} \begin{matrix} R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_q & R_{q+1} \end{matrix} \begin{bmatrix} t & -t & -1 & \dots & 0 & 1 \\ t & 0 & -t & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t & -1 & 0 & \dots & -t & 1 \end{bmatrix}.$$

En retirant les colonnes R_0 (d'indice 0) et R_{q+1} (d'indice -2), la Proposition 3.17 implique :

$$\Delta_{T(2,q)}(t) \doteq \frac{t-1}{t^2-1} \det(A_{0,q+1}) = \frac{\det(A_{0,q+1})}{t+1}.$$

Or un développement par rapport à la colonne R_1 donne immédiatement

$$\det(A_{0,q+1}) = (-t)^q + (-1)^{q+1}(-1)(-1)^{q-1} = -t^q - 1.$$

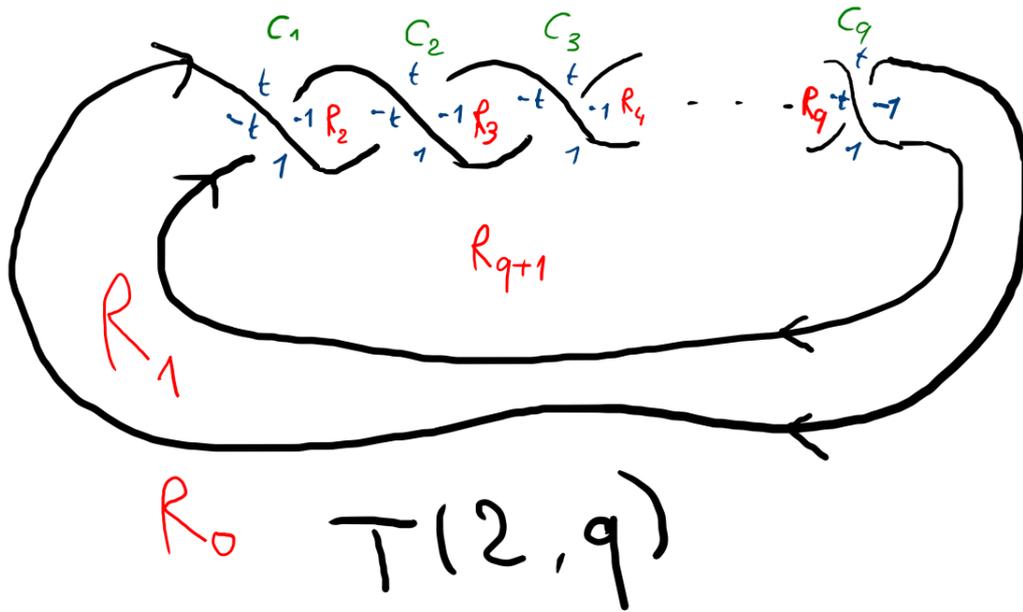


FIGURE 28. Calculer le polynôme d'Alexander du nœud torique $T(2, q)$

D'où $\Delta_{T(2,q)}(t) \doteq \frac{t^q + 1}{t + 1} = t^{q-1} - t^{q-2} + \dots + t^2 - t + 1.$

4. SURFACES DE SEIFERT

4.1. Préliminaires sur les CW-complexes.

Définition 4.1. Un *CW-complexe fini* X est un CW-complexe de dimension d pour un certain entier positif d , où ce dernier terme est défini par récurrence ainsi :

- Un *CW-complexe de dimension 0* X_0 est une union finie de r_0 points (les *0-cellules*), muni de la topologie discrète.
- Un *CW-complexe de dimension d* X_d est obtenu à partir d'un CW-complexe X_{d-1} de dimension $d - 1$ comme quotient de l'union disjointe de X_{d-1} avec un nombre fini r_d de boules fermées \mathbb{B}^d (les *d -cellules*) :

$$X_d = \left(X_{d-1} \sqcup \mathbb{B}_1^d \sqcup \dots \sqcup \mathbb{B}_{r_d}^d \right) / \sim$$

où l'image de chaque sphère de bord \mathbb{S}_j^{d-1} par l'application quotient est une union de cellules de X_{d-1} , et la topologie sur X_d est la topologie quotient.

L'union des j -cellules de X pour $0 \leq j \leq k$ est appelée le *k -squelette* de X .

On dit qu'un espace topologique Y admet une *décomposition en CW-complexe* (ou une *structure de CW-complexe*) s'il existe un CW-complexe fini X tel que Y est homéomorphe à X .

Remarquons qu'un CW-complexe fini est compact par construction.

On peut étendre la définition au cas d'un nombre infini de cellules ou sans borner la dimension, mais ce ne sera pas utile dans l'immédiat.

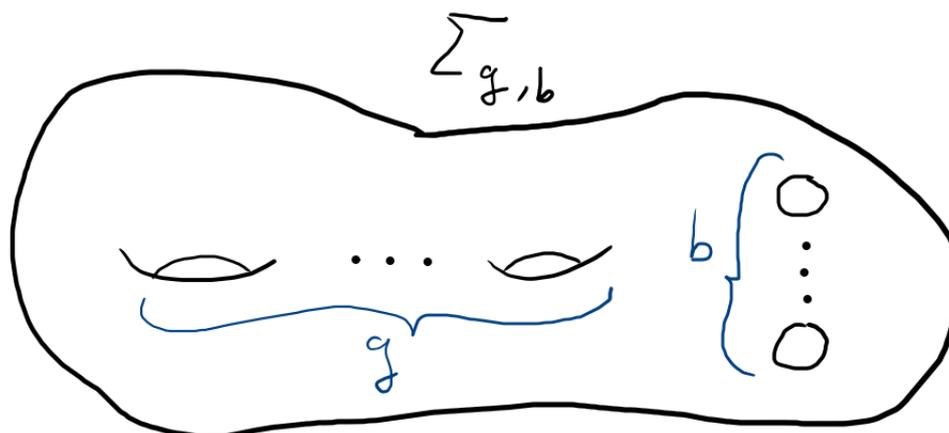
Exemple 4.2. — La sphère \mathbb{S}^n admet une décomposition en CW-complexe avec une 0-cellule et une n -cellule, où le bord \mathbb{S}^{n-1} de la n -cellule est recollé au point via l'application constante.

- Les CW-complexes finis de dimension 1 sont exactement les graphes.

Proposition 4.3. Soit X un CW-complexe fini, de dimension d . Alors sa caractéristique d'Euler-Poincaré est une somme alternée des nombres r_j de ses cellules de chaque dimension j :

$$\chi(X) = r_0 - r_1 + r_2 - \dots + (-1)^d r_d.$$

4.2. **Préliminaires sur les surfaces (orientables).** On rappelle un résultat fondamental de la classification des surfaces : toute surface compacte connexe orientable est difféomorphe à la surface type $\Sigma_{g,b}$ à de genre $g \geq 0$ (à g anses) et à b composantes de bord (ou *trous*).



Une description topologique de $\Sigma_{g,b}$ est un $4g$ -gone d'arêtes orientées a_1, \dots, a_{4g} , recollé à lui-même en identifiant a_{4k+1} à $-a_{4k+3}$ et a_{4k+2} avec a_{4k+4} (pour $0 \leq k \leq g-1$), et dont on a retiré b petits disques à l'intérieur.

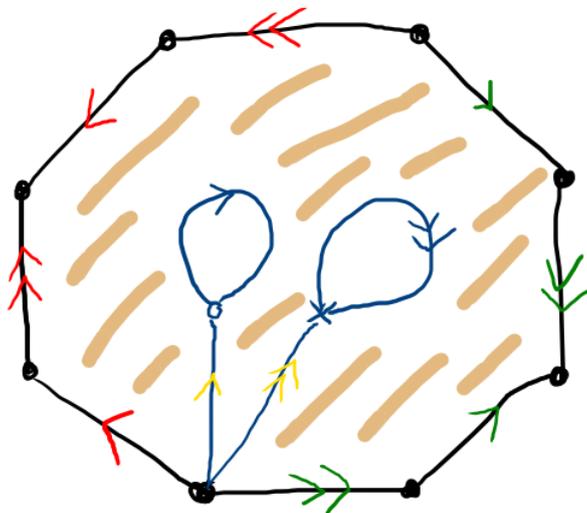


FIGURE 29. Une décomposition en CW-complexe de la surface $\Sigma_{2,2}$

La Figure 29 décrit le cas $g = 2, b = 2$: la décomposition en CW-complexe compte 3 points (le noir, le cercle bleu, la croix bleue), 8 arêtes (à flèche simple ou double, de couleur bleue, rouge, jaune ou verte) et une 2-cellule (homéomorphe au disque ouvert) en hachures brunes.

Exemple 4.4. — $\Sigma_{0,0}$ est la sphère \mathbb{S}^2 .

- $\Sigma_{0,1}$ est le disque \mathbb{B}^2 .
- $\Sigma_{0,2}$ est $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, qu'on peut voir comme un anneau ou un cylindre.
- $\Sigma_{0,3}$ est le disque à deux trous, aussi appelé *pantalon*.
- $\Sigma_{1,0}$ est le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- $\Sigma_{1,1}$ est le tore troué, qui se rétracte sur un bouquet de deux cercles.
- $\Sigma_{2,0}$ est la surface de genre 2.

Proposition 4.5. *La caractéristique d'Euler d'une surface vérifie*

$$\chi(\Sigma_{g,b}) = 2 - 2g - b.$$

Définition 4.6. Soient M, N deux variétés orientées de même dimension d .

La somme connexe $M \sharp N$ est la variété orientée de dimension d obtenue en retirant une petite boule de dimension d à M et à N et en recollant ces deux nouvelles variétés le long du bord \mathbb{S}^{d-1} via un homéomorphisme de \mathbb{S}^{d-1} inversant l'orientation.

Exemple 4.7. En dimension 2, la somme connexe de deux tores est une surface de genre 2.

Exemple 4.8. La somme connexe des nœuds (Définition 3.8) s'inscrit dans le cadre de la Définition 4.6, mais en conservant le caractère *plongé dans* \mathbb{S}^3 des 1-variétés en question.

4.3. Préliminaires sur l'orientation. Sans faire un rappel général sur ce qu'est l'orientation des variétés différentiables, précisons ce qu'il se passe pour les objets qui nous intéressent, donc en dimensions inférieures à 3 :

- \mathbb{S}^3 admet deux orientations possibles : la règle de la main droite (convention classique pour un repère orthonormé de \mathbb{R}^3) ou celle de la main gauche. Quand on voudra préciser, on notera $(\mathbb{S}^3, droite)$ ou $(\mathbb{S}^3, gauche)$ plutôt que \mathbb{S}^3 . A priori on prendra toujours l'orientation main droite pour $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3$ et \mathbb{B}^3 .
- L'orientation d'un entrelacs L plongé dans \mathbb{S}^3 est donné par le sens de parcours de chacune de ses composantes
- Pour une surface connexe S plongée dans \mathbb{R}^3 , l'orientation de S sera notée sur S par un symbole de sens de rotation \circlearrowright ou \circlearrowleft , selon comment on ordonne une base de deux vecteurs tangents en un point. On colorera en jaune une surface orientée \circlearrowright et en bleu sinon.
- Si la surface connexe S à un bord L , alors l'orientation de S induit celles des composantes de L , de manière cohérente avec le symbole de sens de rotation. Ainsi, les deux bords parallèles d'une fine partie en bande de S auront des sens de parcours opposés.
- Pour une surface connexe S plongée dans \mathbb{R}^3 , le choix du vecteur normal sortant en un point $x \in S$ dépend des orientations de S et de \mathbb{R}^3 . Ainsi, pour l'orientation main droite sur \mathbb{R}^3 et l'orientation \circlearrowright sur le plan de cette page, le vecteur normal sortant ira de la page à votre œil.

Remarque 4.9. Soit K un nœud (orienté) dans $(\mathbb{R}^3, droite)$, $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une réflexion de $(\mathbb{R}^3, droite)$ (qui inverse donc l'orientation), et $K^* := \sigma(K)$ l'image miroir de K .

Notons $\iota: (\mathbb{R}^3, gauche) \rightarrow (\mathbb{R}^3, droite)$ l'application qui est l'identité de \mathbb{R}^3 d'un point de vue ensembliste, mais qui change le choix d'orientation.

Alors il existe un difféomorphisme *positif* (i.e. respectant l'orientation) entre $(\mathbb{R}^3, gauche, K)$ et $(\mathbb{R}^3, droite, K^*)$, à savoir $\sigma \circ \iota$.

De ce point de vue, pour passer d'un nœud à son image miroir, il est donc équivalent

- de remplacer le nœud par son image par une réflexion et de laisser la même orientation à l'espace ambiant,
- d'inverser l'orientation de l'espace ambiant en laissant le positionnement du nœud inchangé.

4.4. Surface de Seifert d'un entrelacs.

Définition 4.10. Soit L un entrelacs de \mathbb{S}^3 .

Une *surface de Seifert de L* est une surface S plongée dans \mathbb{S}^3 , connexe compacte orientée de bord l'entrelacs L .

Le *genre de L* $g(L) \in \mathbb{N}$ est le genre minimum possible d'une surface de Seifert de L .

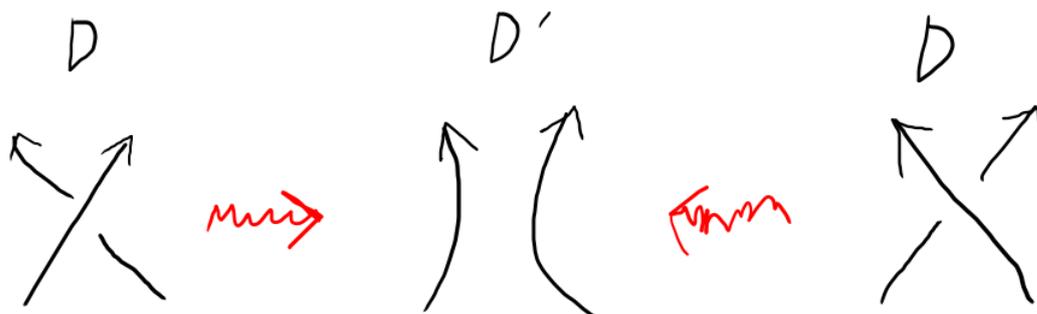
Exemple 4.11. Le nœud trivial U borde un disque, donc $g(U) = 0$.

Proposition 4.12. *Tout entrelacs admet au moins une surface de Seifert. En particulier, le genre d'un entrelacs est un entier bien défini.*

Démonstration. On va suivre l'*algorithme de Seifert* pour construire une surface de Seifert S d'un entrelacs L donné.

Soit D un diagramme connexe de L (on peut toujours le supposer quitte à utiliser des mouvements de Reidemeister $R2$), et c son nombre de croisements.

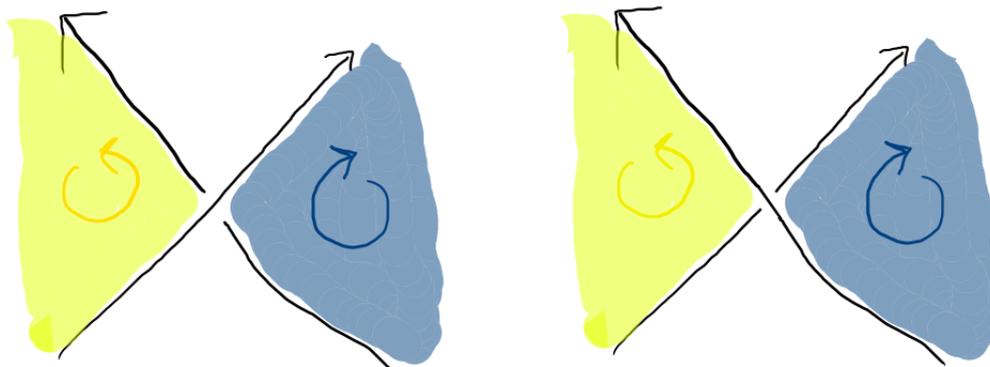
Appelons D' le diagramme obtenu depuis D en remplaçant un voisinage de chaque croisement par deux brins parallèles allant dans la même direction, comme dans la figure suivante.



Le diagramme D' est alors composé d'un nombre fini s de cercles orientés dits *cercles de Seifert*, certains pouvant être imbriqués dans d'autres.

Construisons alors la surface S' plongée dans \mathbb{R}^3 comme union disjointe de s disques, chaque disque ayant pour bord un des cercles de Seifert, et une orientation (jaune ou bleue) cohérente avec l'orientation du cercle. Quand des cercles sont imbriqués, on choisit des altitudes différentes dans \mathbb{R}^3 pour chacun, ainsi que pour le disque correspondant, de sorte que le cercle le plus intérieur ait l'altitude la plus élevée.

Enfin, construisons S à partir de S' de la manière suivante : au voisinage de chacun des croisements supprimés, retirons deux segments de bord à S' et recollons un "rectangle tordu d'un demi-tour" correspondant au croisement initial en question. Ce rectangle tordu est d'une des deux formes suivantes selon le signe du croisement initial :



La surface S ainsi construite est bien une surface plongée compacte connexe orientée de bord l'entrelacs L . □

Définition 4.13. Soit L un entrelacs de \mathbb{S}^3 . Une *surface d'algorithme* de L est une surface de Seifert de L construite via l'*algorithme de Seifert* décrit dans la preuve précédente, en commençant avec un diagramme de L .

Exercice 4.14. (1) Montrer que le genre est bien un invariant d'entrelacs.

(2) Soit L un entrelacs et $-L$ l'entrelacs obtenu en inversant les orientations de toutes les composantes de L . Montrer que $g(-L) = g(L)$.

(3) Soit L un entrelacs. Montrer que $g(L^*) = g(L)$.

Exercice 4.15. Soit D un diagramme d'entrelacs à $c(D)$ croisements, et S une surface d'algorithme construite depuis D , avec $s(D)$ cercles de Seifert.

(1) Montrer que la caractéristique d'Euler de S est :

$$\chi(S) = s(D) - c(D).$$

(2) En déduire que

$$g(S) = \frac{2 - s(D) + c(D) - \mu(L)}{2},$$

où L est l'entrelacs associé à D .

En tant qu'invariant défini comme un minimum sur une infinité de possibilités, le genre d'un entrelacs est difficile à calculer. Il est en revanche aisé d'en obtenir une borne supérieure via l'algorithme de Seifert par exemple.

Proposition 4.16. Soit K un nœud. Alors $g(K) = 0$ si et seulement si K est le nœud trivial.

En d'autres termes, le genre détecte le nœud trivial parmi tous les nœuds.

Démonstration. Nous admettrons la preuve de la Proposition 4.16. Une façon de s'en convaincre est d'isotoper un disque plongé (et son bord le nœud de genre zéro) le long de lui-même jusqu'à un petit voisinage d'un de ses points, voisinage qui ressemble alors à un disque classique. \square

La Proposition 4.16 ne se généralise pas aux entrelacs, comme on peut le voir dans l'exercice suivant.

Exercice 4.17. Considérons les trois entrelacs L, L', L'' de la Figure 30.

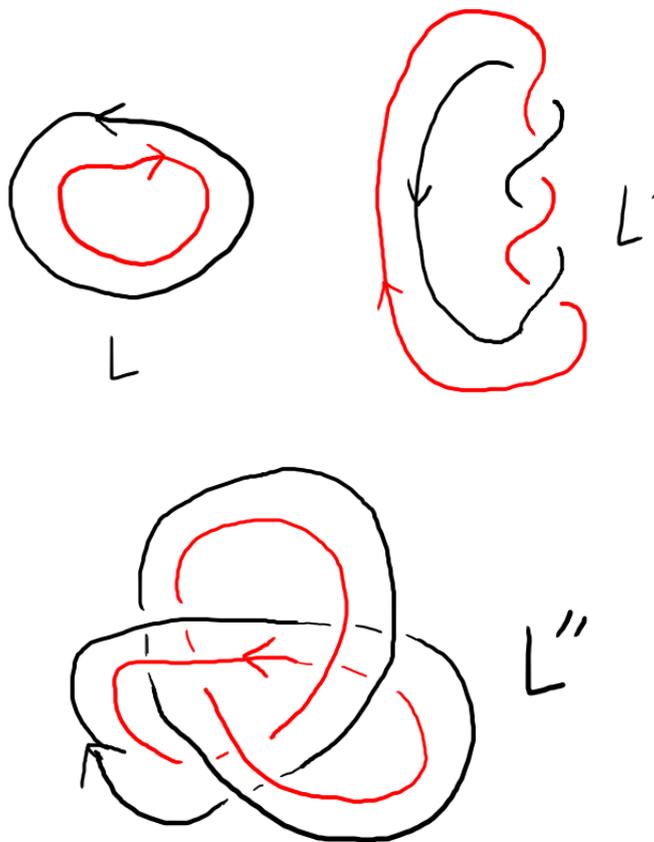


FIGURE 30. Trois entrelacs différents mais de genre nul

(1) Montrer qu'ils appartiennent à trois classes d'équivalence différentes.

(2) Montrer qu'ils ont tous les trois un genre zéro.

Définition 4.18. Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ et $L' = L'_1 \cup \dots \cup L'_p$ deux entrelacs. La somme connexe de L et L' le long des composantes L_i et L'_j est l'entrelacs à $m+p-1$ composantes $L \#_{L_i, L'_j} L' := L_1 \cup \dots \cup L_{i-1} \cup L_{i+1} \cup \dots \cup L_m \cup (L_i \# L'_j) \cup L'_1 \cup \dots \cup L'_{j-1} \cup L'_{j+1} \cup \dots \cup L'_p$, où l'on a pris des représentants de L et L' tels que leurs composantes ne s'intersectent pas et que la somme connexe de nœuds $L_i \# L'_j$ ait du sens.

Remarquons que l'ordre des composantes choisi ici n'est pas canonique dans la littérature.

Théorème 4.19. Le genre des nœuds est additif par la somme connexe. En d'autres termes, pour tous nœuds J et K , on a $g(J \# K) = g(J) + g(K)$.

Nous admettrons le Théorème 4.19. Il existe une généralisation aux sommes connexes d'entrelacs, mais seulement quand la somme connexe en question vérifie certaines propriétés (voir [Cro, Section 5.6] pour la preuve et la généralisation). On peut néanmoins démontrer plus facilement l'inégalité suivante :

Exercice 4.20. Soient L et L' deux entrelacs, et $L \# L'$ une somme connexe de L et L' . Montrer que $g(L \# L') \leq g(L) + g(L')$.

Une conséquence du Théorème 4.19 est le fait que tout nœud admet un nombre fini de facteurs premiers.

Exercice 4.21. Soit K un nœud. Montrez qu'il existe une constante $C(K) \in \mathbb{N}$ telle que toute décomposition de K en facteurs premiers a moins de $C(K)$ facteurs.

L'unicité des facteurs premiers est plus difficile à démontrer (voir [Cro, Theorem 4.5.2])

4.5. Références des exercices.

4.14, 4.15, 4.17, 4.20 et 4.21.

Exercice 4.14 :

- (1) Montrer que le genre est bien un invariant d'entrelacs.
- (2) Soit L un entrelacs et $-L$ l'entrelacs obtenu en inversant les orientations de toutes les composantes de L . Montrer que $g(-L) = g(L)$.
- (3) Soit L un entrelacs. Montrer que $g(L^*) = g(L)$.

Pour tout entrelacs L , notons $\mathcal{S}(L)$ l'ensemble des surfaces de Seifert de L , i.e. les surfaces S plongées dans S^3 compactes connexes orientées de bord L .

(1) Soient L, L' deux entrelacs équivalents et $\phi: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ un difféomorphisme respectant l'orientation et tel que $\phi(L) = L'$. Montrons que $g(L) = g(L')$.

Soit $F_\phi: \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathcal{S}(L')$ l'application qui à chaque $S \in \mathcal{S}(L)$ associe $\phi(S)$. Alors F_ϕ est bien définie car les propriétés d'être une surface, d'être compact, d'être connexe et d'être orientée sont toutes préservées par application du difféomorphisme ϕ , et le bord L est bien envoyé sur le bord $\phi(L) = L'$. De plus F_ϕ est bijective, d'inverse $F_{\phi^{-1}}$.

Notons F_g l'application allant d'un ensemble de surfaces plongées dans un ensemble d'entiers naturels, envoyant une surface sur son genre.

Comme le genre est préservé par difféomorphisme, on a $F_g \circ F_\phi = F_g$.

Ainsi, $g(L) = \min F_g(\mathcal{S}(L)) = \min F_g(F_\phi(\mathcal{S}(L))) = \min F_g(\mathcal{S}(L')) = g(L')$.

(2) Soit F° l'application involutive entre deux ensembles de surfaces plongées connexes compactes orientées, qui envoie toute surface sur la même surface avec l'orientation opposée.

Alors $F^\circ(\mathcal{S}(L)) = \mathcal{S}(-L)$, et $F_g \circ F^\circ = F_g$ car le genre d'une surface ne dépend pas de son orientation.

D'où $g(-L) = \min F_g(\mathcal{S}(-L)) = \min F_g(F^\circ(\mathcal{S}(L))) = \min F_g(\mathcal{S}(L)) = g(L)$.

(3) Soit $\sigma: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ un difféomorphisme involutif renversant l'orientation induit par une réflexion de \mathbb{R}^3 , et $F_\sigma: S \mapsto \sigma(S)$ l'application induite sur l'ensemble des surfaces plongées dans \mathbb{S}^3 .

Par le même type d'arguments qu'au (1) et au (2), et comme $\sigma(L) \sim L^*$, on a $F_\sigma(\mathcal{S}(L)) = \mathcal{S}(L^*)$ et $g(L^*) = g(L)$.

Exercice 4.15 : Soit D un diagramme d'entrelacs à $c(D)$ croisements, et S une surface d'algorithmme construite depuis D , avec $s(D)$ cercles de Seifert.

(1) Montrer que la caractéristique d'Euler de S est :

$$\chi(S) = s(D) - c(D).$$

(2) En déduire que

$$g(S) = \frac{2 - s(D) + c(D) - \mu(L)}{2},$$

où L est l'entrelacs associé à D .

(1) Chaque cercle de Seifert contribue d'un disque à la surface S , donc à un terme $+1$ dans $\chi(S)$. Chaque rectangle de croisement contribue à un terme -1 , car il a par exemple une décomposition cellulaire avec une 2-cellule et deux 1-cellules.

(2) Immédiat grâce à la valeur de $\chi(S)$ et le fait que $\sharp\partial S = \mu(L)$.

Exercice 4.17 : Considérons les trois entrelacs L, L', L'' de la Figure 30.

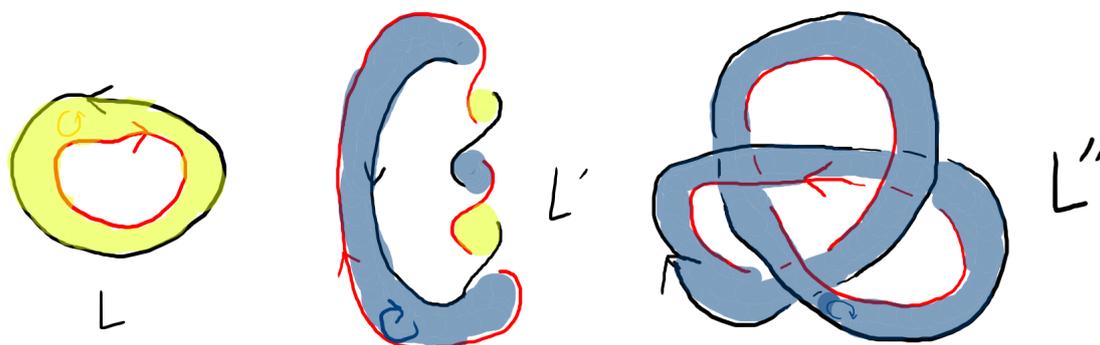
(1) Montrer qu'ils appartiennent à trois classes d'équivalence différentes.

(2) Montrer qu'ils ont tous les trois un genre zéro.

(1) Les composantes de L et L' sont toutes des nœuds triviaux, mais celles de L'' sont deux nœuds de trèfle, L'' n'est donc équivalent à aucun des deux autres.

D'autre part, $\text{lk}(L) = 0$ et on calcule que $\text{lk}(L') = -2$, donc L et L' ne sont pas équivalents.

(2) Ces trois entrelacs bordent des anneaux plongés (voir figure ci-après), qui sont des surfaces de genre 0, donc ces entrelacs ont un genre nul.



Exercice 4.20 : Soient L et L' deux entrelacs, et $L\sharp L'$ une somme connexe de L et L' . Montrer que $g(L\sharp L') \leq g(L) + g(L')$.

On construit S'' une surface de Seifert pour $L\sharp L'$ comme une somme connexe sur le bord de S, S' surfaces de Seifert de genre minimal pour L et L' . Alors $g(S'') = g(S) + g(S') = g(L) + g(L')$, d'où le résultat.

Exercice 4.21 : Soit K un nœud. Montrez qu'il existe une constante $C(K) \in \mathbb{N}$ telle que toute décomposition de K en facteurs premiers a moins de $C(K)$ facteurs.

Si $K = U$, alors il a 0 facteurs premiers, et on prend $C(K) := 0$.

Si $K = \#_{i=1}^r K_i$ avec K_i premiers (donc $\neq U$) et $r \geq 1$, alors

$$g(K) = \sum_{i=1}^r g(K_i) \geq \sum_{i=1}^r 1 = r,$$

Donc pour $C(K) := g(K)$ on a bien tout r inférieur à $C(K)$.

5. FORME ET MATRICE DE SEIFERT

5.1. Équivalence de surfaces.

Définition 5.1. Soit S, S' des surfaces plongées (i.e. compactes connexes orientées dans S^3). On dit que S' est obtenue de S par *ajout de tube* si

- il existe un cylindre plein plongé $\mathbb{B}^2 \times [0, 1] \xrightarrow{\phi} C \subset S^3$ tel que $C \cap S = \phi(\mathbb{B}^2 \times \{0, 1\})$,
- $S' = (S \setminus C \cap S) \cup \phi(\mathbb{S}^1 \times [0, 1])$.

Deux surfaces plongées orientées S, S' sont *T-équivalentes* si elles sont reliées par un nombre fini d'isotopies ambiantes et d'ajouts ou retraits de tubes.

On va voir au Théorème 5.6 qu'une équivalence de deux entrelacs se traduit en T-équivalence de leurs surfaces de Seifert.

Définition 5.2. Une *surface en bandes* est une surface plongée admettant une projection planeaire du type de la Figure 31, i.e. donnée par un disque sur le bord duquel on recolle une série de bandes rectangulaires, chaque recollement se faisant le long de deux segments disjoints, et les bandes pouvant être entortillées, se croiser et/ou suivre un diagramme de nœud. Voir [Cro, Chapter 5] ou [Sch, Definition 1.4].

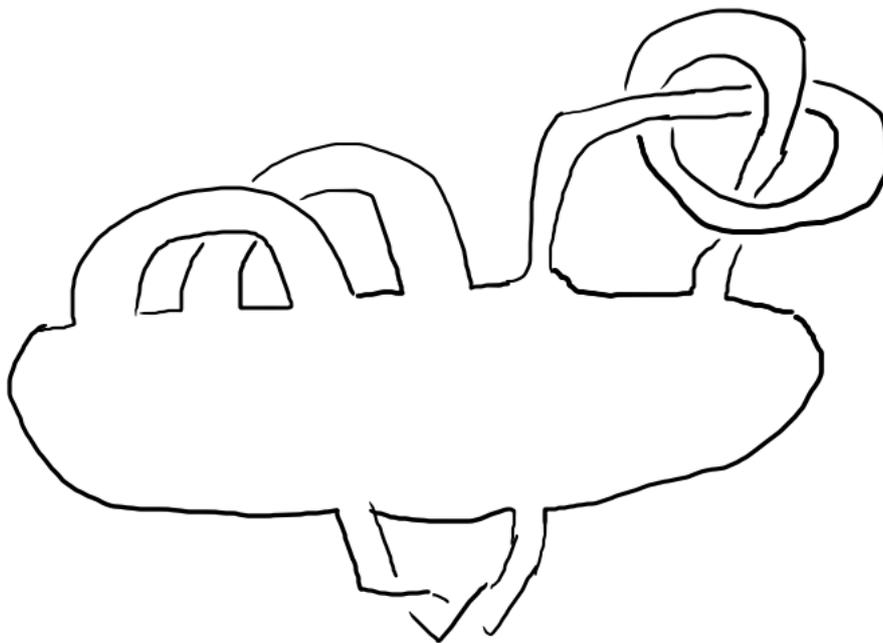


FIGURE 31. Surface en bandes

Lemme 5.3. *Toute surface de Seifert est isotope (donc T-équivalente) à une surface en bandes.*

Démonstration. L'idée est de partir d'une présentation de la surface comme CW-complexe, et de se ramener par isotopie à un voisinage du 1-squelette. Voir [Sch, Lemma 1.5] pour plus de détails. \square

Lemme 5.4. *Toute surface en bandes est T-équivalente à une surface d'algorithme.*

Démonstration. En commençant avec une surface en bandes S de bord l'entrelacs L , soit D un diagramme de L correspondant à une projection planeaire en bandes de S , et soit S' la surface d'algorithme associée à D . On montre que S et S' sont T-équivalentes en étudiant les différents cas possibles avec les bandes de S . Notamment, un croisement de

bandes impliquera l'ajout d'un tube pour passer de S à S' . Voir [Sch, Lemma 1.8] et [Cro, Lemma 5.5.4] pour plus de détails. \square

Lemme 5.5. *Si D et D' sont R -équivalents, alors leurs surfaces d'algorithmes sont T -équivalentes.*

Démonstration. On démontre le résultat pour chaque mouvement de Reidemeister parmi R1a, R1c, R2c, R2d et R3b, qui forment une famille génératrice au sens de Polyak, cf [Po, Theorem 1.2]. Voir [Sch, Lemma 1.9] et [Cro, Lemma 5.5.5] pour plus de détails. \square

Théorème 5.6. *Des surfaces de Seifert d'entrelacs équivalents sont T -équivalentes.*

Démonstration. Le résultat découle des trois lemmes précédents. \square

5.2. Forme et matrice de Seifert. Soit L un entrelacs et $S \cong \Sigma_{g,b}$ une surface de Seifert de L .

On a $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g+b-1} = \mathbb{Z}^{1-\chi(S)}$, et

- chaque anse donne 2 vecteurs de base (des lacets),
- chaque trou (après le premier) donne 1 vecteur de base (un lacet encerclant le trou).

Soit $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_{2g+b-1})$ une telle base de l'homologie.

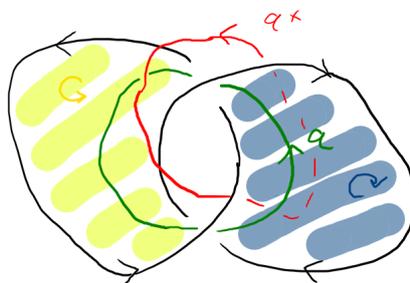
Définition 5.7. La *forme de Seifert* de S est la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \Theta_S : H_1(S) \times H_1(S) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a_i, a_j) &\mapsto \text{lk}(a_i, a_j^+), \end{aligned}$$

où a_j^+ est le lacet isotope à a_j poussé vers le haut.

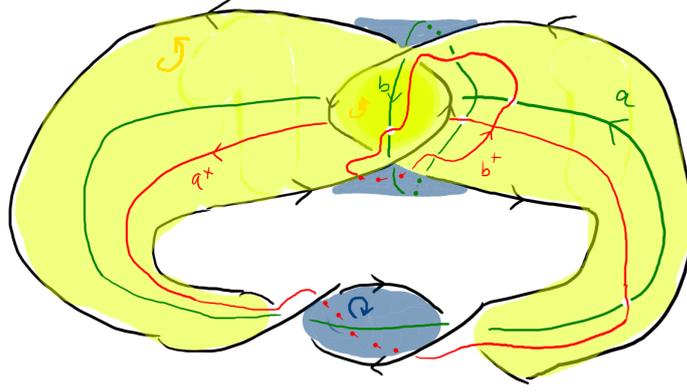
Définition 5.8. La *matrice de Seifert* $V_{S,\mathcal{B}}$ associée à S et \mathcal{B} est la matrice de la forme Θ_S dans la base \mathcal{B} .

Exemple 5.9. Entrelacs de Hopf :



$$S \cong \Sigma_{0,2}, \quad V = a \begin{bmatrix} a^+ \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 5.10. Nœud de huit :



$$S \cong \Sigma_{1,1}, \quad V = \begin{matrix} a^+ & b^+ \\ a & b \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 5.11. Soit L un entrelacs et V une matrice de Seifert de L . Alors :

- (1) V^T est une matrice de Seifert de $-L$,
- (2) $-V^T$ est une matrice de Seifert de L^* .

Définition 5.12. Un nœud K est *amphichéral* si $K \sim K^*$.

Le *type de symétrie* d'un nœud K est l'ensemble des classes d'équivalences parmi $\{K, K^*, -K, -K^*\}$ (5 cas possibles, voir *Knotinfo* pour le vocabulaire précis).

Pour un entrelacs à $m \geq 2$ composantes, encore plus de cas sont possibles.

Le type de symétrie est un invariant d'entrelacs.

5.3. Signature.

Définition 5.13. Soit $V \in M_n(\mathbb{Z}), W \in M_p(\mathbb{Z})$. Elles sont *S-équivalentes* si elles sont reliées par une suite finie de mouvements parmi :

- *congruence* : $M \mapsto P^T M P$ avec $P \in GL_k(\mathbb{Z})$,
- *élargissement/réduction* :

$$\begin{pmatrix} M & \star & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow M \longleftrightarrow \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où \star est une ligne/colonne d'entiers.

Proposition 5.14. Soient S, S' deux surfaces plongées T -équivalentes, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de $H_1(S), H_1(S')$. Alors $V_{S, \mathcal{B}}$ et $V_{S', \mathcal{B}'}$ sont S -équivalentes.

La classe de S -équivalence d'une matrice de Seifert est donc un invariant d'entrelacs.

Définition 5.15. Soit L un entrelacs et V une surface de Seifert de L . La *signature* $\sigma(L) \in \mathbb{Z}$ est définie par :

$$\sigma(L) := \text{sign}(V + V^T) \in \mathbb{Z},$$

i.e. la différence entre le nombre de valeurs propres > 0 et < 0 de la matrice symétrique $V + V^T$. C'est un invariant d'entrelacs.

Remarque 5.16. Rappelons qu'il existe plusieurs moyens classiques de calculer la signature d'une matrice symétrique $M \in M_m(\mathbb{Z})$. Par exemple, on peut écrire la forme quadratique associée

$$q(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m) \cdot M \cdot (x_1, \dots, x_m)^T$$

et la décomposer en sommes et différences de carrés selon l'algorithme de Gauss.

Proposition 5.17. Soit L, L' des entrelacs.

- (1) $\sigma(K)$ est pair si K est un nœud.
- (2) $\sigma(-L) = \sigma(L)$.
- (3) $\sigma(L^*) = -\sigma(L)$. En particulier $L \sim L^* \Rightarrow \sigma(L) = 0$.
- (4) $\sigma(L \sharp L') = \sigma(L) + \sigma(L') = \sigma(L \sqcup L')$.

Exercice 5.18. Montrer que 3_1 et 3_1^* ne sont pas équivalents.

5.4. Polynôme d'Alexander.

Définition 5.19. Soit L un entrelacs et V une surface de Seifert de L . Le déterminant de L est défini par $\det(L) := |\det(V + V^T)| \in \mathbb{N}$.

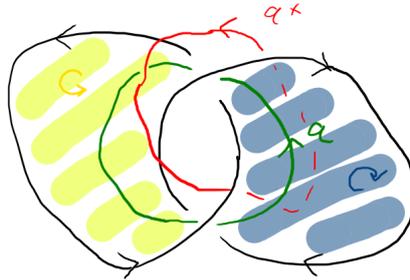
Définition 5.20 (Définition S). Soit L un entrelacs et V une surface de Seifert de L . Le polynôme d'Alexander (à une variable) de L est

$$\Delta_L(t) := \det(tV - V^T) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / \{\pm t^{\mathbb{Z}}\}.$$

Proposition 5.21. Soit L un entrelacs.

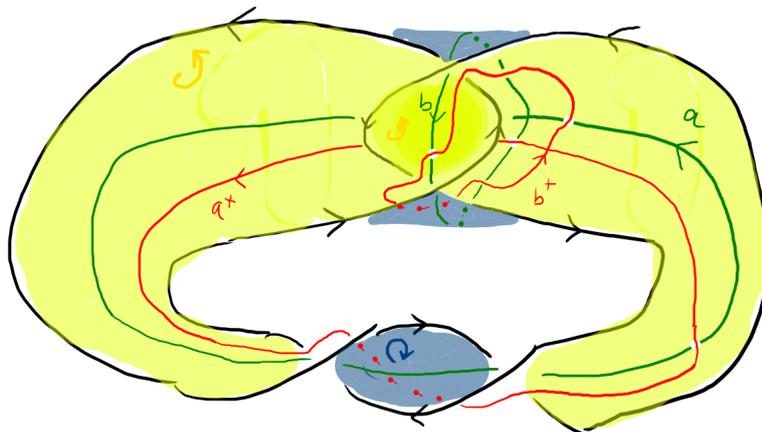
- (1) $\Delta_L(t) \doteq \Delta_{-L}(t) \doteq \Delta_{L^*}(t) \doteq \Delta_L(\frac{1}{t})$.
- (2) $\Delta_L(1) = \pm 1$ si L est un nœud et $\Delta_L(1) = 0$ sinon.
- (3) $\Delta_{L \sharp L'}(t) = \Delta_L(t) \cdot \Delta_{L'}(t)$.
- (4) $\Delta_{L \sqcup L'}(t) = 0$.
- (5) $\deg(\Delta_L(t)) \leq 2g(L) + \mu(L) - 1$.
- (6) $\deg(\Delta_K)$ est pair si K est un nœud.

Exemple 5.22. L'entrelacs de Hopf :



$$S \cong \Sigma_{0,2}, \quad V = a \begin{bmatrix} a^+ \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(L) = -1, \quad \Delta_L(t) \doteq -(t-1).$$

Exemple 5.23. Le nœud de huit :



$$S \cong \Sigma_{1,1}, \quad V = \begin{matrix} a^+ & b^+ \\ a & b \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(L) = 0, \quad \Delta_L(t) \doteq t^2 - 3t + 1.$$

Remarque 5.24. Comparons les Définitions A et S.

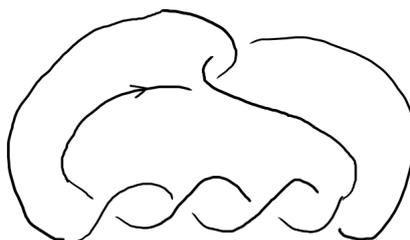
La Définition A ne s'applique qu'aux nœuds, et le temps de calcul est polynomial en le nombre de croisements.

La Définition S s'applique aux entrelacs, et son temps de calcul est polynomial en le genre (ce qui peut être mieux qu'en le nombre de croisements), mais nécessite de construire la surface et la matrice de Seifert.

Il n'est pas encore clair pourquoi la Définition S généralise la Définition A.

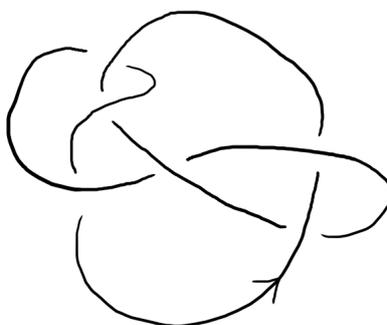
5.5. Étude de deux exemples.

Exercice 5.25. Soit K le nœud 5_2 .



- (1) Montrer que K est inversible (i.e. $K \sim -K$).
- (2) Montrer que $\Delta_K(t) \doteq 2t^2 - 3t + 2$.
- (3) Montrer que $\sigma(K) = -2$.
- (4) Montrer que $g(K) = 1$.

Exercice 5.26. Soit K le nœud 6_3 .



- (1) Montrer que K est équivalent à $-K^*$. **Attention! Initialement l'énoncé utilisait K^* au lieu de $-K^*$, ce qui est correct mais plus difficile à démontrer!**
- (2) Montrer que $\Delta_K(t) \doteq t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$.
- (3) Montrer que $\sigma(K) = 0$.

5.6. **Références des exercices.** Exercices 5.18, 5.25 et 5.26.

Exercice 5.18 : Montrer que 3_1 et 3_1^* ne sont pas équivalents.

On va montrer que $\sigma(3_1) \neq 0$ et utiliser la Proposition 5.17 (3).

La construction d'une surface d'algorithme pour 3_1 est similaire à celle de l'Exemple 5.22 de l'entrelacs de Hopf, avec trois croisements positifs au lieu de deux. On trouve alors

une possible matrice de Seifert

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne $V + V^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, de forme quadratique associée

$$q(x, y) = -2x^2 + 2xy - 2y^2 = -x^2 - (x - y)^2 - y^2 < 0.$$

On aurait pu aussi utiliser l'algorithme de Gauss pour conclure au caractère défini négatif de q .

On calcule la signature de 3_1 et on trouve donc

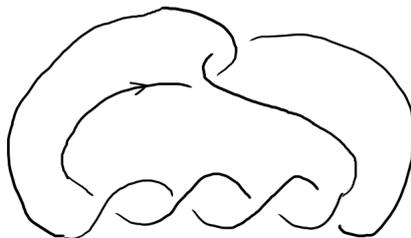
$$\sigma(3_1) = \text{sign}(V + V^T) = -2,$$

en particulier $\sigma(3_1) \neq 0$, donc par contraposée de la Proposition 5.17 (3), on en conclut que 3_1 et 3_1^* ne sont pas équivalents.

Remarquons qu'on a aussi

$$\sigma(3_1^*) = 2.$$

Exercice 5.25 : Soit K le nœud 5_2 .



- (1) Montrer que K est inversible (i.e. $K \sim -K$).
- (2) Montrer que $\Delta_K(t) \doteq 2t^2 - 3t + 2$.
- (3) Montrer que $\sigma(K) = -2$.
- (4) Montrer que $g(K) = 1$.

(Stratégie) Les questions (3) et (4) nous demandent de calculer le genre et la signature, qui nécessitent d'utiliser une surface de Seifert. Sachant cela, on comprend qu'il est pertinent d'utiliser la Définition S pour le (2).

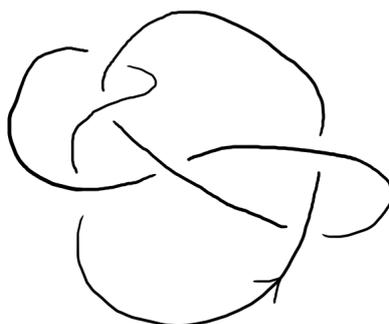
(1) Soit une droite comprise dans le plan du diagramme, verticale. Alors l'image du diagramme de 5_2 par une rotation de \mathbb{R}^3 d'angle π autour de cette droite est un diagramme identique excepté que le sens de parcours a changé (en examen, il faut bien le justifier avec des dessins). Ainsi, $K \sim -K$.

(2, 3) La surface d'algorithme construite ressemble à celle de l'Exemple 5.23, excepté que les deux croisements du haut sont inversés (ce qui change des poussés vers le haut et des nombres d'enlacements) et qu'il y a 4 croisements en bas et non 2.

Les calculs de $\sigma(K)$ et $\Delta_K(t)$ sont alors standards, et ne seront pas détaillés ici.

(4) La surface d'algorithme construite ici est de genre 1, donc $g(K) \leq 1$. Mais le degré de $\Delta_K(t)$ est 2, donc par la Proposition 5.21 (5), on a $g(K) \geq 1$ (on aurait aussi pu utiliser le fait que U est le seul nœud de genre 0 et que $K \neq U$ via un des invariants précédemment calculés). D'où le résultat.

Exercice 5.26 : Soit K le nœud 6_3 .



(1) Montrer que K est équivalent à $-K^*$. **Attention ! Initialement l'énoncé utilisait K^* au lieu de $-K^*$, ce qui est correct mais plus difficile à démontrer !**

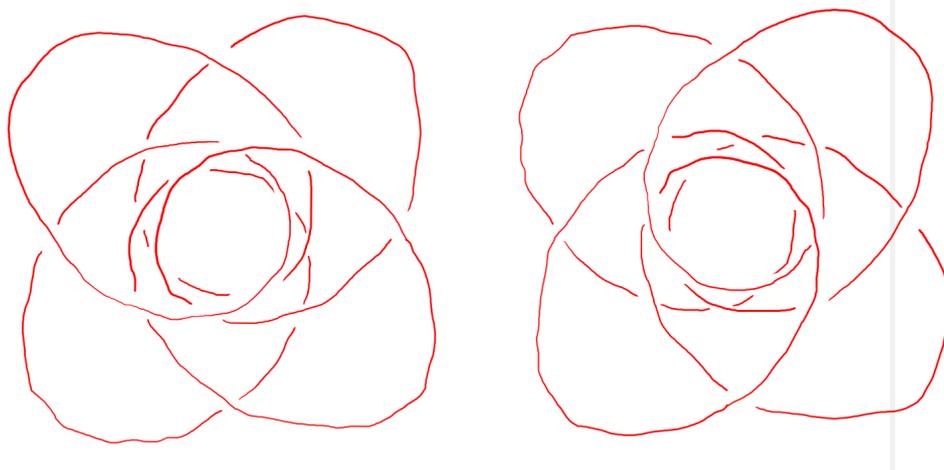
(2) Montrer que $\Delta_K(t) \doteq t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$.

(3) Montrer que $\sigma(K) = 0$.

(Stratégie) Le (3) est conséquence du (1) via la Proposition 5.21 (5), donc on peut se passer de calculer une matrice de Seifert. Ainsi pour calculer $\Delta_K(t)$ au (2) on peut utiliser la Définition A, qui a l'air la plus pratique ici (en effet, au vu du résultat attendu, le genre $g(K)$ est au moins 2, ce qui rendra la forme de Seifert longue à calculer...)

(1) Comme montré pendant le cours, on prend le court brin montant tout à gauche, on l'allonge et on le fait passer sous le reste du diagramme, ce qui donne au diagramme une propriété utile : tous les brins tournent dans le sens positif autour d'un point. Ainsi un demi-tour dans l'espace nous permet de passer du dit diagramme à celui avec les croisements inversés et le sens de parcours changé. D'où $K \sim -K^*$. Nous vous suggérons bien sûr de vous entraîner à refaire les dessins.

(1 initial) On utilise la forme suivante de K et K^* , différents d'une rotation :



(2) On utilise la Définition A, et on s'arme de patience pour calculer le déterminant 6-6 en question (qui heureusement a beaucoup de zéros).

(3) Le (3) est conséquence du (1) via la Proposition 5.21 (5).

6. RELATIONS SKEIN

6.1. Le nombre de dénouement.

Définition 6.1. Le nombre de dénouement $u(K) \in \mathbb{N}$ d'un nœud K est le nombre minimum de changements de croisements nécessaires pour passer d'un diagramme de K à un diagramme de U .

C'est un invariant, consultable sur *Knotinfo*.

Remarque 6.2. Il découle immédiatement des définitions que $u(K) = 0$ si et seulement si $K = U$.

Vu que u est défini comme une borne inférieure, c'est donc un invariant difficile à calculer. Ainsi, pour démontrer que $u(K) = 1$, il "suffit" de trouver un diagramme de K transformable en un diagramme de U en un seul changement de croisement, mais pour démontrer que $u(K) = 2$, il faut non seulement trouver un exemple où deux changements de croisements suffisent ($u \leq 2$) mais surtout prouver qu'un seul changement ne suffit dans aucune configuration ($u \geq 2$).

Exemple 6.3. On peut démontrer facilement que

$$u(3_1) = u(4_1) = u(5_2) = u(6_1) = u(S(4_1, W)) = 1,$$

en trouvant un croisement approprié (essayez!)

Les deux propriétés suivantes sont faciles à démontrer.

Proposition 6.4. Soient J, K des nœuds. Alors on a :

- (1) $u(-K) = u(K^*) = u(K)$,
- (2) $u(J\sharp K) \leq u(J) + u(K)$.

Les deux propriétés suivantes seront admises car bien plus difficiles. Elles seront utiles pour obtenir des bornes inférieures sur u .

Proposition 6.5. Soit K un nœud. Alors on a :

- (1) $\frac{1}{2}|\sigma(K)| \leq u(K)$,
- (2) si $u(K) = 1$, alors K est premier.

Démonstration. (1) La preuve est détaillée dans [Cro, Theorem 6.8.2, Corollary 6.8.3]. L'étape cruciale est de montrer qu'en changeant un croisement, la signature change de 0 ou ± 2 .

(2) Ceci est démontré dans [Scha]. □

Exemple 6.6. En utilisant la Proposition 6.5 on peut démontrer que

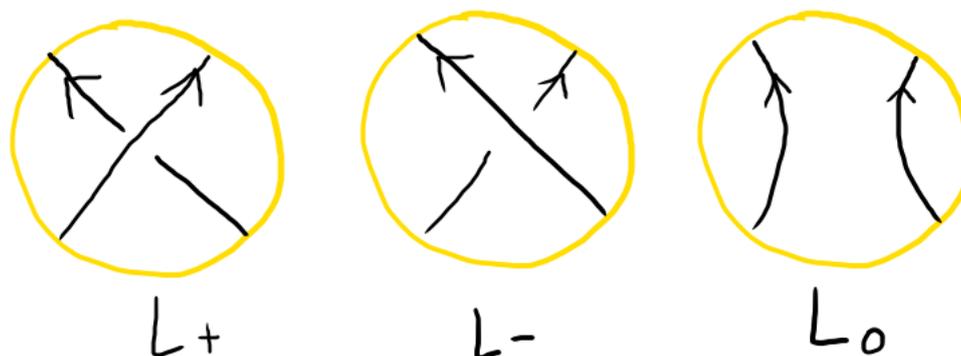
$$u(5_1) = u(3_1\sharp 3_1) = u(3_1\sharp 3_1^*) = 2.$$

Question 6.7 (Question ouverte!). Pour tous nœuds J, K , a-t-on $u(J\sharp K) = u(J) + u(K)$?

La réponse à la Question 6.7 est connue comme positive dans le cas où $u(J) = u(K) = 1$, en conséquence de Proposition 6.4 (2) et Proposition 6.5 (2).

6.2. Triplets skein.

Définition 6.8. Un *triplet skein* est un triplet d'entrelacs (L_+, L_-, L_0) qui ont des diagrammes identiques sauf dans un disque, ainsi :



Définition 6.9. On dit qu'un invariant d'entrelacs F (à valeurs dans un anneau R) vérifie une relation skein s'il existe $a, b, c \in R \setminus \{0\}$ tels que pour tout triplet skein (L_+, L_-, L_0) , on a

$$aF(L_+) + bF(L_-) = cF(L_0).$$

Proposition 6.10. Pour tout diagramme d'entrelacs D , il existe des croisements de D tels qu'en les inversant on obtient un diagramme de $U \sqcup \dots \sqcup U$.

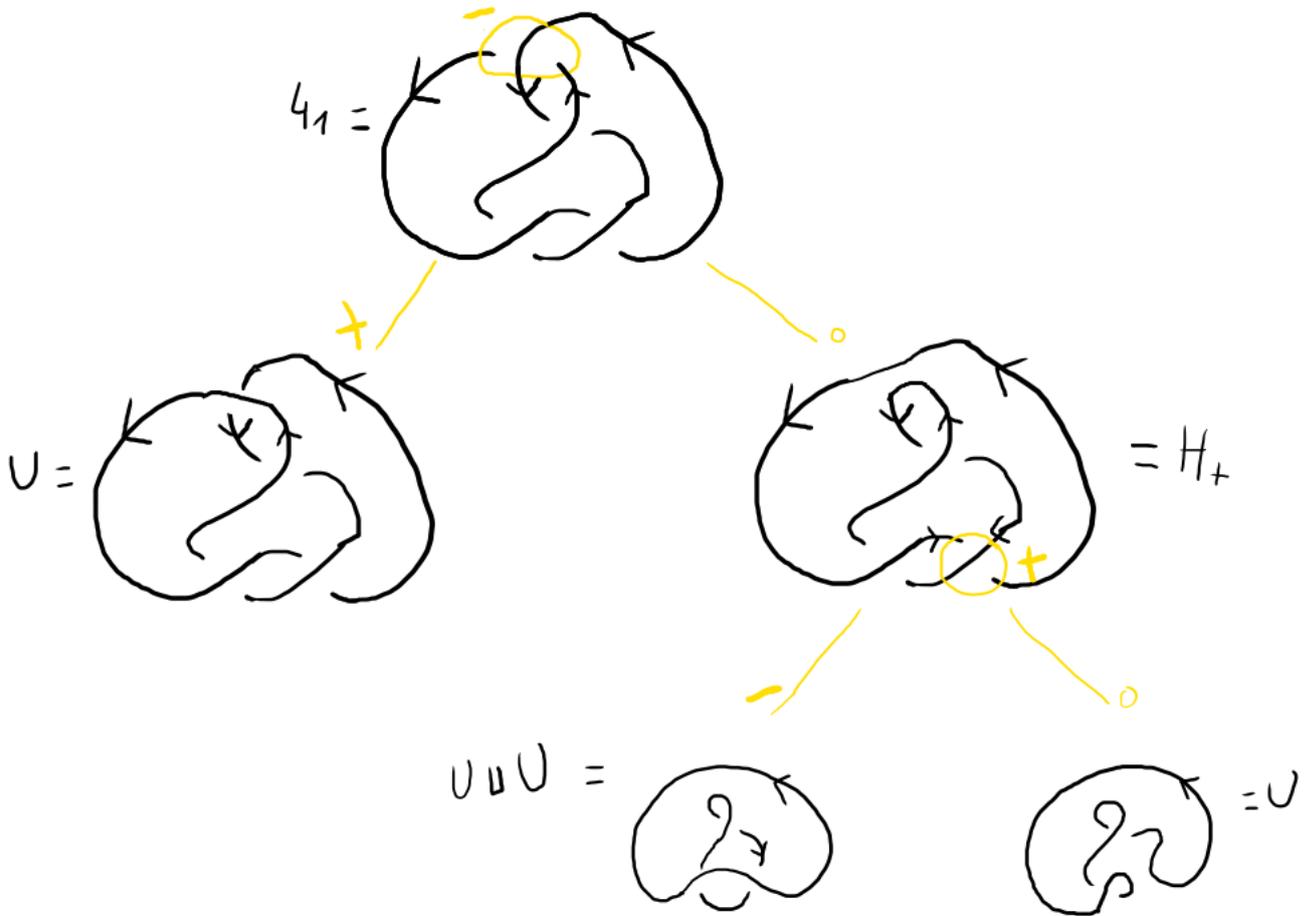
Exercice 6.11. Montrer que pour tout nœud K , on a $u(K) \leq \frac{1}{2}c(K)$.

Ainsi, un invariant d'entrelacs F vérifiant une relation skein sera déterminé par ses valeurs en les entrelacs triviaux (et même juste en U).

Définition 6.12. Un arbre résolvant pour L est construit successivement ainsi :

- On commence avec la racine L .
- Pour chaque racine, on l'identifie à un membre L_+ ou L_- d'un triplet skein, les deux autres membres étant les feuilles associées.
- À la fin, toutes les feuilles sont des entrelacs triviaux.

Exemple 6.13. Pour le nœud 4_1 , on peut construire l'arbre résolvant suivant :



6.3. Polynôme de Conway et Définition X.

Définition 6.14 (Définition X). Le *polynôme d'Alexander* des entrelacs $L \mapsto \Delta_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ est un polynôme de Laurent en \sqrt{t} (**pas défini à priori !**) défini par les propriétés suivantes :

- Δ . est un invariant d'entrelacs,
- $\Delta_U = 1$,
- Pour tout triplet skein (L_+, L_-, L_0) , on a

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \Delta_{L_0}(t).$$

Définition 6.15. Le *polynôme de Conway* des entrelacs $L \mapsto \nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ est un polynôme en z défini par les propriétés suivantes :

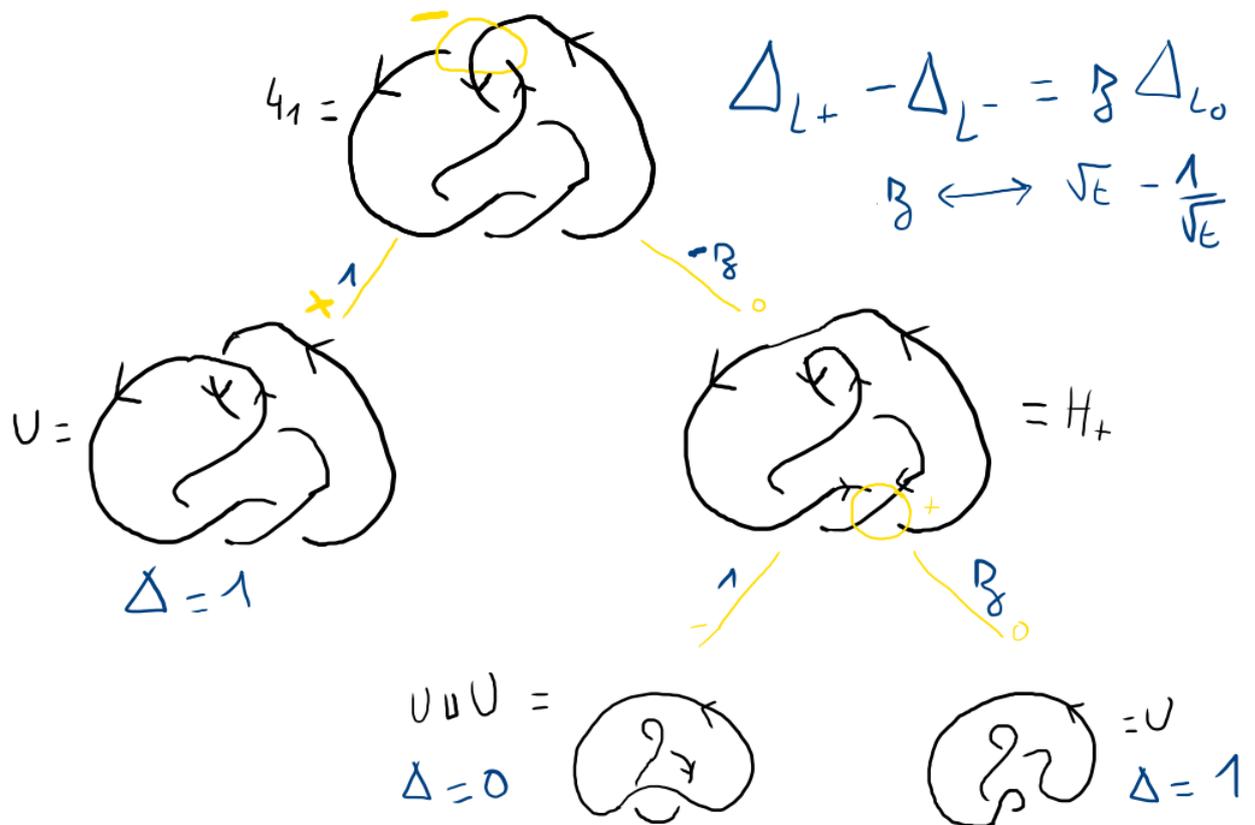
- ∇ . est un invariant d'entrelacs,
- $\nabla_U = 1$,
- Pour tout triplet skein (L_+, L_-, L_0) , on a

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \cdot \nabla_{L_0}(z).$$

Ainsi, $\Delta_L(t) = \nabla_L(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$.

Exemple 6.16. Pour le nœud de trèfle, on a $\nabla_{3_1}(z) = 1 + z^2$ et $\Delta_{3_1}(t) = t - 1 + \frac{1}{t}$.

Exemple 6.17. Pour le nœud 4_1 , on peut construire l'arbre résolvant suivant :



Grâce à cet arbre on peut calculer :

$$\nabla_{4_1}(z) = 1 - z \cdot (1 \cdot 0 + z \cdot 1) = 1 - z^2.$$

$$\Delta_{4_1}(t) = 1 - (t^{1/2} - t^{-1/2})^2 = -t + 3 - t^{-1}.$$

Proposition 6.18 ([Cro], Theorem 7.3.1). *L'invariant défini à la Définition S 5.20 coïncide avec celui défini à la Définition X 6.14.*

Remarque 6.19. La Définition X a des avantages et inconvénients. Quelques avantages sont :

- Le calcul est purement diagrammatique.
- Il est pratique pour établir des formules de récurrence pour calculer les polynômes d'Alexander de familles infinies d'entrelacs.

Quelques inconvénients sont :

- Le nombre de feuilles de l'arbre résolvant peut-être *exponentiel* en le nombre de croisements du diagramme initial, là où la Définition A utilisait un nombre *polynomial* d'opérations en ce nombre de croisements (calcul de déterminant).
- Il faut bien choisir les croisements à modifier pour avoir un arbre résolvant le plus efficace possible.
- L'invariant n'est pas défini sur les diagrammes, il faut donc parfois savoir reconnaître des entrelacs comme U depuis un diagramme, ce qui peut être difficile.

6.4. Polynôme de Jones.

Définition 6.20. Le polynôme de Jones des entrelacs $L \mapsto J_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ est un polynôme de Laurent en \sqrt{t} défini par les propriétés suivantes :

- J est un invariant d'entrelacs,
- $J_U = 1$,
- Pour tout triplet skein (L_+, L_-, L_0) , on a

$$\frac{1}{t} \cdot J_{L_+}(t) - t \cdot J_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) J_{L_0}(t).$$

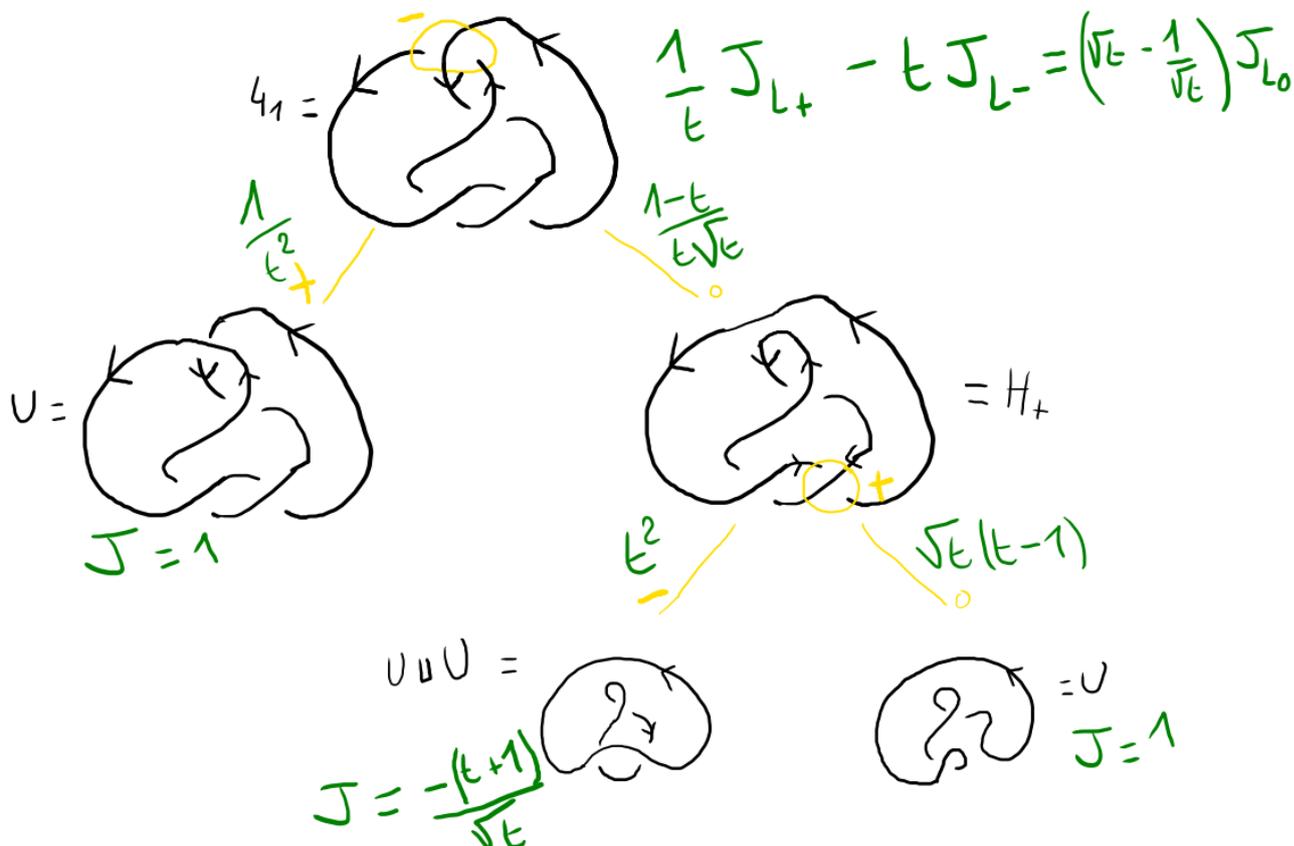
Exemple 6.21. Le polynôme de Jones distingue les nœuds de trèfle gauche et droit :

$$J_{3_1}(t) = t + t^3 - t^4 \neq t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} = J_{3_1^*}(t).$$

Proposition 6.22. Soient L, L' deux entrelacs. Alors on a :

- (1) $J_{-L}(t) = J_L(t)$,
- (2) $J_{L^*}(t) = J_L(\frac{1}{t})$,
- (3) $J_{L \# L'}(t) = J_L(t) \cdot J_{L'}(t)$,
- (4) $J_{L \sqcup L'}(t) = J_L(t) \cdot J_{L'}(t) \cdot \frac{-(t+1)}{\sqrt{t}}$.

Exemple 6.23. Pour le nœud 4_1 , on peut construire l'arbre résolvant suivant :



Grâce à cet arbre on peut calculer :

$$J_{4_1}(t) = \frac{1}{t^2} \cdot 1 + \frac{1-t}{t\sqrt{t}} \cdot \left(t^2 \cdot \frac{-(t+1)}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}(t-1) \cdot 1 \right) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1 - t + t^2.$$

6.5. Polynôme de Jones et nombre de croisements.

Définition 6.24. La *largeur* $\text{span}(P)$ d'un polynôme P est l'entier positif défini comme la différence des degrés maximal et minimal de ce polynôme.

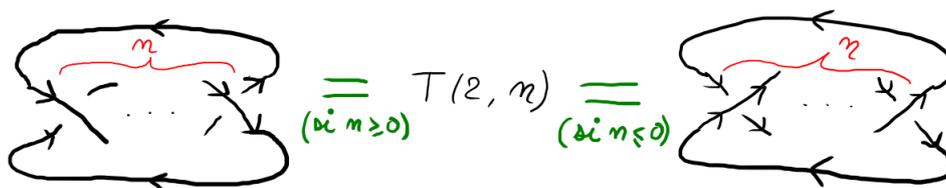
Remarque 6.25. Rappelons (Proposition 5.21 (5)) que pour tout entrelacs L , on a

$$\text{span}(\Delta_L(t)) \leq 2g(L) + \mu(L) - 1.$$

Proposition 6.26 ([Li] Theorem 5.9, [Cro] Theorem 9.6.2). *Pour tout entrelacs L non scindé, on a :*

- (1) *Borne du nombre de croisements : $\text{span}(J_L(t)) \leq c(L)$.*
- (2) *Si L est un entrelacs **alterné**, alors $\text{span}(J_L(t)) = c(L)$.*

Exercice 6.27 (Les entrelacs toriques $T(2, n)$). *On considère l'entrelacs torique $T(2, n)$.*



- (1) *Identifier $T(2, n)$ pour n entre -5 et 5 .*
- (2) *Montrer que $\sigma(T(2, n)) = -n + \text{signe}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*
- (3) *Montrer que $u(T(2, n)) = \frac{|n| - 1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ **impair**.*
- (4) *Trouver une relation de récurrence pour $\Delta_{T(2, n)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.*
- (5) *Montrer que $g(T(2, n)) = \left\lfloor \frac{|n| - 1}{2} \right\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*
- (6) *Trouver une relation de récurrence pour $J_{T(2, n)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.*
- (7) *Montrer que $\text{span}(J_{T(2, n)}(t)) = n$ pour $n \geq 2$.*
- (8) *Montrer que $c(T(2, n)) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.*

6.6. Le polynôme HOMFLY-PT à 2 variables.

Définition 6.28 (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, Przytycki-Traczyk). Le polynôme HOMFLY $P_L(v, z) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z]$ est défini par :

- P est un invariant d'entrelacs,
- $P_U(v, z) = 1$,
- Pour tout triplet skein (L_+, L_-, L_0) , on a

$$\frac{1}{v} \cdot P_{L_+}(v, z) - v \cdot P_{L_-}(v, z) = z \cdot P_{L_0}(v, z).$$

Proposition 6.29. *Soient L et L' des entrelacs. On a :*

- (1) $P_{-L}(v, z) = P_L(v, z)$,
- (2) $P_{L^*}(v, z) = P_L(v^{-1}, z)$,
- (3) $P_{L' \sqcup L}(v, z) = P_L(v, z) \cdot P_{L'}(v, z) \cdot \frac{v^{-1} - v}{z}$,
- (4) $P_{L \# L'}(v, z) = P_L(v, z) \cdot P_{L'}(v, z)$,
- (5) $\Delta_L(t) = P_L(1, t^{1/2} - t^{-1/2})$,
- (6) $J_L(t) = P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2})$.

6.7. Pour aller plus loin, avec qui discuter à l'IRMP.

- J (et d'autres) peut être défini via des **diagrammes**, avec le **crochet de Kauffman**. Tout cela se **catégorifie** avec l'**homologie de Khovanov**.
—> Pedro Vaz, Elia Rizzo, Léo Schelstraete.
- Δ, J, P (et d'autres) peuvent être définis via des **représentations de groupes quantiques**
—> Pedro Vaz, Abel Lacabanne.
- Les définitions via **relations skein** de Δ, J, P s'étendent à des **entrelacs singuliers**, via les **invariants de type fini**.
- Les définitions via **relations skein** de Δ, J, P s'étendent à des **entrelacs dans d'autres variétés que S^3** , via la théorie des **modules skein**.
—> Pedro Vaz, Abel Lacabanne.

6.8. Solutions des exercices. Exercices 6.11 et 6.27.

Exercice 6.11 : Montrer que pour tout nœud K , on a $u(K) \leq \frac{1}{2}c(K)$.

Soit K un nœud.

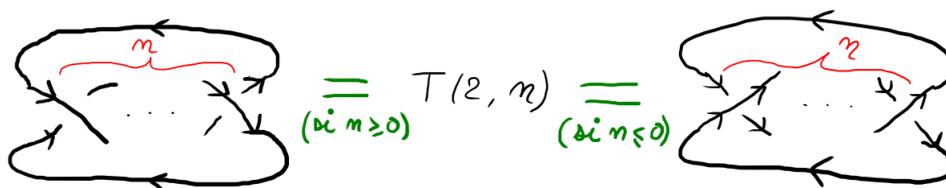
Pour tout diagramme D de K , si on peut passer de D à U en p changements de croisements, alors (par l'effet de l'image miroir sur un diagramme) avec les $c(D) - p$ autres changements on obtiendrait à la place U^* qui est équivalent à U .

Ainsi, pour tout diagramme D de K , on a $u(D) \leq \frac{1}{2}c(D)$.

Donc, pour tout diagramme D de K , par définition de $u(K)$, on a $u(K) \leq u(D) \leq \frac{1}{2}c(D)$.

Par conséquent, en prenant la borne inférieure parmi tous les D sur le terme de droite, et par définition de $c(K)$, on a $u(K) \leq \frac{1}{2}c(K)$.

Exercice 6.27 : On considère l'entrelacs torique $T(2, n)$.



- (1) Identifier $T(2, n)$ pour n entre -5 et 5 .
- (2) Montrer que $\sigma(T(2, n)) = -n + \text{signe}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- (3) Montrer que $u(T(2, n)) = \frac{|n| - 1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ **impair**.
- (4) Trouver une relation de récurrence pour $\Delta_{T(2, n)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- (5) Montrer que $g(T(2, n)) = \left\lfloor \frac{|n| - 1}{2} \right\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- (6) Trouver une relation de récurrence pour $J_{T(2, n)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- (7) Montrer que $\text{span}(J_{T(2, n)}(t)) = n$ pour $n \geq 2$.
- (8) Montrer que $c(T(2, n)) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

(Stratégie) Les relations connues entre invariants nous font comprendre que le (2) aidera pour le (3), le (4) pour le (5), et le (7) pour le (8). On peut anticiper que le (7) utilise le (6), et que les (4) et (6) utilisent un arbre résolvant. Enfin, la borne supérieure du (5) nécessite une surface de Seifert, qu'on aura construit pour le (2).

(1) $T(2, 0) = U \sqcup U$, $T(2, 1) = T(2, -1) = U$, $T(2, 2) = H_+$, $T(2, -2) = H_-$, $T(2, 3) = 3_1$, $T(2, -3) = 3_1^*$, $T(2, 4) = L4a1\{1\}$, $T(2, -4) = L4a1\{1\}^*$, $T(2, 5) = 5_1$ et $T(2, -5) = 5_1^*$.

Pour la suite on prendra $n \in \mathbb{N}$, quitte à passer à l'**image miroir**, car $T(2, -n) = T(2, n)^*$.

(2) Une matrice de Seifert intuitive (la surface d'algorithme ayant même forme générale

que pour l'entrelacs de Hopf et le trèfle au chapitre précédent) est $V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

de taille $n - 1$. On calcule $\sigma(T(2, n)) = \text{sign}(V + V^T) = -(n - 1)$, soit avec l'algorithme de Gauss, soit en remarquant que la forme quadratique associée est

$$q = -2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + \dots + x_{n-2}x_{n-1} - 2x_{n-1}^2 = -x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 - \dots - (x_{n-2} - x_{n-1})^2 - x_{n-1}^2$$

et est donc définie négative.

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$ impair, \leq vient du dessin et \geq du (2).

(4) Via la matrice de Seifert V :

$$\Delta_{T(2,n)}(t) = (1 - t)\Delta_{T(2,n-1)}(t) + t\Delta_{T(2,n-2)}(t).$$

Via un arbre résolvant et la Définition S (forme du polynôme de Conway) :

$$\nabla_{T(2,n)}(z) = z\nabla_{T(2,n-1)}(z) + \nabla_{T(2,n-2)}(z).$$

(5) Par la surface d'algorithme,

$$g(T(2, n)) \leq \frac{2 - 2 + n - \mu}{2} = \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor.$$

Par le (4),

$$n - 1 = \text{span}(\Delta_{T(2,n)}) \leq 2g(T(2, n)) + \mu(T(2, n)) - 1.$$

(6) Via un arbre résolvant : $J_{T(2,n)}(t) = \sqrt{t}(t - 1)J_{T(2,n-1)}(t) + t^2J_{T(2,n-2)}(t)$.

(7) On montre par récurrence grâce à (6) que degré minimal = $\frac{n - 1}{2}$ et degré maximal = $\frac{3n - 1}{2}$.

(8) On a $c(T(2, n)) \geq n$ par le (7).

D'autre part $c(T(2, n)) \leq n$ car $T(2, n)$ a un diagramme à n croisements.

Ou directement, on peut dire que $c(T(2, n)) = n$ car $T(2, n)$ est **alterné** et par le (7).

7. LE GROUPE D'UN ENTRELACS

7.1. Extérieurs d'entrelacs.

Définition 7.1. Soit L un entrelacs de S^3 .

On note $\nu L \cong \sqcup_{i=1}^{\mu(L)} (\mathbb{S}^1 \times \overset{\circ}{D}_2)$ un *voisinage tubulaire* (ouvert) de L (il en existe plusieurs). On peut par exemple en définir un point par point, où pour chaque point x de L on prend un petit disque normal à L en x (grâce au fait que L est lisse).

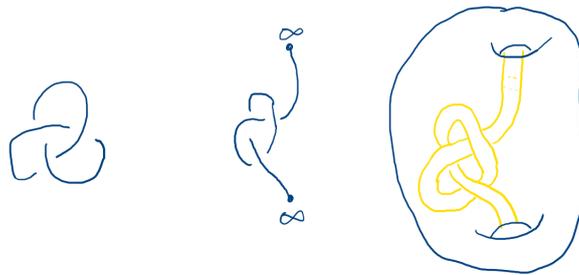
On note $C_L := S^3 \setminus L$ le *complémentaire* de L , qui est une variété ouverte.

On note enfin $E_L := S^3 \setminus \nu L$ l'*extérieur* de L , qui est une variété compacte à bord torique (∂E_L est une union disjointe de $\mu(L)$ tores).

Exemple 7.2. Pour le nœud trivial U , on a $C_U \cong \overset{\circ}{D}_2 \times \mathbb{S}^1$, et $E_U \cong D_2 \times \mathbb{S}^1$. On peut le voir en isotopant U comme une droite verticale dans \mathbb{R}^3 rencontrant le point ∞ en haut et en bas.

Exemple 7.3. Pour les entrelacs de Hopf, on a $E_{H_{\pm}} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

Plus généralement, l'image suivante décrit comment dessiner l'extérieur E_L comme une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Dans l'image L est un nœud (de trèfle) mais dans le cas où il y a plus de composantes, il suffit de creuser des tunnels supplémentaires appropriés.



7.2. Propriétés des extérieurs.

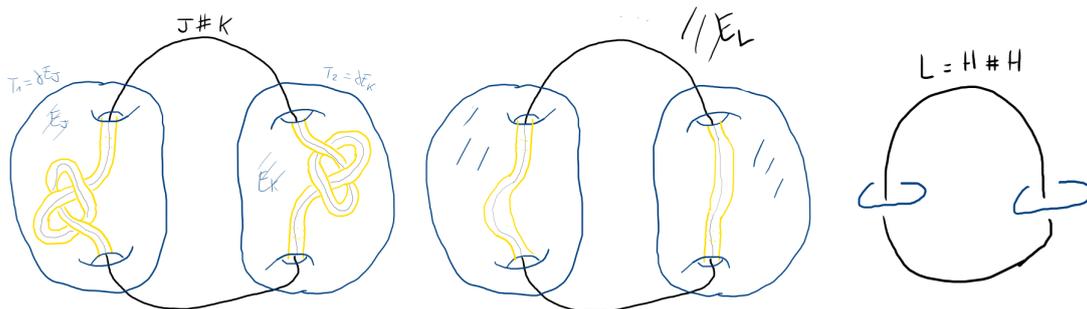
Définition 7.4. L'*entrelacs trousseau de clés* (keychain link) Tr_{n+1} à $n + 1$ composantes est la somme connexe de n entrelacs de Hopf (positifs) tous sur la même composante $Tr_{n+1} = H \sharp \dots \sharp H$.

L'extérieur d'un tel entrelacs est $E_{Tr_{n+1}} \cong S^1 \times \Sigma_{0,n+1}$.

Proposition 7.5. Dans $E_{J \sharp K}$ on trouve deux tores incompressibles (i.e. π_1 -injectifs) T_1, T_2 , qui décomposent $E_{J \sharp K}$ ainsi :

$$E_{J \sharp K} = E_J \cup_{T_1} E_{H \sharp H} \cup_{T_2} E_K.$$

La figure ci-après illustre ce qui précède avec $J = K = 3_1$. Le morceau non borné de la figure de gauche est homéomorphe au morceau non borné de la figure centrale ("le tunnel ne sait pas qu'il est noué"), et ce même morceau non borné de la figure centrale est clairement l'extérieur de l'entrelacs Tr_3 de la figure de droite.



Comme le montre la proposition suivante, l'homologie de l'extérieur d'un entrelacs ne contient pas beaucoup d'information, seulement le nombre de composantes.

Proposition 7.6 ($H_1(E, \mathbb{Z})$ "ne voit pas les croisements"). Soit K un nœud. Alors

$$H_0(E_K) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(E_K) \cong \mathbb{Z}, \quad H_{\geq 2}(E_K) = 0.$$

Soit L un entrelacs. Alors

$$H_0(E_L) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(E_L) \cong \mathbb{Z}^{\mu(L)}, \quad H_2(E_L) \cong \mathbb{Z}^{\mu(L)-1}, \quad H_{\geq 3}(E_L) = 0.$$

Démonstration. On utilise la suite exacte longue de Mayer-Vietoris avec la décomposition $\mathbb{S}^3 = (\nu K) \cup_T E_K$. On peut trouver les détails dans [BZ, Theorem 3.1] \square

On peut se demander si l'extérieur détecte l'entrelacs. En fait c'est le cas pour les nœuds non orientés :

Théorème 7.7 (Gordon-Luecke, [BZ] Theorem 3.19 and Remark 3.20). Soient J, K nœuds non orientés de \mathbb{S}^3 . Alors on a $J \sim K$ si et seulement s'il existe $E_J \xrightarrow{\sim} E_K$ un homéomorphisme respectant l'orientation.

Ce n'est en revanche pas le cas pour les entrelacs : il existe des entrelacs $L \approx L'$ mais tels que $E_L \cong E_{L'}$, comme ceux décrits sur la figure suivante.



7.3. Le groupe d'un entrelacs.

Définition 7.8. Soit L un entrelacs dans \mathbb{S}^3 . Alors $G_L := \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L, *) \cong \pi_1(E_L, *)$ est le groupe de L , un invariant.

Exemple 7.9. (1) $G_U \cong \mathbb{Z}$.

(2) $G_{H_{\pm}} \cong \mathbb{Z}^2$.

Proposition 7.10. Pour tout entrelacs L différent de U, H_+, H_- , le groupe G_L est non abélien.

Le groupe est un invariant puissant, mais difficile à manipuler.

7.4. Présentation par générateurs et relations.

Définition 7.11. Le groupe libre $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$ est l'ensemble des mots libres en les x_i^{\pm} , où la loi est la concaténation, et avec les relations $x_i x_i^{-1} \sim 1 \sim x_i^{-1} x_i$.

Exemple 7.12. $G_{U \sqcup U} \cong \mathbb{F}_2$.

Définition 7.13. Soient $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$ des mots en les x_i . On dit que $P = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ est une **présentation** du groupe G s'il existe un isomorphisme $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n) / \langle \langle r_1, \dots, r_k \rangle \rangle_{\text{normal}} \xrightarrow{\sim} G$.

Un *relateur* se note $r = s, rs^{-1} = 1$ ou rs^{-1} .

Définition 7.14. La *déficiencia* d'une présentation finie $P = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ d'un groupe G est

$$\text{def}(P) := n - k \in \mathbb{Z},$$

i.e. la différence entre le nombre de générateurs et le nombre de relations.

La *déficience* du groupe de présentation finie G est la déficience maximum possible d'une présentation P de G :

$$\text{def}(G) := \max_P (n - k) \in \mathbb{Z},$$

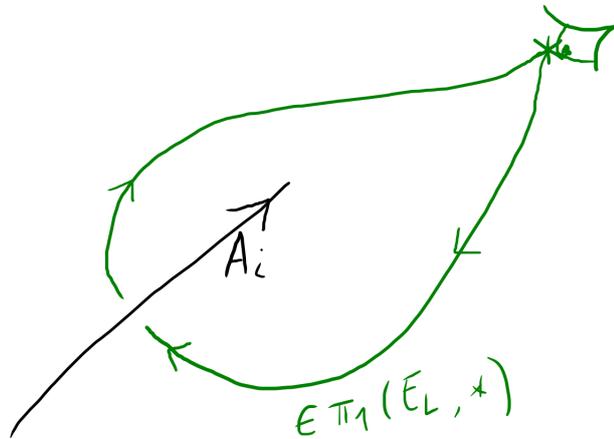
et c'est un invariant de G à isomorphisme de groupe près.

Proposition 7.15. *Si L est un entrelacs non scindé, alors $\text{def}(G_L) = 1$.*

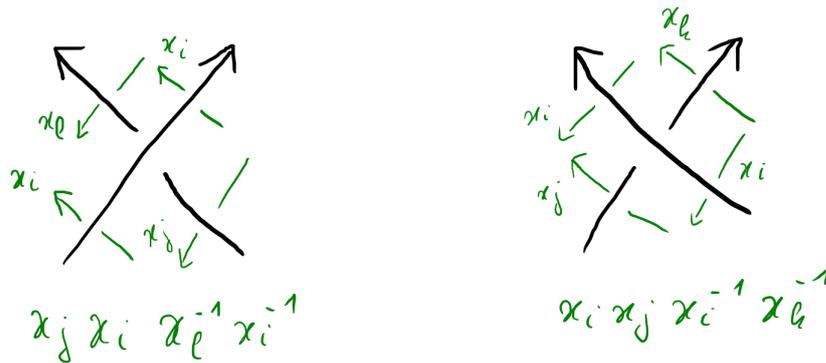
7.5. Présentation de Wirtinger.

Définition 7.16. Soit D diagramme d'un entrelacs L . On construit $P_W(D)$ une *présentation de Wirtinger* de $G_L = \pi_1(E_L, *)$ (où $*$ est un point base vivant au-dessus du plan du diagramme D) de la manière suivante :

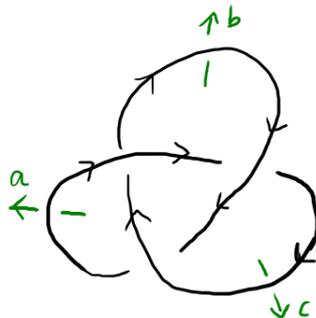
- Pour chaque arc A_1, \dots, A_n de D on définit un générateur x_i de $P_W(D)$. C'est la classe d'homotopie du lacet de E_L encerclant l'arc A_i avec nombre d'enlacement +1.



- Pour chaque croisement de D on définit un relateur de $P_W(D)$ à 4 lettres, comme décrit sur la figure ci-après.



Exemple 7.17. Avec le diagramme suivant du nœud de trèfle 3_1 :



on trouve la présentation de Wirtinger $P_W(D) = \langle a, b, c \mid ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$.

Proposition 7.18 ([BZ] Corollary 3.6). *Soit L un entrelacs, et P une présentation de Wirtinger associée à un diagramme de L . Alors chaque relateur de P est conséquence de tous les autres.*

Remarque 7.19. En conséquence de la Proposition 7.18, on appellera parfois *présentation de Wirtinger* une présentation de Wirtinger au sens précédent à laquelle on a retiré un des relateurs.

Définition 7.20. Les *transformations de Tietze* sur les présentations finies de groupes sont les opérations suivantes :

- Ajout ou retrait d'un relateur redondant : $P = \langle x_i \mid r_j \rangle \rightsquigarrow \langle x_i \mid r_j, R \rangle$, avec $R \in \langle \langle r_j \rangle \rangle_{\mathbb{F}(x_i)}$.
- Ajout d'un générateur : $P = \langle x_i \mid r_j \rangle \rightsquigarrow \langle x_i, X \mid r_j, w(x_i)X^{-1} \rangle$, avec $w(x_i) \in \mathbb{F}(x_i)$.
- Retrait d'un générateur : $P = \langle x_i, X \mid r_j, w(x_i)X^{-1} \rangle \rightsquigarrow \langle x_i \mid r'_j \rangle$, avec X remplacé par $w(x_i) \in \mathbb{F}(x_i)$ dans les r_j .

En particulier : remplacer r_j par r_j^{-1} ou par $w(x_i)r_jw(x_i)^{-1}$ peut s'écrire comme composition de transformations de Tietze.

Théorème 7.21 (Tietze, 1908). *Deux présentations finies P, Q présentent des groupes isomorphes ssi on peut passer de P à Q via des transformations de Tietze.*

Exercice 7.22. *En utilisant la présentation $P = \langle a, b, c \mid ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$, montrer que G_{3_1} admet également les présentations :*

- (1) $P' = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$. (On pourra enlever c de P).
- (2) $P'' = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$. (On pourra essayer $x = bab$ et $y = ab$).

7.6. Système périphérique d'un nœud.

Définition 7.23. Soit K un nœud de \mathbb{S}^3 , soit $V = \nu K$ un voisinage tubulaire de K et $E = E_K$ l'extérieur de K . Sur le tore $T = \partial V = \partial E$ il existe deux courbes m_K (le méridien) et l_K (la longueur) (uniques à isotopies de T près) vérifiant :

- (1) m_K et l_K s'intersectent en un point,
- (2) dans V , $m_K \sim 0$ et $l_K \sim K$,
- (3) dans E , $l_K \sim 0$,
- (4) dans \mathbb{S}^3 , $\text{lk}(m_K, K) = 1$ et $\text{lk}(l_K, K) = 0$.

On appelle parfois *longitude préférée* un tel l_K et *longitude* un l qui ne vérifie pas (3) et (4).

On appelle *système périphérique de K* le triplet $(G_K, [m_K], [l_K])$ formé du groupe et de deux de ses éléments, à savoir les classes d'homotopies du méridien et de la longueur.

Théorème 7.24 (Waldhausen, [BZ] Theorem 3.16). *Le système périphérique $(G_K, [m_K], [l_K])$ d'un nœud K est un **invariant complet** de nœuds.*

Autrement dit, pour tous nœuds J, K , on a :

$$(J \sim K) \Leftrightarrow (\exists \phi : G_J \xrightarrow{\sim} G_K, \phi(m_J) = m_K \text{ et } \phi(l_J) = l_K).$$

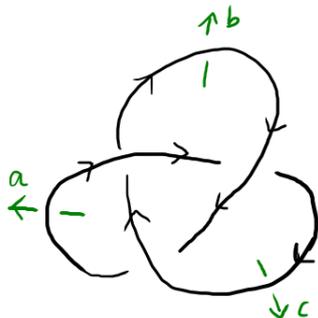
Définition 7.25. L'*entortillement* (*writhe* en anglais) $e(D)$ d'un diagramme D de nœud est la somme des signes des croisements de D .

Proposition 7.26 ([BZ] Remark 3.14). *Soit D un diagramme d'un nœud K . On peut calculer la classe d'homotopie de la longueur $[l_K]$ de la manière suivante :*

- On fixe un point p sur D , de méridien associé m_K le générateur de Wirtinger de l'arc où est p .

- En parcourant K en commençant au point p , on liste successivement chaque générateur de Wirtinger (resp. son inverse) correspondant à un arc de D qu'on traverse par-dessous, l'arc en question allant de gauche à droite (resp. de droite à gauche). On s'arrête une fois de retour à p .
- La longueur $[l_K]$ est alors égale au produit (dans l'ordre) des termes listés à l'étape précédente, qu'on multiplie enfin par $m_K^{-e(D)}$. (Cette dernière étape garantit qu'on obtient la longueur préférée).

Exemple 7.27. Avec le diagramme suivant du nœud de trèfle 3_1 , d'entortillement $e = 3$,



et la présentation de Wirtinger $P_W(D) = \langle a, b, c \mid ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$, on trouve la paire méridien-longitude suivante :

$$m = b, \quad l = cbab^{-3},$$

en prenant le point p sur l'arc du haut.

7.7. Rappels sur l'abélianisation.

Définition 7.28. Soit G un groupe. Le commutateur de deux éléments $g, h \in G$ est $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Le groupe des commutateurs G' (ou groupe dérivé) du groupe G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs (c'est un sous-groupe normal de G). L'abélianisation de G est le quotient $\alpha_G : G \twoheadrightarrow G/G' =: G^{ab}$, vers l'abélianisé G^{ab} .

Pour K un nœud, l'abélianisation $\alpha_K = \alpha_{G_K}$ est le morphisme de Hurewicz :

$$\alpha_K : G_K = \pi_1(E_K) \twoheadrightarrow H_1(E_K) = G_K^{ab} \cong \mathbb{Z}.$$

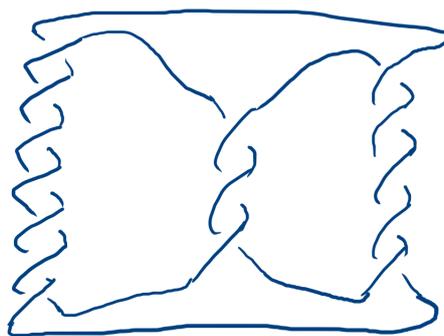
On a de plus $\alpha_K(m_K) = 1$ et $\alpha_K(l_K) = 0$ pour toute paire méridien-longitude (m_K, l_K) .

7.8. Distinguer l'inverse ou l'image miroir. On peut caractériser le fait qu'un nœud soit inversible ou amphichéral d'un point de vue de théorie des groupes :

Proposition 7.29 ([BZ] Proposition 3.18). Soit K un nœud dans \mathbb{S}^3 de système périphérique (G, m, l) . Alors :

- (1) $K \sim -K$ ssi il existe un automorphisme $\phi : G \xrightarrow{\sim} G$ tel que $\phi(m) = m^{-1}$ et $\phi(l) = l^{-1}$.
- (2) $K \sim K^*$ ssi il existe un automorphisme $\phi : G \xrightarrow{\sim} G$ tel que $\phi(m) = m^{-1}$ et $\phi(l) = l$.

Théorème 7.30 (Trotter 1963). Il existe une infinité de nœuds **non inversibles**.



Un exemple est le nœud pretzel $P(7, 3, 5)$ ci-dessus.

Exercice 7.31 (Distinguer 3_1 et 3_1^* ([BZ] E.3.9)). Rappelons les trois présentations de G_{3_1} mentionnées dans les sections précédentes :

- $P = \langle a, b, c \mid ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$
- $P' = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$.
- $P'' = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$.

On définit $\rho : G_{3_1} \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ par $X := \rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y := \rho(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que ρ induit une représentation de groupes.
- (2) En déduire que G_{3_1} n'est pas abélien et que $3_1 \neq U$.
- (3) Montrer que $\rho(Z(G_{3_1})) = \{\pm Id\}$.
On admet ensuite que le centre de G_{3_1} est le sous-groupe infini cyclique $Z(G_{3_1}) = \langle z \rangle_{G_{3_1}}$ engendré par l'élément $z = x^2 = y^3$.
- (4) Prenons le méridien $m = b = xy^{-1}$ et la longitude $l = cbab^{-3}$. Montrer que $l = b^{-2}zb^{-4}$.
- (5) Supposons qu'il existe $\phi : G_{3_1} \xrightarrow{\sim} G_{3_1}$ avec $\phi(m) = m^{-1}$ et $\phi(l) = l$. Montrer qu'alors $\rho(\phi(z)) \notin \{\pm Id\}$. Conclure.

7.9. Solutions des exercices. Exercices 7.22 et 7.31.

Exercice 7.22 : En utilisant la présentation $P = \langle a, b, c \mid ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$, montrer que G_{3_1} admet également les présentations :

- (1) $P' = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$. (On pourra enlever c de P).
- (2) $P'' = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$. (On pourra essayer $x = bab$ et $y = ab$).

(1) On peut passer de P à P' via transformations de Tietze de la manière suivante :

- De $P = \langle a, b, c \mid ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$ à $\langle a, b, c \mid ab = bc, ca = ab \rangle$, par retrait du relateur redondant $bca^{-1}c^{-1}$ qui est bien conséquence des deux autres :

$$bca^{-1}c^{-1} = (abc^{-1}b^{-1})^{-1} (cab^{-1}a^{-1})^{-1}$$

- On passe de $\langle a, b, c \mid ab = bc, ca = ab \rangle$ à $\langle a, b \mid b^{-1}aba = ab \rangle$ en enlevant le générateur c et le relateur $ab = bc$ (équivalent par conjugaison à $c = b^{-1}ab$) et en remplaçant c par le mot $b^{-1}ab$ dans l'autre relateur.

- On conclut en modifiant le relateur par conjugaison en le relateur $aba = bab$.

(2) On peut passer de P' à P'' via transformations de Tietze de la manière suivante :

- On passe de $P' = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$ à $\langle a, b, x, y \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, babx^{-1}, aby^{-1} \rangle$ en ajoutant deux générateurs et les relateurs les définissant comme mots en a, b .

- Depuis la présentation $\langle a, b, x, y | abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, babx^{-1}, aby^{-1} \rangle$ on ajoute le relateur redondant $xyy^{-1}y^{-1}y^{-1}$, qui est en effet égal à un produit de conjugués des autres relateurs ou de leurs inverses :

$$xyy^{-1}y^{-1}y^{-1} = (babx^{-1})^{-1} \cdot (abab^{-1}a^{-1}b^{-1})^{-1} \cdot (abababx^{-1}) (babx^{-1})^{-1} (abababx^{-1})^{-1} \\ \cdot (aby^{-1}) \cdot (y(aby^{-1})y^{-1}) \cdot (y^2(aby^{-1})y^{-2}).$$

- Par l'égalité précédente, on voit que le relateur $abab^{-1}a^{-1}b^{-1}$ est conséquence de $babx^{-1}, aby^{-1}$ et $xyy^{-1}y^{-1}y^{-1}$. On peut donc le retirer et arriver à la présentation $\langle a, b, x, y | xxy^{-1}y^{-1}y^{-1}, babx^{-1}, aby^{-1} \rangle$.
- Via ajout puis retrait de relateur, on peut de même remplacer le relateur $babx^{-1}$ par le relateur $xy^{-1}b^{-1}$, ce qui permet d'exprimer b en fonction de x, y . On peut ensuite retirer le générateur b et le relateur $xy^{-1}b^{-1}$ précédent pour arriver à la présentation $\langle a, x, y | xxy^{-1}y^{-1}y^{-1}, axy^{-1}y^{-1} \rangle$.
- Enfin on retire le générateur a et le relateur $axy^{-1}y^{-1}$ pour arriver à la présentation $P'' = \langle x, y | x^2 = y^3 \rangle$ souhaitée.

Exercice 7.31 : Rappelons les trois présentations de G_{3_1} mentionnées dans les sections précédentes :

- $P = \langle a, b, c | ab = bc, bc = ca, ca = ab \rangle$
- $P' = \langle a, b | aba = bab \rangle$.
- $P'' = \langle x, y | x^2 = y^3 \rangle$.

On définit $\rho : G_{3_1} \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ par $X := \rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y := \rho(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que ρ induit une représentation de groupes.
- (2) En déduire que G_{3_1} n'est pas abélien et que $3_1 \neq U$.
- (3) Montrer que $\rho(Z(G_{3_1})) = \{\pm Id\}$.
On admet ensuite que le centre de G_{3_1} est le sous-groupe infini cyclique $Z(G_{3_1}) = \langle z \rangle_{G_{3_1}}$ engendré par l'élément $z = x^2 = y^3$.
- (4) Prenons le méridien $m = b = xy^{-1}$ et la longitude $l = cbab^{-3}$. Montrer que $l = b^{-2}zb^{-4}$.
- (5) Supposons qu'il existe $\phi : G_{3_1} \xrightarrow{\sim} G_{3_1}$ avec $\phi(m) = m^{-1}$ et $\phi(l) = l$. Montrer qu'alors $\rho(\phi(z)) \notin \{\pm Id\}$. Conclure.

(1) On a bien la relation $X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Y^3$ dans l'espace d'arrivée, donc ρ induit une représentation de groupes.

(2) On a $XY = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = YX$ donc $\rho(G_{3_1})$ n'est pas abélien, donc G_{3_1} n'est pas abélien non plus. Comme $G_U = \mathbb{Z}$ est abélien, on a donc $G_{3_1} \neq G_U$. Comme le groupe est un invariant de nœuds, on a donc $3_1 \neq U$.

(3) On a $Id = \rho(1)$ et $-Id = \rho(z)$ où $z = x^2 = y^3$ par le (1). Les éléments $z = x^2 = y^3$ et 1 sont dans le centre $Z(G_{3_1})$, d'où $\{\pm Id\} \subset \rho(Z(G_{3_1}))$.

Soit maintenant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \rho(Z(G_{3_1}))$, montrons que $A = \pm Id$. On a nécessairement $AX = XA$, i.e. $a = d$ et $c = -b$. Or $ad - bc = 1$ car $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, donc $a^2 + b^2 = 1$, donc $A = \pm Id$ ou $A = \pm X$. Or on doit avoir $AY = YA$ car A est dans l'image du centre, donc A ne peut pas être égal à $\pm X$ comme on l'a démontré au (2). D'où $A = \pm Id$ et la deuxième inclusion est démontrée.

(4) On a

$$l = cbab^{-3} = (b^{-1}ab)bab^{-3} = b^{-2}(babbab)b^{-4} = b^{-2}zb^{-4}.$$

(5) On a $\phi(b) = \phi(m) = m^{-1} = b^{-1}$, donc

$$b^{-2}zb^{-4} = l = \phi(l) = b^2\phi(z)b^4,$$

donc $\phi(z) = b^{-4}zb^{-8} = zb^{-12}$. Donc $\rho(\phi(z)) = \rho(z)\rho(b)^{-12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -12 & -1 \end{pmatrix} \notin \{\pm Id\}$.

Or, en tant qu'automorphisme de G_{3_1} , ϕ doit préserver son centre. On a donc une contradiction avec le (3).

En conclusion, l'hypothèse de début du (5) est fautive, donc 3_1 n'est pas amphichéral.

8. MODULES D'ALEXANDER

8.1. Matrice de présentation d'un module.

Définition 8.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe associé à G est

$$\mathbb{Z}G := \left\{ \sum_{g \in G} n_g \cdot g \mid n_g \in \mathbb{Z}, n_g \neq 0 \text{ pour un nombre fini de } g \right\}.$$

Exemple 8.2. Pour $G = 1$, $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}$.

Exemple 8.3. Pour $G = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent à une variable et à coefficients entiers, noté R_t .

Exemple 8.4. Pour $G = \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[t_1^{\mathbb{Z}} \dots t_n^{\mathbb{Z}}] = \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent à n variables et à coefficients entiers, noté R_{t_1, \dots, t_n} ou R_n .

Dans la suite de ce chapitre, on va considérer des R -modules M , où R sera un anneau de groupe $R = \mathbb{Z}G$, ce qui équivaut à demander que M soit un groupe abélien (i.e. un \mathbb{Z} -module) muni d'une action \mathbb{Z} -linéaire de G .

Définition 8.5. Soit M un R -module. Une *présentation finie* de M est une suite exacte de R -modules

$$R^c \xrightarrow{A} R^l \rightarrow M \rightarrow 0,$$

où R^c et R^l sont munis de bases canoniques et $A \in M_{l,c}(R)$ (la *matrice de présentation* de M). On a alors notamment $M \cong R^l / AR^c$.

Exemple 8.6. Le R -module $M = 0 = R/R$ est présenté par la matrice (1).

Exemple 8.7. Le R -module $M = R = R/0.R$ est présenté par la matrice (0).

Exemple 8.8. Le groupe abélien $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est présenté par la matrice (n).

Exemple 8.9. Le R_t -module $M = \mathbb{Z} = R_t / (t-1)R_t$ est présenté par la matrice ($t-1$).

Exemple 8.10. L'idéal non principal $M = \langle t_1 - 1, t_2 - 1 \rangle_{R_{t_1, t_2}}$ admet la matrice de présentation $A = \begin{pmatrix} t_1 - 1 \\ t_2 - 1 \end{pmatrix}$. En effet, le morphisme

$$(R_{t_1, t_2})^2 / (A \cdot R_{t_1, t_2}) \rightarrow R_{t_1, t_2}, [(P(t_1, t_2), Q(t_1, t_2))] \mapsto (t_2 - 1)P - (t_1 - 1)Q$$

est bien injectif, et d'image l'idéal M .

Remarque 8.11. Quitte à rajouter des colonnes nulles à une matrice de présentation, on peut supposer que $c \geq l$.

Proposition 8.12. Deux matrices A, B à coefficients dans R présentent des R -modules isomorphes si et seulement si A et B sont reliées par un nombre fini des opérations suivantes :

(1) Permutation des lignes ou des colonnes,

(2) $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(3) Ajout ou retrait d'une **colonne** de zéros,

(4) Ajout à une ligne (resp. colonne) un scalaire fois une autre ligne (resp. colonne).

Remarquons que la multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un inversible de R est une conséquence des 4 opérations précédentes. Cette dernière opération est parfois mentionnée dans la littérature dans l'énoncé de cette proposition.

Définition 8.13. Pour $r \in \mathbb{N}$, le r -ème idéal élémentaire d'un R -module M (de matrice de présentation $A \in M_{l,c}(R)$) est

$$\mathcal{E}_r(M) := \langle (l - r + 1) - \text{mineurs de } A \rangle_R \subset R.$$

En particulier

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}_0(M) \\ &\subset \mathcal{E}_1(M) = \langle \text{mineurs maximaux de } A \rangle_R \\ &\subset \dots \\ &\subset \mathcal{E}_l(M) = \langle \text{coefficients de } A \rangle_R \\ &\subset \mathcal{E}_{l+1}(M) = R. \end{aligned}$$

Si M admet une matrice de présentation A carrée, on appelle *ordre de M* le déterminant

$$\text{ord}(M) := \det(A) \in R$$

(défini aux inversibles de R^* près). En particulier dans ce cas $\mathcal{E}_1(M) = \det(A) \cdot R$.

Exemple 8.14. Pour $R = \mathbb{Z}$, $A = (n)$ (avec $n \in \mathbb{N}$) et $M = \langle a \mid na = 0 \rangle \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, on a $\text{ord}(M) = n$, donc l'ordre de M en tant que R -module coïncide avec l'ordre de M au sens classique de la théorie des groupes fini (c'est-à-dire le cardinal de M).

8.2. Revêtements et groupes. Soit X un CW-complexe de point base $p \in X$. On rappelle que

- $G = \pi_1(X, p) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = \gamma(1) = p\}/\text{homotopie}$.
- $\tilde{X} = \{c: [0, 1] \rightarrow X, c(0) = p\}/\text{homotopie}$ est le *revêtement universel de X* .
- $G \curvearrowright \tilde{X}$ par $[\gamma] \cdot [c] := [\gamma c]$.

On rappelle également que pour X de groupe fondamental G , il y a bijection entre

- les suites exactes $1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 1$,
- les revêtements réguliers $X^H \rightarrow X$,

avec $X^H = \tilde{X}/H$ et $H = \pi_1(X^H)$.

8.3. Module d'Alexander d'un nœud. Soit K nœud de \mathbb{S}^3 , E son extérieur, et G son groupe.

Définition 8.15. Le *revêtement infini cyclique* \hat{E} de E est le revêtement régulier associé à la suite exacte

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \cong \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

Ici $G/G' \cong t^{\mathbb{Z}}$ agit sur \hat{E} , donc $R_t = \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ agit sur le complexe de chaînes cellulaires $C_*(\hat{E}, \mathbb{Z})$ et sur l'homologie $H_*(\hat{E}, \mathbb{Z})$.

Définition 8.16. Le *module d'Alexander de K* est $\mathcal{A}_K := H_1(\hat{E}_K, \mathbb{Z})$ vu comme R_t -module.

Exemple 8.17. Pour $K = U$, on a $E \cong \mathbb{S}^1 \times D^2$ et $G \cong \mathbb{Z}$. Ici le revêtement infini cyclique coïncide avec le revêtement universel : $\hat{E} = \tilde{E} \cong \mathbb{R} \times D^2$, qui est contractible, donc

$$\mathcal{A}_U = H_1(\hat{E}_U, \mathbb{Z}) = 0.$$

Proposition 8.18. Pour tout nœud K , \mathcal{A}_K a une matrice de présentation carrée. (On verra plus loin qu'une telle matrice est $tV - V^T$ avec V matrice de Seifert de K).

Définition 8.19 (Définition C). Soit K un nœud. Le polynôme d'Alexander $\Delta_K(t)$ (défini à \pm près) est égal à l'ordre du module d'Alexander de K :

$$\Delta_K(t) = \text{ord}(\mathcal{A}_K).$$

Exemple 8.20. Pour $K = U$, on a $\mathcal{A}_U = 0 = R_t/(1)R_t$, donc (1) est une matrice de présentation de \mathcal{A}_U et

$$\Delta_U(t) = \text{ord}(\mathcal{A}_U) = \det((1)) = 1.$$

8.4. Le revêtement infini cyclique via une surface de Seifert. Soit K un nœud et Σ une surface de Seifert de K . Notons $S = \Sigma \cap E$. Remarquons que Σ se rétracte par déformation sur S , et que le bord de S est $\partial S = l_K$ une longitude préférée de K .

On prend un voisinage tubulaire de S

$$\nu S \cong S \times [-1, 1],$$

avec $S \cong S \times \{0\}$. On note $S^+ := S \times \{1\}$ et $S^- := S \times \{-1\}$. Le bord de νS est égal à l'union de S^+ , de S^- et du cylindre $\partial S \times [-1, 1]$.

Définissons maintenant $F := E \setminus \nu S$, c'est-à-dire l'extérieur du nœud "tranché au niveau de la surface de Seifert". Le bord ∂F de F contient notamment S^+ et S_- . Remarquons qu'en recollant S^+ à S^- (de manière intuitive), on retrouve E :

$$F/(S^- \xrightarrow{id_S} S^+) \cong E.$$

Proposition 8.21. *Le revêtement infini cyclique \hat{E} de E est obtenu en recollant une infinité de copies de F notées $F^{(n)}$ (indexées par $n \in \mathbb{Z}$), où l'on recolle $S^{+, (n)}$ à $S^-, (n+1)$:*

$$\hat{E} \cong \left(\sqcup_{n \in \mathbb{Z}} F^{(n)} \right) / (S^{+, (n)} \xrightarrow{id_S} S^-, (n+1)).$$

8.5. Module et polynôme d'Alexander.

Théorème 8.22 ([BZ], Theorem 8.14). *Soit K un nœud de \mathbb{S}^3 et V une matrice de Seifert de K . Alors $tV - V^T$ est une matrice de présentation du $\mathbb{Z}[t^{\pm}]$ -module $\mathcal{A}_K = H_1(\hat{E}_K, \mathbb{Z})$.*

En conséquence, les invariants de nœuds définis dans la Définition C et dans la Définition S coïncident.

Démonstration. On utilise la Proposition 8.21 et la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en décomposant \hat{E}_K en $\sqcup_{n \text{ pair}} F^{(n)}$ et $\sqcup_{n \text{ impair}} F^{(n)}$. Une preuve détaillée se trouve dans [BZ, Theorem 8.14]. \square

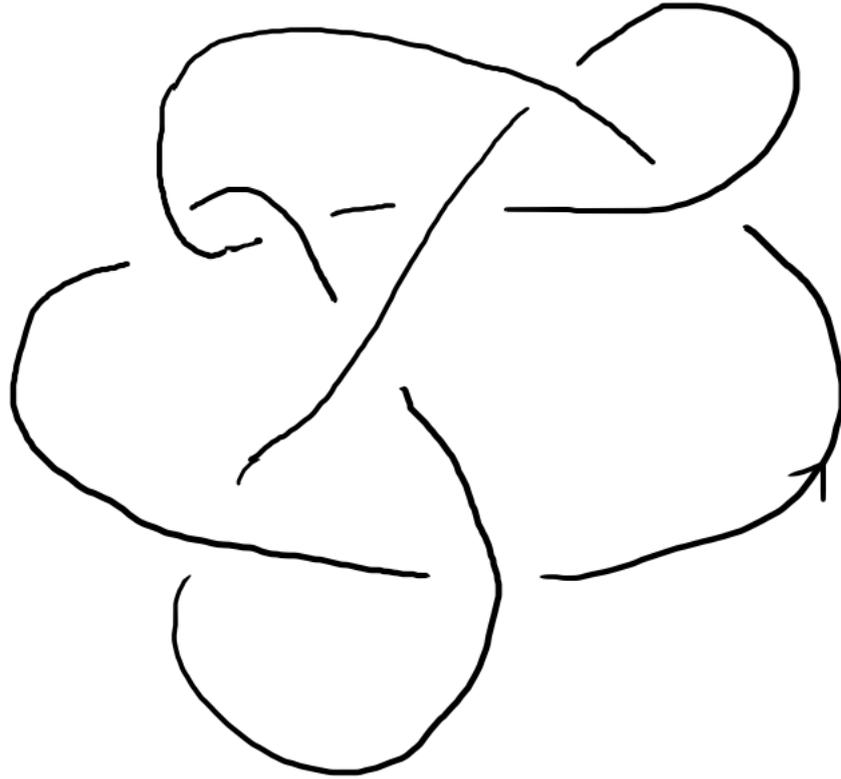
Remarque 8.23. Via la correspondance entre les revêtements réguliers de E et les sous-groupes distingués de $\pi_1(E)$, la Définition C du polynôme d'Alexander peut s'interpréter purement en terme de théorie des groupes, dans la Définition G suivante.

Définition 8.24 (Définition G). Soit K un nœud. Le polynôme d'Alexander $\Delta_K(t)$ est l'ordre de G'_K/G''_K vu comme un $\mathbb{Z}[G_K/G'_K]$ -module.

Exercice 8.25. Soit $J = 3_1 \# 3_1^*$



et K le nœud dessiné ci-après.



On va montrer que le module d'Alexander distingue J et K contrairement au polynôme d'Alexander.

- (1) Retrouver le nom de K dans les tables de nœuds, et expliquer comment faire.
- (2) Montrer que $\Delta_K(t) = (1 - t + t^2)^2 = \Delta_J(t)$.
- (3) Montrer que $\mathcal{A}_K = R_t/(1-t+t^2)^2 R_t$ et que $\mathcal{A}_J = R_t/(1-t+t^2)R_t \oplus R_t/(1-t+t^2)R_t$.
- (4) Quels autres invariants aurait-on pu utiliser pour distinguer J et K ?

8.6. Cas des entrelacs, cas univarié. Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$, $E = E_L$, $G = G_L = \pi_1(E_L)$, et l'abélianisation $\alpha_L : G \rightarrow G/G' \cong \mathbb{Z}^\mu$.

Définition 8.26. L'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}^\mu \rightarrow \mathbb{Z}$ est le morphisme envoyant chaque vecteur de la base canonique de \mathbb{Z}^μ sur $1 \in \mathbb{Z}$.

Du point de vue multiplicatif, on écrit $\epsilon : t_1^{\mathbb{Z}} \dots t_\mu^{\mathbb{Z}} \rightarrow t^{\mathbb{Z}}$, $t_i \mapsto t$.

Définition 8.27. Soit L un entrelacs. Soit $\hat{E}_L^{\mathbb{Z}}$ le revêtement infini cyclique de E_L associé à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow \text{Ker}(\epsilon \circ \alpha_L) \rightarrow G \xrightarrow{\epsilon \circ \alpha_L} \mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

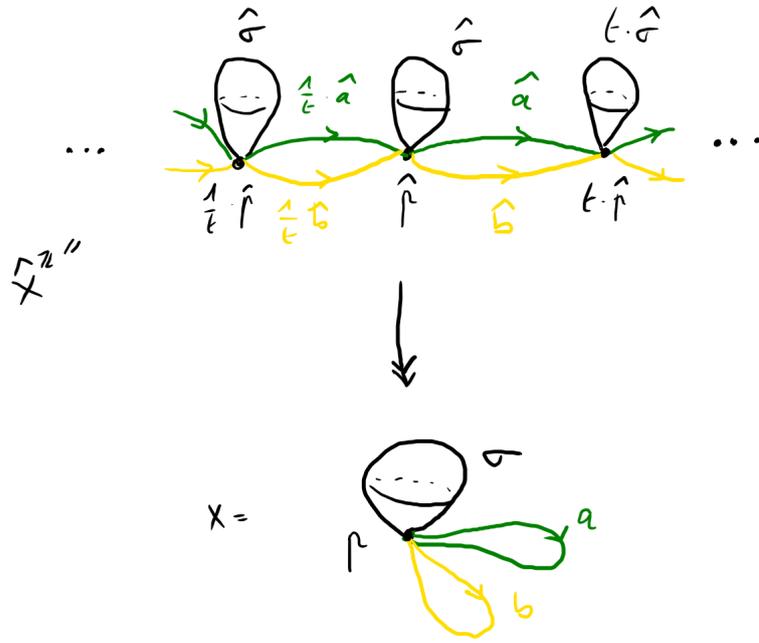
Le module d'Alexander univarié de L est $\mathcal{A}_L^{\mathbb{Z}} := H_1(\hat{E}_L^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ vu comme R_t -module.

Définition 8.28 (Définition C, cas univarié pour entrelacs). Soit L un entrelacs. Alors $\Delta_L(t)$ est l'ordre de $\mathcal{A}_L^{\mathbb{Z}}$, i.e. le pgcd des éléments de l'idéal élémentaire $\mathcal{E}_1(\mathcal{A}_L^{\mathbb{Z}})$.

Remarque 8.29. On a encore le fait que $tV - V^T$ présente le module $\mathcal{A}_L^{\mathbb{Z}}$ pour toute matrice de Seifert V de l'entrelacs L .

Exemple 8.30. Pour $L = H$ l'entrelacs de Hopf (non orienté), on a $E_L \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Un raisonnement topologique minutieux à l'aide d'une surface de Seifert de L nous permet de voir que $\hat{E}_L^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \times \mathbb{R}$, donc $\mathcal{A}_L^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = R_t/(t-1)R_t$ et $\Delta_H(t) \doteq t-1$.

Exercice 8.31. Soit $L = U \sqcup U$. Montrer que E_L est homotopiquement équivalent à un bouquet de deux cercles et d'une sphère \mathbb{S}^2 .



Via une décomposition cellulaire du bouquet $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ en un point p , deux 1-cellules a, b et une 2-cellule σ , on trouve une structure cellulaire sur $\hat{X}^{\mathbb{Z}}$, et le calcul de l'homologie cellulaire nous donne $H_1(\hat{X}^{\mathbb{Z}}) = R_t(\hat{a} - \hat{b}) \cong R_t$, donc $\Delta_{U \sqcup U}(t) = \text{ord}(\mathcal{A}_{U \sqcup U}^{\mathbb{Z}}) = \text{ord}(H_1(\hat{X}^{\mathbb{Z}})) = 0$.

8.7. Cas des entrelacs, cas multivarié.

Définition 8.32. Soit L un entrelacs. Soit \hat{E}_L^{μ} le revêtement maximal abélien de E_L associé à la suite exacte courte

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \xrightarrow{\alpha_L} G/G' \cong \mathbb{Z}^{\mu} \rightarrow 1.$$

Soit X un CW-complexe de dimension 2 ayant une seule 0-cellule et homotopiquement équivalent à E_L (un tel X existe car E_L est un extérieur d'entrelacs). Soit \hat{X}^{μ} le revêtement maximal abélien de X muni de la structure de CW-complexe induite, et $\hat{X}^{\mu,0}$ le 0-squelette correspondant.

Le module d'Alexander multivarié de L est $\mathcal{A}_L^{\mu} := H_1(\hat{X}^{\mu}, \hat{X}^{\mu,0}, \mathbb{Z})$ vu comme R_{μ} -module. (On rappelle que $R_{\mu} = \mathbb{Z}[t_1^{\pm}, \dots, t_{\mu}^{\pm}]$).

Remarque 8.33 ([BZ], Section 9). En étudiant la suite exacte longue en homologie associée à la paire $(\hat{X}^{\mu}, \hat{X}^{\mu,0})$, on trouve la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_1(\hat{X}^{\mu}) \rightarrow H_1(\hat{X}^{\mu}, \hat{X}^{\mu,0}) \rightarrow \langle t_1 - 1, \dots, t_{\mu} - 1 \rangle_{R_{\mu}} \rightarrow 0,$$

où l'idéal $\langle t_1 - 1, \dots, t_{\mu} - 1 \rangle_{R_{\mu}}$ est le noyau du morphisme d'anneaux $R_{\mu} \rightarrow \mathbb{Z}$, $t_i \mapsto 1$. Cette suite exacte courte ne scinde pas en général.

Dans le cas des nœuds ou du module univarié d'un entrelacs, le terme de droite de la suite exacte précédente devient $(t - 1)R_t$, et la suite scinde. Ainsi, on peut identifier $H_1(\hat{X}^{\mathbb{Z}}) \cong H_1(\hat{E}_L^{\mathbb{Z}})$ comme un sous-module canonique de $H_1(\hat{X}^{\mathbb{Z}}, \hat{X}^{\mathbb{Z},0})$, et il est donc plus logique de définir ce module plus simple comme le *module d'Alexander*.

Cette différence de définitions et de propriétés entre les cas univarié et multivarié expliquera des légères différences d'un terme $(t - 1)$ dans certaines formules à venir.

Définition 8.34 (Définition C, cas multivarié pour entrelacs). Soit L un entrelacs. Alors le premier idéal élémentaire de son module d'Alexander multivarié vérifie

$$\mathcal{E}_1(\mathcal{A}_L^{\mu}) = \langle t_1 - 1, \dots, t_{\mu} - 1 \rangle_{R_{\mu}} \cdot I,$$

où I est un idéal principal de R_{μ} .

Le polynôme d'Alexander multivarié de L $\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu)$ est défini comme un générateur de l'idéal I précédent, ou de manière équivalente comme le pgcd des éléments de $\mathcal{E}_1(\mathcal{A}_L^\mu)$. C'est un invariant de L , défini à multiplication par un inversible de R_μ près, i.e. par un élément de $\pm t_1^{\mathbb{Z}} \dots t_\mu^{\mathbb{Z}}$ (on notera encore \doteq cette relation d'équivalence).

On verra au chapitre suivant comment obtenir des matrices de présentation du module d'Alexander multivarié (et donc comment calculer son premier idéal élémentaire), à l'aide du calcul de Fox.

Exemple 8.35. Pour $L = H$ l'entrelacs de Hopf, le revêtement maximal abélien est le revêtement universel : $\hat{E}_L^2 = \widetilde{E}_L = \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.

On a $E_L \cong X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, le tore muni de la structure cellulaire classique à un point p , deux cercles et une 2-cellule. Ainsi le revêtement maximal abélien est $E_L^2 = \mathbb{R}^2$, et son 0-squelette est $E_L^{2,0} = \mathbb{Z}^2 = t_1^{\mathbb{Z}} t_2^{\mathbb{Z}} \cdot \hat{p}$.

Comme $H_1(\hat{X}^2) = 0$, la suite exacte courte de la Remarque 8.33 implique que $\mathcal{A}_L^2 \cong \langle t_1 - 1, t_2 - 1 \rangle$. Or on peut vérifier que $\langle t_1 - 1, t_2 - 1 \rangle$ admet la matrice de présentation $\begin{pmatrix} t_2 - 1 \\ t_1 - 1 \end{pmatrix}$, cf Exemple 8.10. Donc $\Delta_L(t_1, t_2) = \text{pgcd}(t_2 - 1, 1 - t_2) = 1$.

Exemple 8.36. Pour $L = U \sqcup U$, on se ramène à $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ comme précédemment, et en étudiant l'homologie cellulaire de \hat{X}^2 on trouve que $\mathcal{A}_L^2 = (R_2)^2$, de matrice de présentation $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $\Delta_L(t_1, t_2) = 0$.

Proposition 8.37. Soit L un entrelacs. On a la relation :

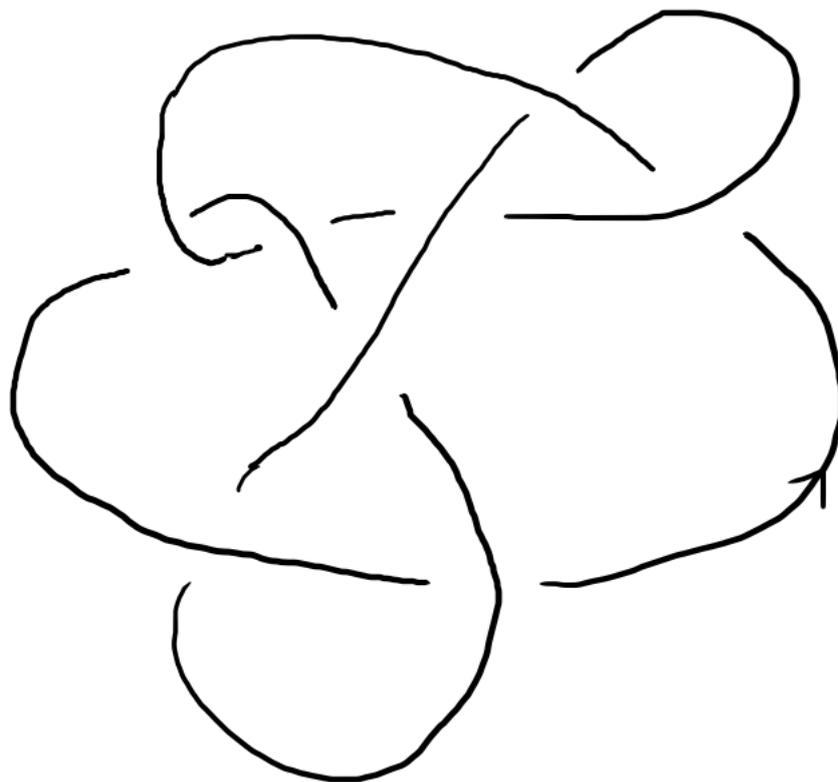
$$\Delta_L(t) \doteq (t - 1) \cdot \Delta_L(t, \dots, t).$$

8.8. Solutions des exercices. Exercices 8.25 et

Exercice 8.25 : Soit $J = 3_1 \# 3_1^*$



et K le nœud dessiné ci-après.



On va montrer que le module d'Alexander distingue J et K contrairement au polynôme d'Alexander.

- (1) Retrouver le nom de K dans les tables de nœuds, et expliquer comment faire.
- (2) Montrer que $\Delta_K(t) = (1 - t + t^2)^2 = \Delta_J(t)$.
- (3) Montrer que $\mathcal{A}_K = R_t / (1 - t + t^2)^2 R_t$ et que $\mathcal{A}_J = R_t / (1 - t + t^2) R_t \oplus R_t / (1 - t + t^2) R_t$.
- (4) Quels autres invariants aurait-on pu utiliser pour distinguer J et K ?

(1) En utilisant *Knot identification tool* (<http://joshuahhh.com/projects/kit/>), on trouve que K est soit 8_{20} soit une somme connexe de deux trèfles.

Ensuite, en allant consulter les tables comme sur le site *Knotinfo*, on peut reconnaître K dans le diagramme de 8_{20} . Donc $K = 8_{20}$.

Remarquons que le site *Knot identification tool* est également pratique pour voir ce qu'il se passe quand on modifie certains croisements de K . Cela sera utile pour la question (4).

(2) Comme on aura besoin de calculer les modules d'Alexander au (3), passer par des matrices de Seifert et la Définition S semble pertinent.

Pour J , on utilise simplement la valeur déjà connue de $\Delta_{3_1}(t) = \Delta_{3_1^*}(t) = 1 - t + t^2$ et la multiplicativité par somme connexe.

Pour K , on construit une surface d'algorithme, et après un peu de travail on trouve une matrice de Seifert V_K , par exemple

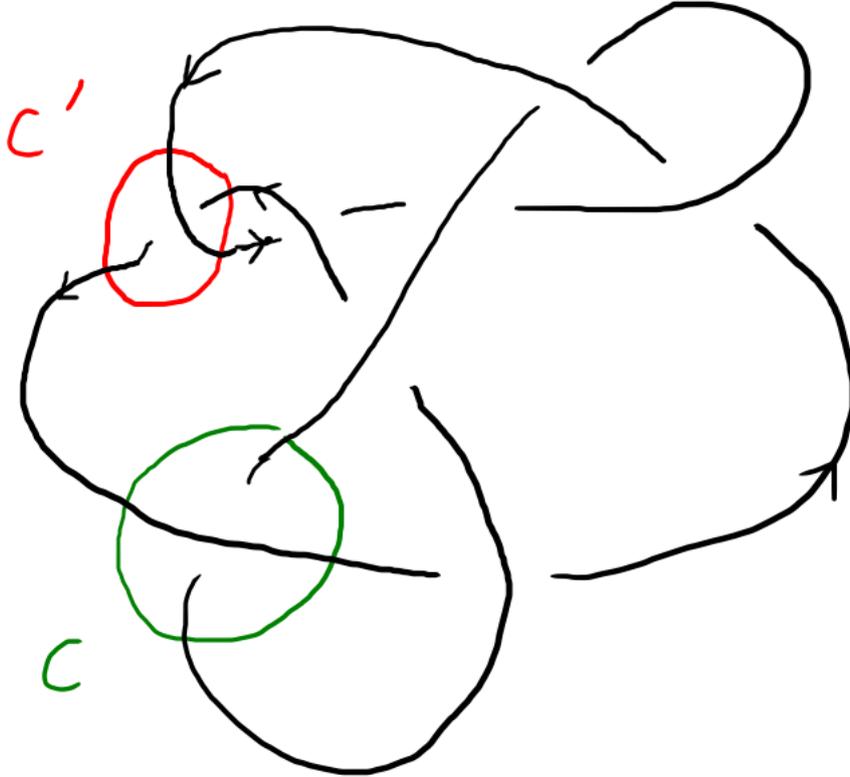
$$V_K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve ensuite le résultat en calculant $\det(tV_K - V_K^T)$.

(3) On montre que via les opérations de la Proposition 8.12, la matrice $tV_K - V_K^T$ est équivalente à la matrice $((1 - t + t^2)^2)$. D'où $\mathcal{A}_K = R_t / (1 - t + t^2)^2 R_t$.

Pour J , son caractère composé permet d'exhiber une matrice de Seifert V_J qui s'écrit comme une somme directe, puis de démontrer que $tV_J - V_J^T$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 - t + t^2 & 0 \\ 0 & 1 - t + t^2 \end{pmatrix}$. D'où le résultat.

(4) Dans le diagramme de K , distinguons deux croisements spécifiques c et c' , voir ci-après :



Si on change le signe de c , on peut vérifier que l'on obtient un diagramme de U . Donc $u(K) = 1$. Or $u(J) = 2$, comme somme connexe de deux nœuds de nombre de dénouement 1, par la Proposition 6.4 (2) et la Proposition 6.5 (2). Ainsi J et K sont distingués par u .

D'autre part, remplacer le croisement c' par celui de signe inverse donne un diagramme de J , et le remplacer par un lissage (comme dans un triplet skein) donne un diagramme de $U \sqcup U$. Avec le triplet skein $(K, J, U \sqcup U)$, on a donc la relation des polynômes de Jones :

$$\frac{1}{t} J_J(t) - t J_K(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) J_{U \sqcup U}(t) = \frac{1}{t} - t.$$

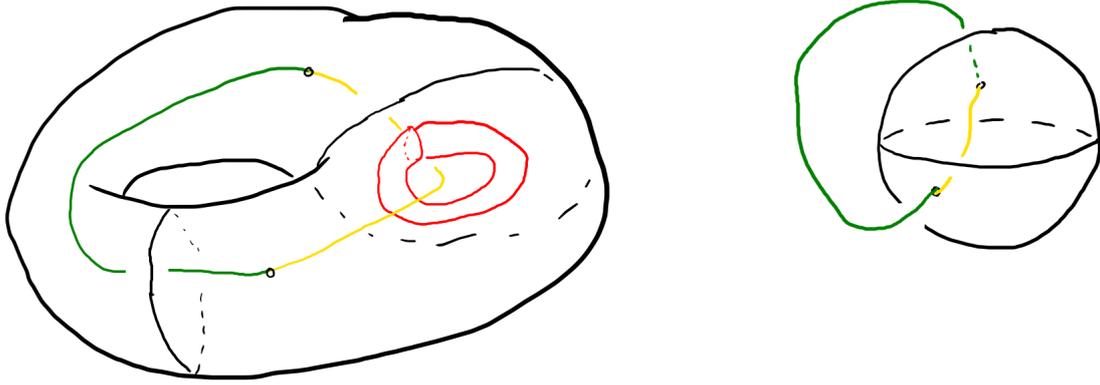
Par l'égalité précédente, si J et K avaient même polynôme de Jones, alors ce polynôme serait égal à 1. Or on sait que

$$J_J(t) = J_{3_1}(t) J_{3_1^*}(t) = (t + t^3 - t^4)(t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) \neq 1.$$

Donc J et K sont distingués par le polynôme de Jones.

Exercice 8.31 : Soit $L = U \sqcup U$. Montrer que E_L est homotopiquement équivalent à un bouquet de deux cercles et d'une sphère \mathbb{S}^2 .

Notons $L = U_1 \sqcup U_2$. On isotope L pour que U_1 soit une droite verticale passant par ∞ , ce qui fait que son extérieur est un tore solide V_1 horizontal (représenté en noir dans la figure de gauche ci-après)). On isotope U_2 pour qu'il soit inclus dans un disque méridien de V_1 . Alors $E_L = V_1 \setminus \nu U_2$. Le bord de νU_2 est représenté en rouge dans la figure de gauche ci-après.



On partage l'âme de V_1 en deux chemins, en jaune et vert sur la figure de gauche. On peut maintenant rétracter par déformation E_L sur l'union d'une sphère (en noir sur la figure de droite), du chemin jaune et du chemin vert. Enfin, on peut faire une équivalence d'homotopie pour faire glisser l'un des bouts du chemin jaune sur l'autre, pour en faire un cercle jaune. On procède de même avec le chemin vert. Finalement, on a bien un bouquet d'une sphère (noire) et de deux cercles (jaune et vert).

9. CALCUL DE FOX

9.1. Dérivées de Fox.

Définition 9.1. Soit le groupe libre $\mathbb{F}_n = x_1, \dots, x_n$. Les *dérivées de Fox* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ sont des applications \mathbb{Z} -linéaires de $\mathbb{Z}\mathbb{F}_n$ dans $\mathbb{Z}\mathbb{F}_n$, définies par :

- $\frac{\partial}{\partial x_i}(1) = 0$,
- $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$,
- $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i^{-1}) = -x_i^{-1}$,
- pour $j \neq i$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j^{\pm 1}) = 0$,
- pour tous $u, v \in \mathbb{F}_n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u) + u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(v).$$

Pour $x \in \mathbb{Z}\mathbb{F}_n$, on notera parfois $\nabla u := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n)$ le *gradient de Fox* de u .

Exemple 9.2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et a un générateur de \mathbb{F}_n , on a

$$\frac{\partial}{\partial a}(a^n) = 1 + a + \dots + a^{n-1}, \text{ et } \frac{\partial}{\partial a}(a^{-n}) = -a^{-1} - \dots - a^{-n} = -a^{-1} \frac{\partial}{\partial a}(a^n).$$

Exemple 9.3. Pour tout $u \in \mathbb{F}_n$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u^{-1}) = -u^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}(u).$$

Exemple 9.4. Soient a, b générateurs de \mathbb{F}_2 . Alors on a

$$\begin{aligned} \nabla(aba^{-1}b^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 - aba^{-1} \\ a - aba^{-1}b^{-1} \end{pmatrix}, \text{ et} \\ \nabla(abab^{-1}a^{-1}b^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 + ab - abab^{-1}a^{-1} \\ a - abab^{-1} - abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 9.5 (Formule fondamentale du calcul de Fox). *Pour tout $u \in \mathbb{F}_n$, on a*

$$u - 1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot (x_j - 1).$$

Exercice 9.6. *Démontrer la Proposition 9.5.*

9.2. Matrice de Fox. ...

Soit K un nœud, $E = \mathbb{S}^3 \setminus \nu K$ son extérieur, $G = \pi_1(E)$ son groupe, $P = \langle g_1, \dots, g_n | r_1, \dots, r_p \rangle$ une présentation de G (avec $p \geq n - 1$), d'homomorphisme quotient associé $\phi_P : \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G$, et enfin $\alpha_K : G \twoheadrightarrow G^{ab} \cong t^{\mathbb{Z}}$ l'abélianisation.

Définition 9.7. $F_P = \left(\frac{\partial r_j}{\partial g_i} \right)_{i,j} \in M_{n,p}(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n)$ est la *matrice de Fox* de P .

On note $F_{P,i} = F_P \setminus$ sa i -ème ligne.

Exemple 9.8. Si $P = \langle a, b | r \rangle$, alors $F_P = \nabla r$.

Remarque 9.9. Soit P une présentation de groupe, dont un des relateurs r s'écrit uv^{-1} , avec u et v des mots libres en les générateurs de P . Alors un calcul rapide donne

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} - uv^{-1} \frac{\partial v}{\partial x_j},$$

donc en passant à l'épimorphisme ϕ_P , on a

$$\phi_P \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \right) = \phi_P \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \phi_P \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right).$$

Par conséquent, on peut partir de l'écriture informelle $u = v$ du relateur r pour calculer $\phi_P(F_P)$: il faut juste faire attention de multiplier par -1 les dérivées du terme de droite de l'égalité.

Définition 9.10 (Définition F). Le polynôme d'Alexander $\Delta_K(t)$ (défini à \doteq près) est le pgcd des mineurs de de taille $n - 1$ de la matrice $(\alpha_K \circ \phi_P)(F_P)$.

Remarque 9.11. Il est démontré que la Définition F coïncide avec la Définition C dans [BZ, Proposition 9.9]. Ce résultat utilise notamment le lien entre les dérivées de Fox et la théorie des revêtements, que nous décrirons plus en détails au Chapitre 11.

Définition 9.12 (Définition FW). Si P est de Wirtinger (donc en particulier $p = n - 1$ ou $p = n$), alors $\Delta_K(t)$ (défini à \doteq près) est égal à n'importe quel mineur de taille $n - 1$ de $(\alpha_K \circ \phi_P)(F_P)$.

Remarque 9.13. Il n'est pas clair à première vue que le $\Delta_K(t)$ défini avec P quelconque dans la Définition F coïncide avec le $\Delta_K(t)$ défini dans la Définition FW avec P' n'importe quelle présentation de Wirtinger. Détaillons un peu pourquoi c'est le cas.

Dans le cas où P est une présentation de Wirtinger, il est démontré que la Définition F coïncide avec la Définition FW dans [BZ, Corollary 9.11]. Ce résultat utilise notamment le fait que chaque relation dans une présentation de Wirtinger est conséquence de toutes les autres.

D'autre part, on peut montrer que la Définition F est bien inchangée si on modifie la présentation P par une transformation de Tietze. Ainsi, quitte à utiliser des transformations de Tietze, on peut toujours se ramener au cas du paragraphe précédent.

Définition 9.14 (Définition RF). Si $p = n - 1$ dans la présentation P , alors

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{(t - 1) \cdot \det(\alpha_K \circ \phi_P(F_{P,i}))}{\alpha_K(g_i) - 1}.$$

La Définition RF provient de la théorie des *torsions de Reidemeister*.

Remarque 9.15. On remarque que quand le générateur retiré est un *méridien*, on a $\alpha_K(g_i) - 1 = t - 1$ et $\Delta_K(t)$ est donné par le simple mineur correspondant, comme pour la Définition FW. En particulier il est clair que les Définitions FW et RF coïncident pour une présentation de Wirtinger.

D'autre part, on verra au Chapitre 11 que la quantité dans la Définition RF est en effet indépendante de la présentation P choisie.

Exemple 9.16. Étudions l'exemple du nœud de trèfle, avec les trois présentations vues dans l'Exercice 7.22. Dans tous les cas on retrouve bien $\Delta_{3_1}(t) \doteq t^2 - t + 1$.

— Pour $P = \langle a, b, c | ab = bc, bc = ca \rangle$, les Définitions F, FW et RF s'appliquent et on

$$a F_P = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ a-1 & 1 \\ -b & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_K \circ \phi_P} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t-1 & 1 \\ -t & t-1 \end{pmatrix}.$$

— Pour $P' = \langle a, b | aba = bab \rangle$, les Définitions F et RF s'appliquent, et on a

$$F_{P'} = \begin{pmatrix} 1+ab-b \\ a-1-ba \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_K \circ \phi_{P'}} \begin{pmatrix} 1-t+t^2 \\ -1+t-t^2 \end{pmatrix}.$$

— Pour $P'' = \langle x, y | x^2 = y^3 \rangle$, les Définitions F et RF s'appliquent, et on a

$$F_{P''} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1-y-y^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_K \circ \phi_{P''}} \begin{pmatrix} 1+t^3 \\ -1-t^2-t^4 \end{pmatrix}.$$

Avec la **Définition F** : $\Delta_{3_1}(t) = \text{pgcd}(1+t^3, 1+t^2+t^4) = t^2 - t + 1$.

Avec la **Définition RF** : On a les abélianisés $\alpha_K(x) = t^3, \alpha_K(y) = t^2$, d'où le résultat $\Delta_{3_1}(t) = \frac{(1+t^3)(t-1)}{t^2-1} = \frac{(1+t^2+t^4)(t-1)}{t^3-1} = t^2 - t + 1$.

9.3. Cas des entrelacs. Soit $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ un entrelacs **non scindé**, $E = \mathbb{S}^3 \setminus \nu L$ son extérieur, $G = \pi_1(E)$ son groupe, $P = \langle g_1, \dots, g_n | r_1, \dots, r_p \rangle$ une présentation de G (avec $p \geq n - 1$), de quotient associé $\phi_P : \mathbb{F}_n \rightarrow G$, l'abélianisation $\alpha_L : G \rightarrow G^{ab} \cong t_1^{\mathbb{Z}} \dots t_\mu^{\mathbb{Z}}$ et enfin l'*augmentation* $\epsilon : t_1^{\mathbb{Z}} \dots t_\mu^{\mathbb{Z}} \rightarrow t^{\mathbb{Z}}$ (envoyant tout t_i sur t).

Définition 9.17. [Définition F, dans le cas où P est quelconque] Le polynôme d'Alexander univarié $\Delta_L(t)$ (défini à \doteq près) est le pgcd des $(n - 1)$ -mineurs de $(\epsilon \circ \alpha_L \circ \phi_P)(F_P)$.

Le polynôme d'Alexander multivarié $\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu)$ (défini à \doteq près parmi les polynômes de Laurent multivariés) est le pgcd des $(n - 1)$ -mineurs de $(\alpha_L \circ \phi_P)(F_P)$.

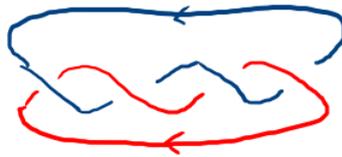
Définition 9.18. [Définition FW, **univarié**, dans le cas où P est de Wirtinger] Si P est de Wirtinger, alors $\Delta_L(t)$ est égal à n'importe quel $(n - 1)$ -mineur de $(\epsilon \circ \alpha_K \circ \phi_P)(F_P)$.

Définition 9.19. [Définition RF] Si $p = n - 1$, alors :

$$\Delta_L(t) \doteq \frac{(t-1) \cdot \det(\epsilon \circ \alpha_L \circ \phi_P(F_{P,i}))}{(\epsilon \circ \alpha_L)(g_i) - 1} \in \mathbb{Z}[t^\pm].$$

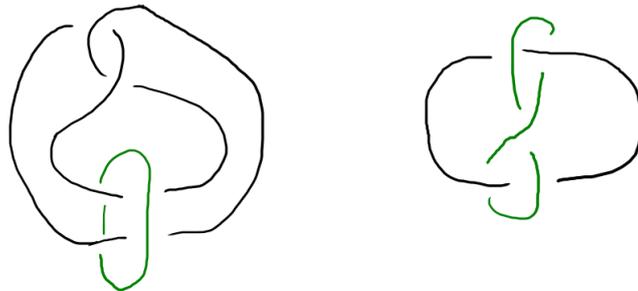
$$\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu) \doteq \frac{\det(\alpha_L \circ \phi_P(F_{P,i}))}{(\alpha_L)(g_i) - 1} \in \mathbb{Z}[t_1^\pm, \dots, t_\mu^\pm].$$

Exercice 9.20. *Considérons l'entrelacs de Solomon $T(2, 4)$:*



Calculer une présentation du groupe de $L = T(2, 4)$ et montrer que $\Delta_L(t_1, t_2) \doteq 1 + t_1 t_2$.

Exercice 9.21. *On considère l'entrelacs de Whitehead L .*



- (1) *Montrer que les deux diagrammes ci-dessus sont R-équivalents.*
- (2) *Calculer une présentation du groupe de L .*
- (3) *Montrer que $\Delta_L(t_1, t_2) \doteq (1 - t_1)(1 - t_2)$.*

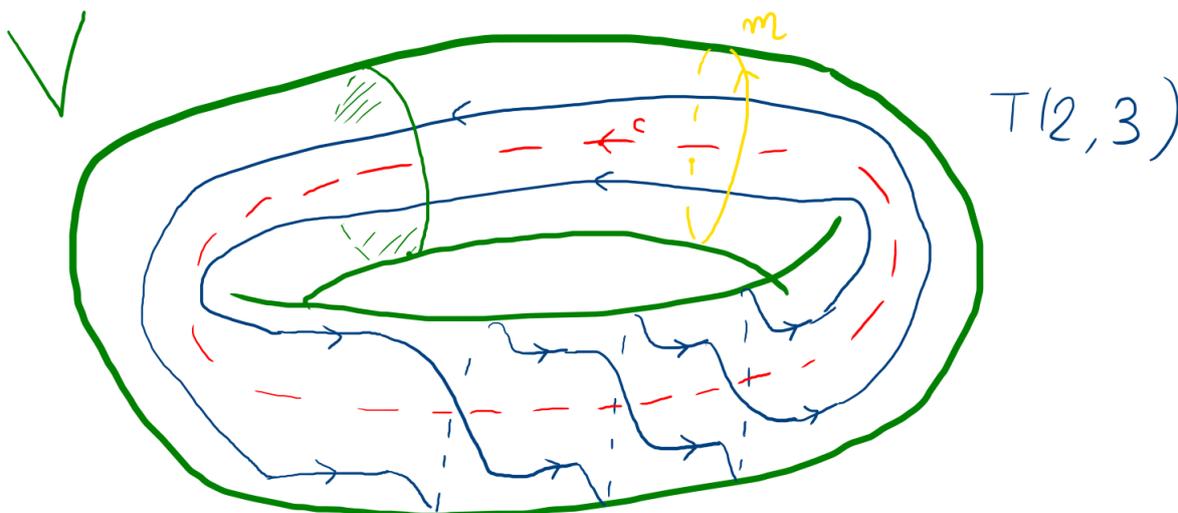
9.4. Les nœuds toriques $T(p, q)$.

Définition 9.22. Soient $p, q \in \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux, et $V \cong \mathbb{S}^1 \times D^2$ un tore solide dénoué d'âme une courbe c . Soit $m \in \partial V$ méridien de c .

Le nœud torique $T(p, q) \subset \partial V$ est défini par :

- Si $p = 0$, alors $T(0, \pm 1) = m^{\pm 1} \sim U$.
- Si $p > 0$, alors $T(p, q)$ est donné par p brins parallèles à c entortillés $|q|$ fois d'un angle $\frac{2\pi \operatorname{signe}(q)}{p}$ dans le sens de m .
- Si $p < 0$, alors $T(p, q) := -T(-p, -q)$.

Dans le dessin ci-après, $p = 2, q = 3, T(2, 3)$ est en bleu, m est en jaune et c en pointillés rouges.



Proposition 9.23. (1) (non amphichéral) $T(p, q)^* = T(p, -q) \approx T(p, q)$ (sauf pour U).

(2) (inversible) $-T(p, q) = T(-p, -q) \sim T(p, q)$.

(3) (symétrie) $T(p, q) \sim T(q, p)$.

(4) (primalité) $T(p, q)$ est premier.

(5) (nombre de croisements) $c(T(p, q)) = \min(p(q-1), (p-1)q)$.

(6) (genre) $g(T(p, q)) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$.

(7) (polynôme de Jones) $J_{T(p,q)}(t) = t^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \frac{1 - t^{p+1} - t^{q+1} + t^{p+q}}{1 - t^2}$ si $p > 0$.

(8) (groupe) $G_{T(p,q)}$ admet la présentation $\langle x, y | x^p = y^q \rangle$.

(9) (polynôme d'Alexander) $\Delta_{T(p,q)}(t) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}$.

Exercice 9.24. Montrer que $T(p, q)$ est **alterné** si et seulement si $|p| \leq 2$ ou $|q| \leq 2$.

Voyons maintenant comment calculer une présentation particulièrement pratique de $G_{T(p,q)}$, avec plus de détails qu'au (8) de la Proposition 9.23.

Proposition 9.25 ([BZ] Proposition 3.38). Soient $K = T(p, q), V, m, c$ comme précédemment. Alors le groupe $G_{T(p,q)}$ admet la présentation $\langle x, y | x^p = y^q \rangle$, où $x \sim c, y \sim m$, et $z = x^p = y^q$ représente l'âme de l'anneau $A = \partial V \setminus K$.

Démonstration. On a $\mathbb{S}^3 = V \cup_{\partial V} W$, où $W = \mathbb{S}^3 \setminus \overset{\circ}{V} \cong D^2 \times \mathbb{S}^1$, donc pour $K = T(p, q)$, on a $E_K = (V \setminus \nu K) \cup_A (W \setminus \nu K)$, avec $A = \partial V \setminus \nu K$ un anneau sur ∂V . On conclut avec le théorème de Van Kampen. On trouvera plus de détails dans [BZ, Proposition 3.38]. \square

Preuve du (9) de la Proposition 9.23. On utilise la présentation $P = \langle x, y | x^p = y^q \rangle$ de $G_{T(p,q)}$ établie à la Proposition 9.23.

En se référant à la définition topologique de x et y , on trouve que leurs abélianisés valent $\alpha_K(x) = t^q, \alpha_K(y) = t^p$, et la matrice de Fox de P est donc $F_P = \begin{pmatrix} 1 + x + \dots + x^{p-1} \\ -1 - y - \dots - y^{q-1} \end{pmatrix}$.

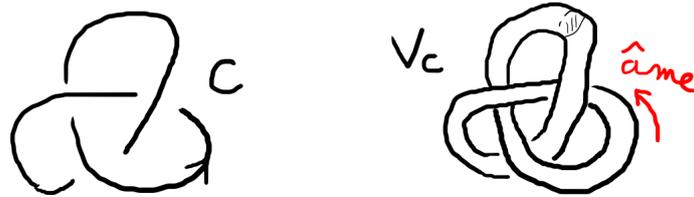
On peut maintenant utiliser la Définition RF en enlevant la deuxième ligne de F_P , ligne qui correspond au générateur y . On trouve donc :

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{(1 + (t^q) + \dots + (t^q)^{p-1})(t - 1)}{t^p - 1} = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

Remarquons qu'on aurait pu déduire $\alpha_K(x) = t^{\pm q}, \alpha_K(y) = t^{\pm p}$ sans connaître l'origine topologique de la présentation, et cela n'aurait pas changé le résultat à \doteq près. Remarquons également que la Définition F aurait fonctionné aussi. \square

9.5. Les nœuds satellites.

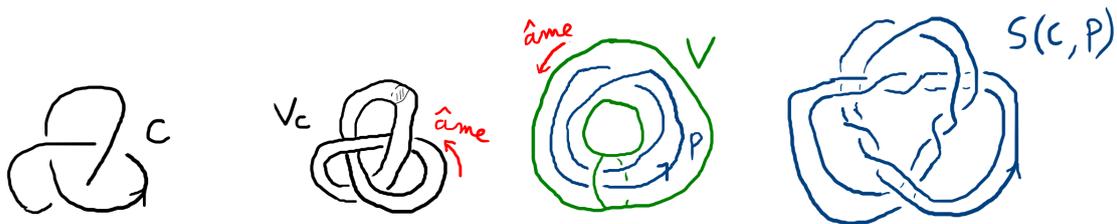
Définition 9.26. Soit $C \subset \mathbb{S}^3$ un nœud non-trivial, et $V_C = \nu C \cong \mathbb{S}^1 \times D^2$ un voisinage tubulaire de C .



Soit $V \cong \mathbb{S}^1 \times D^2$ un tore solide dénoué dans \mathbb{S}^3 , de méridien m . Soit $P \subset \overset{\circ}{V}$ un nœud intersectant tout disque méridien de V , et $n_P := \text{lk}(P, m)$.



Soit $h_{P,C} : V \rightarrow V_C$ un difféomorphisme respectant l'orientation et les longueurs/méridiens préférés. Alors $S(C, P) := h_{P,C}(P) \subset \mathbb{S}^3$ est le nœud satellite de compagnon C et de protoype P (*pattern knot* en anglais).



Remarque 9.27. Dans l'exemple dessiné dans la Définition 9.26, on peut voir que $S_{C,P}$ semble avoir gagné 6 croisements "supplémentaires", mais ils sont dus au fait qu'en identifiant les tores solides V et V_C , il faut identifier les longueurs préférées ensemble. Ainsi

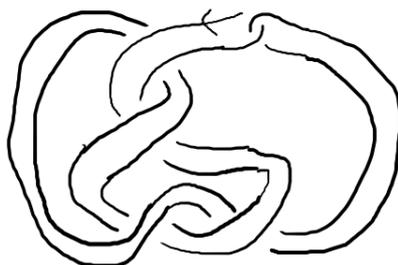
les $6 = 2 \times 3$ croisements *négatifs* viennent du fait que le diagramme choisi de C a un entortillement $e = +3$: ces croisements *compensent* l'entortillement.

Exemple 9.28. Les sommes connexes $J\sharp K = S(J, K\sharp Hopf)$ sont les nœuds satellites où le prototype P intersecte un disque méridien en 1 seul point.

Remarque 9.29. Le prototype du satellite peut être vu comme un nœud $P \subset V$ comme dans la Définition 9.26, ou de manière équivalente comme un entrelacs $L_P = P \cup m \subset \mathbb{S}^3$.

Définition 9.30. Le *double de Whitehead* $S(C, W)$, satellite du nœud compagnon C , utilise comme prototype W l'entrelacs de Whitehead ; remarquons que $n_W = 0$.

Exemple 9.31. Ci-après est représenté le double de Whitehead $S(4_1, W)$ du nœud de huit. Comme le diagramme du compagnon 4_1 utilisé avait entortillement nul, le dessin ne contient pas de "croisements supplémentaires non intuitifs".



Définition 9.32. Le (p, q) -câblage (ou (p, q) -câble) $C_{p,q}(K) = S(K, P_{p,q})$ du nœud K utilise le prototype $P_{p,q}$, qui est le nœud torique $T(p, q)$ dans un tore solide avec p brins suivant l'âme du tore solide et $n_{P_{p,q}} = p$.

Remarque 9.33. Pourquoi ce nom de nœud câble ? Prenons un nœud C , et imaginons-le fait d'un câble électrique. Alors en retirant la couche de protection on révèle p fils de cuivre entortillés, mais suivant ensemble la trajectoire initiale de C : le nœud formé par les fils de cuivre est bien ce qu'on appelle un nœud câble.

Exemple 9.34. L'exemple dessiné dans la Définition 9.26 est le câble $C_{2,-1}(3_1)$.

Proposition 9.35. Soit $S(C, P)$ un satellite de compagnon C et de prototype P . Alors les extérieurs vérifient :

$$E_{S(C,P)} = E_C \cup_{h_{P,C}(\partial V)} h_{P,C}(E_{L_P}).$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la Définition 9.26. □

Proposition 9.36. Soit $S(C, P)$ un satellite de compagnon C et de prototype P . Alors les groupes vérifient $G_{S(C,P)} = G_C *_{\pi_1(\partial V)} G_{L_P}$, et $G_C \hookrightarrow G_{S(C,P)} \hookrightarrow G_{L_P}$.

Idée de preuve. Le résultat découle de la Proposition 9.35 et du théorème de van Kampen. □

Proposition 9.37. Soit $S(C, P)$ un satellite de compagnon C et de prototype P . Alors les polynômes d'Alexander vérifient la relation :

$$\Delta_{S(C,P)}(t) = \Delta_C(t^{n_P}) \cdot \Delta_P(t).$$

Idée de preuve. Le résultat découle des Propositions 9.35 et 9.36, en appliquant la Définition RF. □

Proposition 9.38. Pour tout nœud C , on a $\Delta_{S(C,W)}(t) = 1$.

Démonstration. Le résultat découle de la Proposition 9.37. □

Proposition 9.39. *Pour tout nœud K , on a*

$$\Delta_{C_{p,q}(K)}(t) = \Delta_K(t^p) \Delta_{T(p,q)}(t) = \Delta_K(t^p) \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

Démonstration. Le résultat découle de la Proposition 9.37 et de la Proposition 9.23 (9). \square

Exercice 9.40. *Dessiner $C_{3,-1}(5_1)$.*

Exercice 9.41. *Dessiner $S(5_2, W)$.*

Exercice 9.42. *Soit K un nœud non trivial.*

(1) *Montrer que $\Delta_{S(K,W)}(t) = 1$ avec la Définition S.*

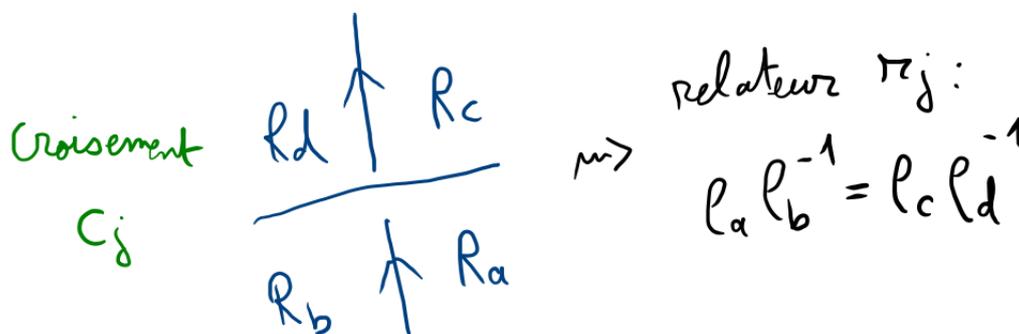
(2) *Calculer tous les idéaux élémentaires de $\mathcal{A}_{S(K,W)}$.*

9.6. Présentation de Dehn.

Définition 9.43. Soit L un entrelacs non scindé. Soit D un diagramme de L avec n croisements c_1, \dots, c_n , qui découpe le plan en $n+2$ régions R_0, \dots, R_{n+1} . Une *présentation de Dehn* de G_L associée à D est une présentation de groupe de la forme

$$P = \langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n+1} \mid \rho_0 = 1, r_1, \dots, r_n \rangle,$$

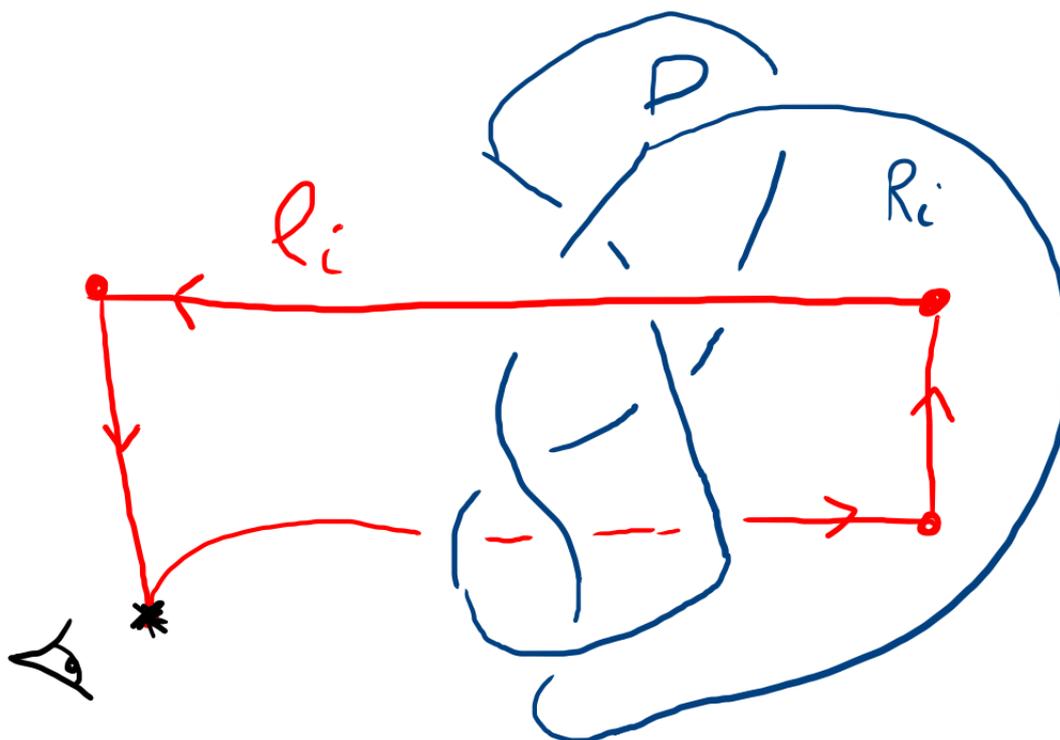
où le générateur ρ_i est associé à la région R_i (voir plus loin) et le relateur r_j est associé au croisement c_j comme ci-après :



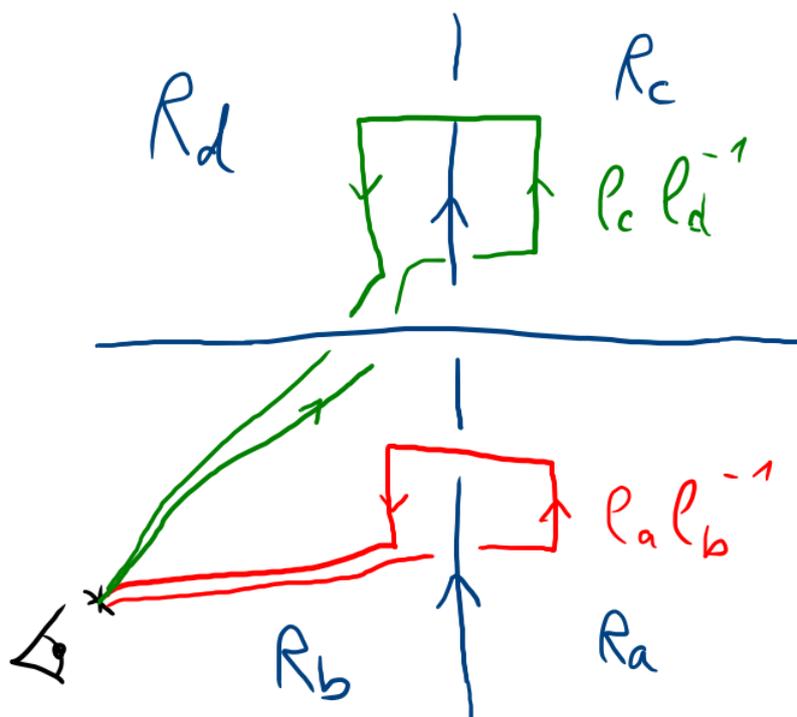
On admettra que la présentation précédente est bien une présentation de G_L . Détaillons un peu la signification topologique des générateurs et des relateurs. On prend un point base $* \in E_L$ **sous** le diagramme D (ou derrière le plan du dessin en d'autres termes).

Ainsi, ρ_i est la classe d'homotopie du lacet dans E_L composé des 4 chemins suivants successifs :

- chemin allant de $*$ à un point sous la région R_i en restant sous D ,
- chemin traversant R_i orthogonalement au plan de D , du bas vers le haut,
- chemin allant d'un point au-dessus de R_i vers un point au-dessus de $*$, en restant au-dessus de D ,
- chemin orthogonal à D du haut vers le bas, revenant à $*$.



On peut donc visualiser la relation r_j comme l'égalité entre deux lacets de part et d'autre d'un croisement, comme on peut le voir sur la figure suivante.



Remarquons que $(\epsilon \circ \alpha_L)(\rho_a \rho_b^{-1}) = \frac{1}{t}$.

Exercice 9.44. (1) Calculer une présentation de Dehn P pour le diagramme classique à 3 croisements du nœud de trèfle droit.

(2) Montrer que P est équivalente à $\langle a, b \mid aba = bab \rangle$ via transformations de Tietze.

Proposition 9.45. Soit K un nœud, D un diagramme de K avec un ordre des croisements et des régions, et P une présentation de Dehn associée à D . Alors la matrice de Fox F_P vérifie

$$\alpha_K(F_P)|_{t=\frac{1}{s}} = \begin{matrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_{n+1} \end{matrix} \begin{bmatrix} \rho=1 & r_1 & \dots & r_n \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{D,s}^T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

où $A_{D,s}$ est la matrice construite à la Définition A, avec la variable s au lieu de t . Ici R_0 n'est pas nécessairement la région non bornée.

Démonstration. On prouve l'égalité des deux matrices colonne par colonne, et donc croisement par croisement. \square

Corollaire 9.46. La Définition A pour le diagramme D est un cas particulier de la Définition RF avec P une présentation de Dehn associée au diagramme D .

Démonstration. Fixons les indices des régions en posant $i(R_0) = 0$. Soit R_k une région telle que $i(R_k) \neq i(R_0) = 0$.

On a $\alpha_K(\rho_j) = t^{i(R_j)}$, donc en appliquant la Définition RF avec la ligne k , on a

$$\Delta_K(t) \doteq \frac{(t-1) \det(A_{D,s}^T \setminus \text{lignes } 0 \text{ et } k)}{t^{i(R_k)} - 1}$$

et ce dernier terme est égal à la Définition A de $\Delta_K(t)$ en conséquence de la Proposition 3.17. \square

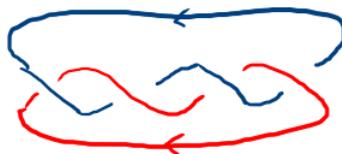
Remarque 9.47. Grâce à ce qui précède, nous pouvons donc étendre la **Définition A** du **polynôme d'Alexander univarié** $\Delta_L(t)$ à tout **entrelacs non scindé** L exactement comme dans la Définition 3.2.

9.7. **Références des exercices.** Exercices 9.6, 9.20, 9.21, 9.24, 9.40, 9.41, 9.42 et 9.44.

Exercice 9.6 : Démontrer la Proposition 9.5.

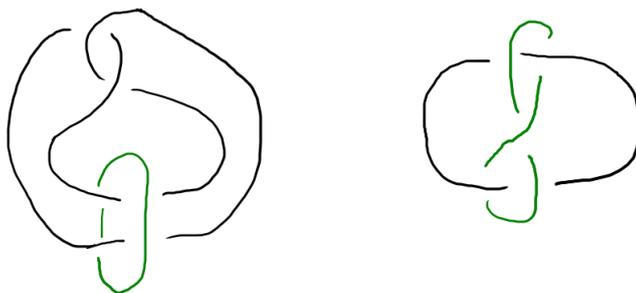
On démontre la formule par récurrence sur le nombre de générateurs dans l'écriture de $u \in \mathbb{F}_n$. On vérifie que la formule est vraie pour $u = 1$ (aucun générateur), et on montre l'hérédité en utilisant la formule de produit.

Exercice 9.20 : Considérons l'entrelacs de Solomon $T(2, 4)$:



Calculer une présentation du groupe de $L = T(2, 4)$ et montrer que $\Delta_L(t_1, t_2) \doteq 1 + t_1 t_2$.

Exercice 9.21 : On considère l'entrelacs de Whitehead L .

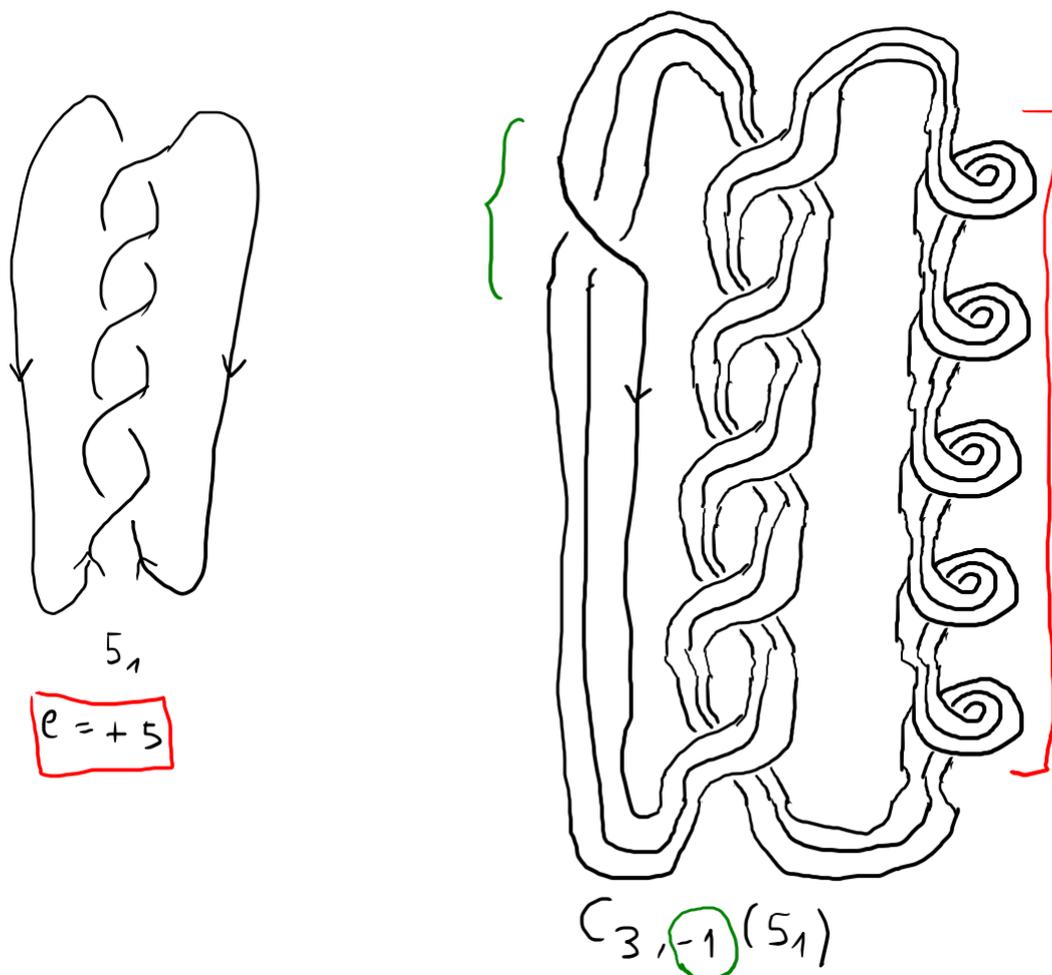


- (1) Montrer que les deux diagrammes ci-dessus sont R-équivalents.
- (2) Calculer une présentation du groupe de L .
- (3) Montrer que $\Delta_L(t_1, t_2) \doteq (1 - t_1)(1 - t_2)$.

Exercice 9.24 : Montrer que $T(p, q)$ est **alterné** si et seulement si $|p| \leq 2$ ou $|q| \leq 2$.

Exercice 9.40 : Dessiner $C_{3,-1}(5_1)$.

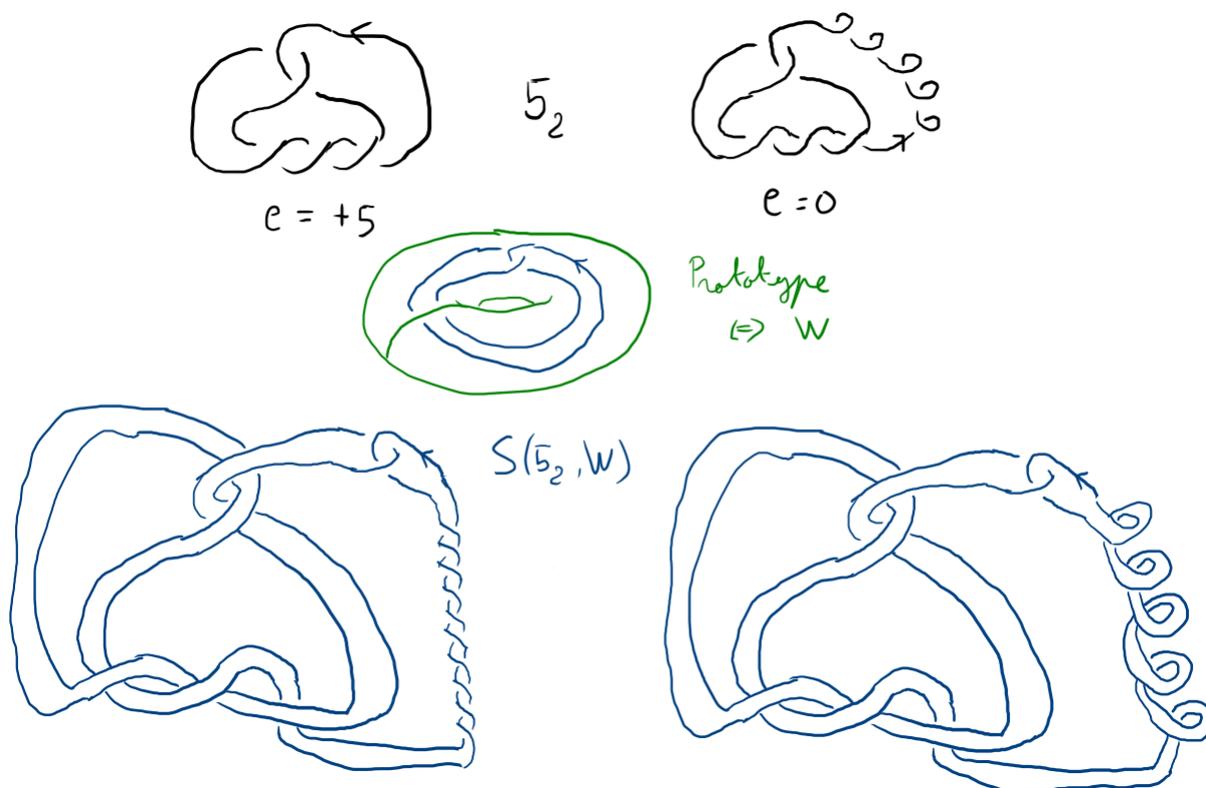
Le diagramme classique de 5_1 (à gauche ci-après) a un entortillement de $+5$, donc on peut lui ajouter 5 boucles de croisements négatifs et appliquer le câblage $(3, -1)$ à ce nouveau diagramme d'entortillement 0. On obtient le résultat de droite dans la figure ci-après.



Exercice 9.41 : Dessiner $S(5_2, W)$.

Le diagramme classique de 5_2 (à gauche ci-après) a un entortillement de $+5$, donc on peut lui ajouter 5 boucles de croisements négatifs et obtenir un nouveau diagramme

d'entortillement 0 (à droite ci-après). Avec le prototype W , si on part du diagramme de gauche on doit ajouter 5 tours complets négatifs (i.e. 10 croisements vu qu'il n'y a que deux brins), et si on part du diagramme de droite on fait juste le processus naïf.

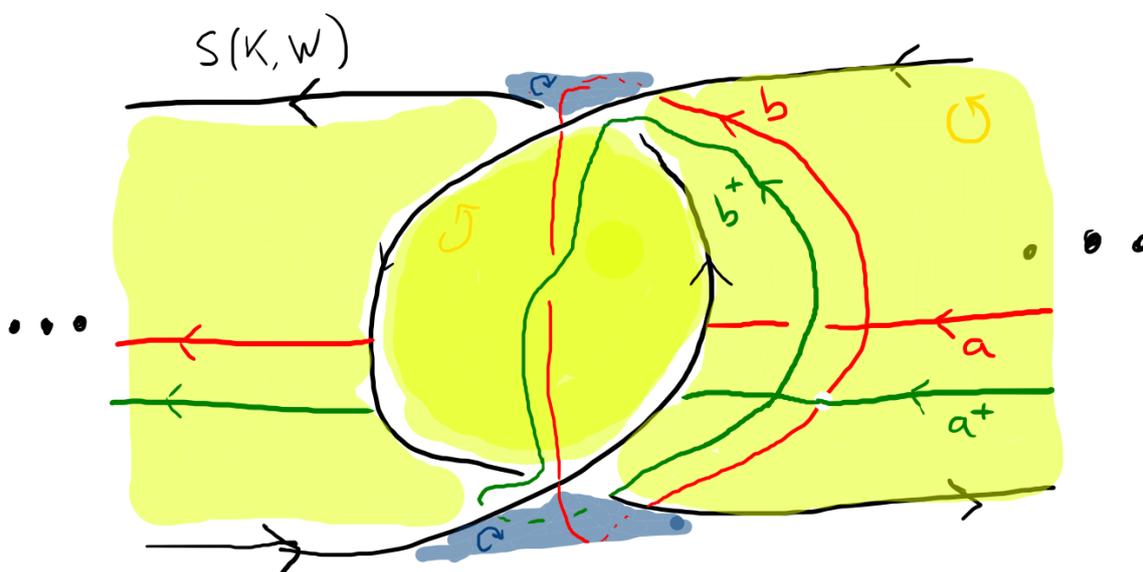


Exercice 9.42 : Soit K un nœud non trivial.

(1) Montrer que $\Delta_{S(K,W)}(t) = 1$ avec la Définition S .

(2) Calculer tous les idéaux élémentaires de $\mathcal{A}_{S(K,W)}$.

(1) Soit D un diagramme de K d'entortillement 0. Soit D' le diagramme de $S(K,W)$ associé à D , i.e. en remplaçant chaque arc de D par deux brins parallèles de sens opposés, sauf à un endroit où on insère le motif de la figure ci-après.



Soit alors $\Sigma_{K,W}$ la surface de Seifert pour $S(K,W)$ comprise du motif de la figure précédente complétée par un ruban (jaune ici) suivant la trajectoire de D .

$\Sigma_{K,W}$ ne dépend pas de K à homéomorphisme près, et pour $K = U$ on voit qu'elle est de genre 1 (donc elle l'est pour tout K). Deux courbes générant $H_1(\Sigma_{K,W})$ sont par exemple les a et b représentées en rouge sur la figure. Leurs poussées en avant sont a^+, b^+ et sont représentées en vert.

Il découle de la construction de $S(K,W)$ en tenant compte des longitudes préférées que

$\text{lk}(a, a^+) = 0$. On trouve donc la matrice de Seifert $V = \begin{matrix} & a^+ & b^+ \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$ pour $\Sigma_{K,W}$.

On a donc $tV - V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & t-1 \end{pmatrix}$, qui est bien de déterminant $\Delta_{S(K,W)}(t) = t \doteq 1$.

(2) On a $\mathcal{E}_0 = 0$, et $\mathcal{E}_1 = (\det(tV - V^T))R_t = R_t$ est maximal. Donc par croissance des idéaux élémentaires, on a également $\mathcal{E}_i = R_t$ pour $i \geq 2$.

Exercice 9.44 :

(1) Calculer une présentation de Dehn P pour le diagramme classique à 3 croisements du nœud de trèfle droit.

(2) Montrer que P est équivalente à $\langle a, b \mid aba = bab \rangle$ via transformations de Tietze.

(1) On trouve la présentation

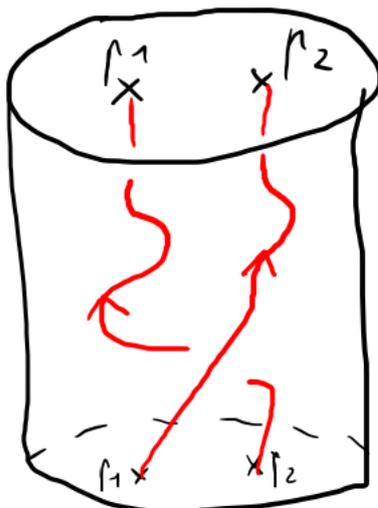
$$P = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \mid \rho_0 = 1, \rho_4 \rho_1^{-1} = \rho_2 \rho_0^{-1}, \rho_4 \rho_2^{-1} = \rho_2 \rho_3^{-1}, \rho_4 \rho_3^{-1} = \rho_2 \rho_1^{-1} \rangle.$$

10. GROUPES DE TRESSES

10.1. **Tresses.** Pour $n \geq 1$ un entier, soient $p_1, \dots, p_n \in]-1, 1[$ tels que $-1 < p_1 < \dots < p_n < 1$.

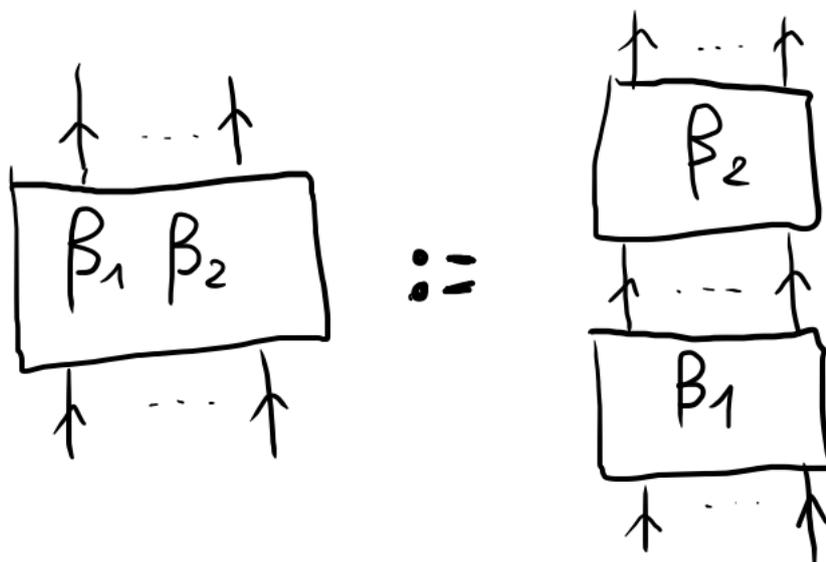
Définition 10.1. Une tresse β à n brins est une sous-variété lisse de $D^2 \times [0, 1]$ à n composantes connexes $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}$, de bord $\partial\beta = \sqcup_{i=1}^n \{p_i\} \times \{0, 1\}$, et telle que la projection canonique $D^2 \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ envoie chaque $\beta^{(j)}$ sur $[0, 1]$ via un difféomorphisme.

On représente les tresses comme allant du bas vers le haut, comme dans les figures suivantes.



Définition 10.2. Deux tresses β, β' à n brins sont isotopes (ce qu'on note $\beta \sim \beta'$) s'il existe un difféomorphisme $H : D^2 \times [0, 1] \rightarrow D^2 \times [0, 1]$ tel que $H|_{\partial(D^2 \times [0, 1])}$ est l'identité point par point et $H(\beta) = \beta'$.

Définition 10.3. Le produit $\beta_1\beta_2$ de deux tresses β_1, β_2 à n brins est la tresse à n brins obtenue par concaténation de β_1 et β_2 du bas vers le haut, et remise à l'échelle par une homothétie $[0, 2] \rightarrow [0, 1]$, comme sur le dessin ci-après.

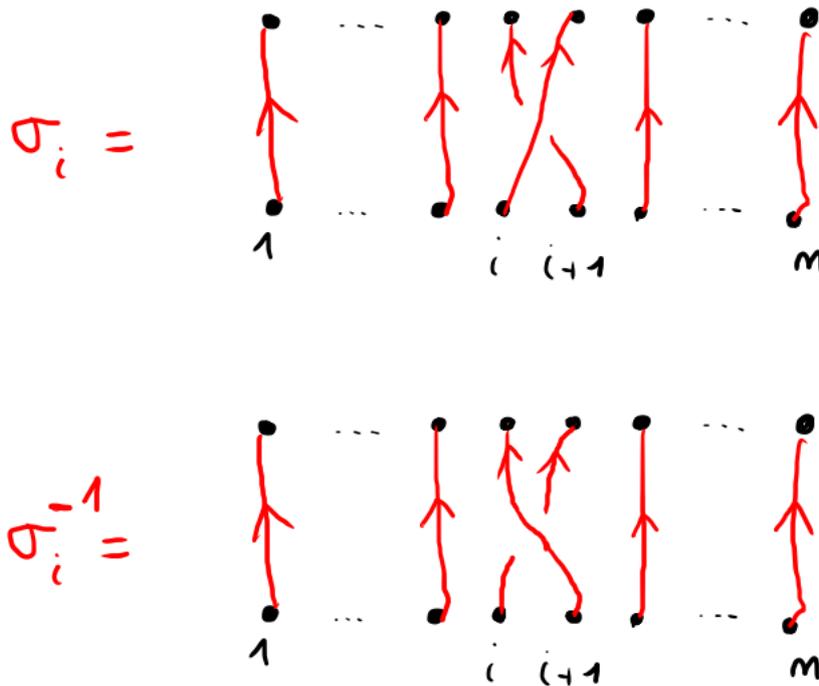


Définition 10.4. Le n -ème groupe de tresses B_n est donné par la présentation d'Artin

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| \geq 2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ pour } i \in \{1, \dots, n-2\} \rangle$$

Proposition 10.5. L'ensemble des classes d'équivalence de tresses à n brins à isotopie près, muni de l'opération concaténation, est un groupe isomorphe à B_n .

Le générateur σ_i et son inverse σ_i^{-1} correspondent aux classes des tresses suivantes :



et la tresse triviale ξ_n (ou 1 s'il n'y a pas d'ambiguïté) est définie par

$$\xi_n = 1 = \{p_1, \dots, p_n\} \times [0, 1].$$

Exemple 10.6. — $B_1 \cong \{1\}$.

— $B_2 \cong \sigma_1^{\mathbb{Z}}$.

— $B_3 \cong G_{3_1}$.

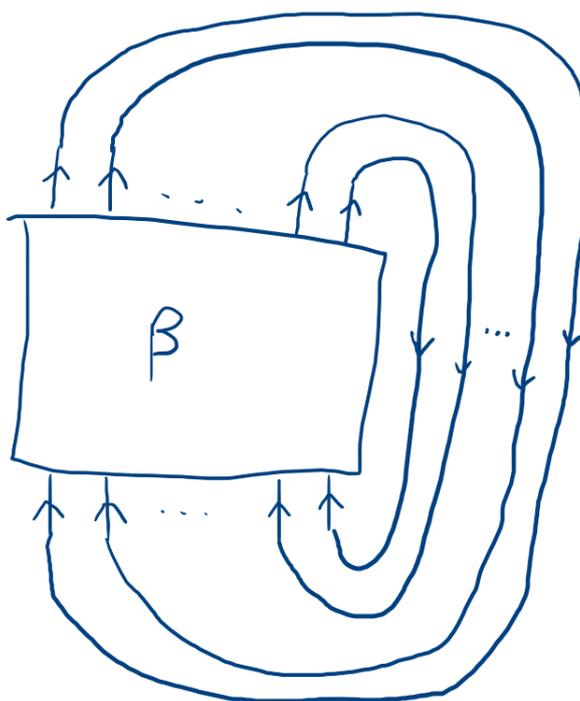
Définition 10.7. L'application $\psi_n : B_n \rightarrow S_n, \sigma_i \mapsto (i, i+1)$ définit un épimorphisme de groupe du groupe de tresses vers le groupe symétrique. En un sens, c'est un morphisme qui oublie les croisements de la tresse et ne retient que la permutation des points p_j .

Le n -ème groupe de tresses pures est $P_n := \text{Ker}(\psi_n)$.

Remarque 10.8. Le groupe B_n est aussi isomorphe au groupe des classes d'isotopies d'homéomorphismes positifs de $D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ fixant le bord point par point (on appelle ce groupe le *groupe de difféotopies* de $D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, ou *mapping class group*).

10.2. Tresses et entrelacs.

Définition 10.9. Soit $\beta \in B_n$ une tresse. Sa *fermeture* $\hat{\beta}$ est l'entrelacs obtenu en refermant les n brins de β par n chemins parallèles, comme dans la figure suivante :



Proposition 10.10. Soit $\beta \in B_n$. Alors $\mu(\hat{\beta})$ est égal au nombre de cycles disjoints de la permutation $\psi(\beta)$ (en comptant les points fixes comme des 1-cycles).

Exemple 10.11. — Pour $\sigma_1 \in B_2$, on a $\hat{\sigma}_1 = U$.

— Dans B_3 , on a $\widehat{\sigma_1 \sigma_2} = U$.

— Dans B_2 , on a $\widehat{\sigma_1^n} = T(2, n)$.

— Dans B_3 , on a $\widehat{\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1}} = 4_1$.

Théorème 10.12 (Alexander). Pour tout entrelacs L , il existe une tresse β telle que $\hat{\beta} = L$.

Exercice 10.13. On note $\cdot^{opp} : B_n \rightarrow B_n, \sigma_i \mapsto \sigma_i^{-1}$.

(1) Montrer que \cdot^{opp} induit un morphisme de groupes.

(2) Soit $\beta \in B_n$ et $L = \hat{\beta}$. Montrer que $L^* = \widehat{\beta^{opp}}$.

(3) Montrer que $-L = \widehat{(\beta^{-1})^{opp}}$.

Définition 10.14. Soit L un entrelacs. L'indice de tressage $b(L)$ de L est le plus petit entier n tel qu'il existe $\beta \in B_n$ dont la fermeture est L .

Exemple 10.15. — $b(L) = 1 \Leftrightarrow L = U$

— $b(L) = 2 \Leftrightarrow L \in \{T(2, n) \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}\}$

10.3. Tresses et polynôme HOMFLY.

Proposition 10.16. Pour tout entrelacs L , on a

$$b(L) \geq \frac{v - \text{Span} P_L(v, z)}{2} + 1$$

.

Proposition 10.17 (Ohyama). Pour tout entrelacs L non scindé, on a

$$b(L) \leq \frac{c(L)}{2} + 1$$

.

Exercice 10.18. (1) Montrer que $b(4_1) \leq 3$.

(2) Calculer $P_{4_1}(v, z)$.

(3) Montrer que $b(4_1) \geq 3$.

10.4. Mouvements de Markov.

Définition 10.19. Les *mouvements de Markov* sur l'union disjointe des groupes de tresses $\sqcup_{n \geq 1} B_n$ sont :

(1) Les mouvements $M1$ (conjugaison) : $B_n \ni \beta \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1} \in B_n$ avec $\alpha \in B_n$.

(2) Les mouvements $M2$ (stabilisation) : $B_n \ni \beta \mapsto \beta\sigma^{\pm 1} \in B_{n+1}$.

On dit que deux tresses sont *M-équivalentes* (noté \sim_M) s'il existe une suite finie de mouvements de Markov passant de l'une à l'autre.

Théorème 10.20 (Markov). *Deux tresses β, β' sont M-équivalentes si et seulement si elles ont même fermeture :*

$$\hat{\beta} \sim \hat{\beta}' \Leftrightarrow \beta \sim_M \beta'.$$

Une conséquence du Théorème 10.20 est qu'on peut construire des invariants d'entrelacs en définissant une fonction sur les tresses qui est invariante par M-équivalence.

Exercice 10.21. Trouver une suite de mouvements de Markov entre σ_1^3 et $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

10.5. Représentation de Burau.

Définition 10.22. Pour $n \geq 2$, la *représentation de Burau* est $\mathcal{B} : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$,

$$\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geq 3$, la *représentation de Burau réduite* est $\bar{\mathcal{B}} : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$,

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_i \mapsto \begin{pmatrix} I_{i-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{pmatrix} \text{ pour } 2 \leq i \leq n-2,$$

$$\sigma_{n-1} \mapsto \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -t \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$, cette représentation est $\bar{\mathcal{B}} : B_2 \rightarrow GL_1(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$, $\sigma_1 \mapsto (-t)$.

Définition 10.23 (Définition B). Soit L un entrelacs et $\beta \in B_n$ telle que $L = \hat{\beta}$. Le *polynôme d'Alexander de L* est

$$\Delta_L(t) = \frac{t-1}{t^n-1} \det(Id^{n-1} - \bar{\mathcal{B}}(\beta)).$$

On peut prouver que la Définition B définit bien un invariant d'entrelacs en utilisant les mouvements de Markov (c'est un peu technique).

10.6. Fidélité des représentations de Burau.

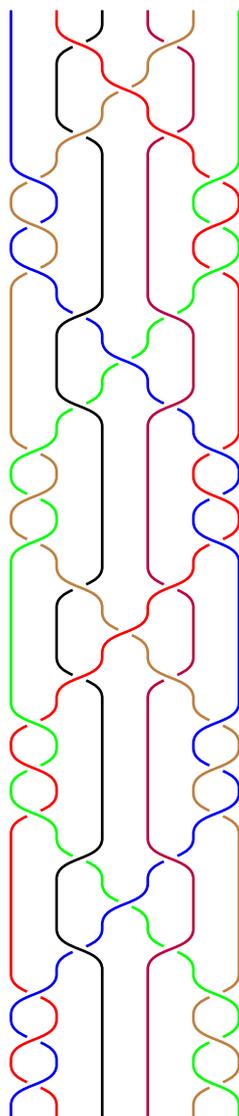
Théorème 10.24. *Pour $n = 1, 2, 3$, \mathcal{B} et $\bar{\mathcal{B}}$ sont fidèles.*

Pour $n \geq 5$, \mathcal{B} et $\bar{\mathcal{B}}$ ne sont pas fidèles.

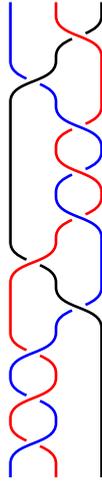
Exemple 10.25. La tresse de Long-Patton à 6 brins décrite dans l'Exercice 10.27 ci-après est une tresse non triviale dans le noyau de la représentation de Burau (et de la réduite) pour $n = 6$.

Remarque 10.26. La fidélité de la représentation de Burau pour $n = 4$ est une des plus grandes questions ouvertes du domaine.

Exercice 10.27. *Soit $\beta_{LP} \in B_6$ la tresse pure de Long-Patton représentée ci-après, et $L_{LP} = \hat{\beta}_{LP}$ l'entrelacs à 6 composantes qui est sa fermeture. Nous voulons montrer que $\Delta_{L_{LP}} = 0$ mais que L_{LP} n'est pas scindé.*



Soit $\beta = \sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-3} \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ la tresse pure à trois brins (bleu, rouge, noir dans l'ordre) représentée ci-après, et $L = \hat{\beta}$ sa fermeture.



Pour $\epsilon, \eta \in \{-1, 0, +1\} = \{-, 0, +\}$, notons $L_{\epsilon, \eta}$ la fermeture de la tresse $\sigma_1^3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^\epsilon \sigma_2^{-3} \sigma_1 \sigma_2^\eta$. En particulier $L_{+,-} = L = \hat{\beta}$. Ces variations d'exposants concernent les croisements entre les brins noir et rouge.

- (1) Identifier les entrelacs $L_{-,-}$ et $L_{0,+}$ et montrer qu'ils sont scindés.
- (2) Identifier $L_{0,0}$ et montrer que $\nabla_{L_{0,0}}(z) \neq 0$.
- (3) Montrer que $\nabla_L(z) \neq 0$ et conclure que L est non scindé.
- (4) En notant $L_{LP} = L_1 \cup \dots \cup L_6$, identifier 4 sous-entrelacs de L_{LP} qui sont équivalents à L (on pourra comparer des tresses et chercher des symétries).
- (5) Soit Γ le graphe à 6 sommets s_1, \dots, s_6 construit de sorte qu'il existe une arête reliant s_i et s_j si et seulement si il existe $k \neq i, j$ tel que $L_i \cup L_j \cup L_k$ n'est pas scindé. Dédurre des questions précédentes que Γ est connexe.
- (6) En conclure que L_{LP} n'est pas scindé.
- (7) Montrer que le polynôme d'Alexander de L_{LP} est nul.

10.7. Tresses et calcul de Fox.

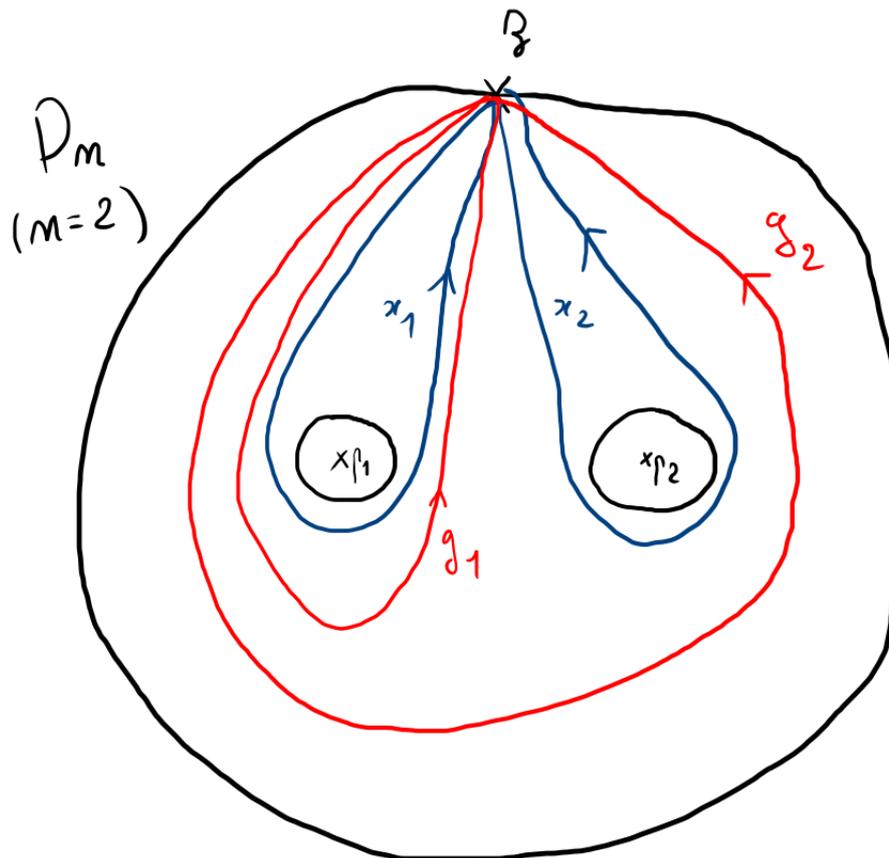
Définition 10.28. Soit $D_n = D^2 \setminus \nu\{p_1, \dots, p_n\}$, et $z \in D_n$ un point base, par exemple $z = i$. Le groupe libre $\pi_1(D_n, z) \cong \mathbb{F}_n$ admet les bases de générateurs x_1, \dots, x_n et g_1, \dots, g_n définies ci-après :

- x_i est le lacet basé en z encerclant positivement le i -ème trou correspondant à p_i .
- g_i est le lacet basé en z encerclant positivement les i premiers trous correspondant à p_1, \dots, p_i .

On a les relations

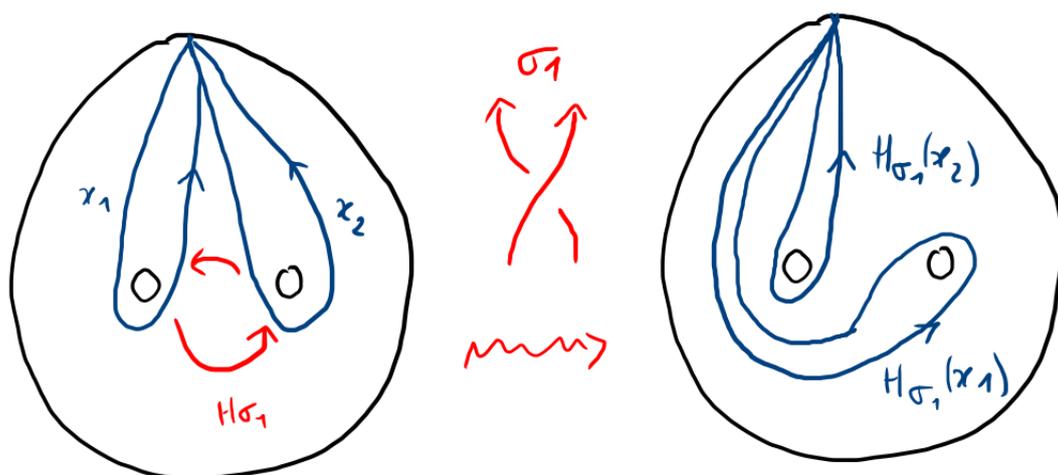
$$g_1 = x_1, g_2 = x_1 x_2, \dots, g_n = x_1 \dots x_n,$$

$$x_1 = g_1, x_2 = g_1^{-1} g_2, \dots, x_n = g_{n-1}^{-1} g_n.$$



Exercice 10.29. Vérifier que $\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} \cdot \left(\frac{\partial x_j}{\partial g_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} = Id.$

On admet que toute tresse $\beta \in B_n$ induit un difféomorphisme $H_\beta : D_n \rightarrow D_n$ (défini à isotopie près) et donc un isomorphisme de groupes $h_\beta : \pi_1(D_n) \cong \mathbb{F}_n \rightarrow \pi_1(D_n) \cong \mathbb{F}_n$. L'homéomorphisme H_β interpole l'identité point par point sur le grand cercle de bord de D_n et le déplacement des n trous de D_n selon la tresse β .



Exemple 10.30. Pour $\sigma_1 \in B_2$, on a $h_{\sigma_1}(x_1) = x_1 x_2 x_1^{-1}$ et $h_{\sigma_1}(x_2) = x_1$.

Proposition 10.31. Pour $\sigma_i \in B_n$, on a plus généralement

$$h_{\sigma_i}(x_i) = x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \quad h_{\sigma_i}(x_{i+1}) = x_i,$$

et $h_{\sigma_i}(x_j) = x_j$ pour $j \notin \{i, i+1\}$.

Exercice 10.32. Comme dans la Proposition 10.31, calculer les images des g_j par h_{σ_i} .

Remarque 10.33. Pour tout $\beta \in B_n$, on a $h_\beta(g_n) = g_n$.

Proposition 10.34. Pour (y_1, \dots, y_n) une base de générateurs de \mathbb{F}_n . Alors

$$P = \langle y_1, \dots, y_n \mid h_\beta(y_1) = y_1, \dots, h_\beta(y_n) = y_n \rangle$$

est une présentation du groupe d'entrelacs $G_\beta = \pi_1(S^3 \setminus \hat{\beta})$.

Théorème 10.35. Soit $\Phi : \mathbb{F}_n \rightarrow t^{\mathbb{Z}}$, $x_i \mapsto t$ (qui envoie g_i sur t^i). Alors pour toute tresse $\beta \in B_n$, on a

$$\mathcal{B}(\beta) = \Phi \left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}^T, \quad \overline{\mathcal{B}}(\beta) = \Phi \left(\frac{\partial h_\beta(g_j)}{\partial g_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1}^T.$$

Exercice 10.36. Démontrer le Théorème 10.35 **pour β un générateur de B_n** .

En fait, cet exercice est trop difficile tel quel pour une tresse quelconque

Corollaire 10.37. La Définition B est un cas particulier de la Définition RF, avec la présentation

$$P = \langle g_1, \dots, g_n \mid h_\beta(g_1) = g_1, \dots, h_\beta(g_{n-1}) = g_{n-1} \rangle.$$

Exercice 10.38. Démontrer le Corollaire 10.37.

10.8. **Solutions des exercices.** Exercices 10.13, 10.18, 10.21, 10.27, 10.29, 10.32, 10.36 et 10.38.

Exercice 10.13 : On note $\cdot^{opp} : B_n \rightarrow B_n$, $\sigma_i \mapsto \sigma_i^{-1}$.

(1) Montrer que \cdot^{opp} induit un morphisme de groupes.

(2) Soit $\beta \in B_n$ et $L = \hat{\beta}$. Montrer que $L^* = \widehat{\beta^{opp}}$.

(3) Montrer que $-L = \widehat{(\beta^{-1})^{opp}}$.

(1) Inverser les relateurs définissant B_n revient à leur appliquer \cdot^{opp} terme à terme, d'où le résultat.

(2) On raisonne croisement par croisement, et \cdot^{opp} change le signe de chaque croisement comme l'image miroir par le plan du dessin.

(3) On raisonne avec des diagrammes, et il faut utiliser un demi-tour autour d'une droite du plan de la figure orthogonale à la tresse.

Exercice 10.18 :

(1) Montrer que $b(4_1) \leq 3$.

(2) Calculer $P_{4_1}(v, z)$.

(3) Montrer que $b(4_1) \geq 3$.

(1) On utilise la Proposition 10.17 et le fait que $c(4_1) = 4$.

(2) On trouve $P_{4_1}(v, z) = (v^{-2} - 1 + v^2) - z^2$ avec le même arbre résolvant qu'à l'Exemple 6.13.

(3) On utilise le (2) et la Proposition 10.16.

Exercice 10.21 : Trouver une suite de mouvements de Markov entre σ_1^3 et $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

On a par exemple la suite

$$\sigma_1^3 \sim_M \sigma_1^3\sigma_2 \sim_M \sigma_1^2\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2,$$

avec un mouvement M1, un mouvement M2 et une égalité via la relation de tresses.

Exercice 10.27 :

- (1) Identifier les entrelacs $L_{-,-}$ et $L_{0,+}$ et montrer qu'ils sont scindés.
- (2) Identifier $L_{0,0}$ et montrer que $\nabla_{L_{0,0}}(z) \neq 0$.
- (3) Montrer que $\nabla_L(z) \neq 0$ et conclure que L est non scindé.
- (4) En notant $L_{LP} = L_1 \cup \dots \cup L_6$, identifier 4 sous-entrelacs de L_{LP} qui sont équivalents à L (on pourra comparer des tresses et chercher des symétries).
- (5) Soit Γ le graphe à 6 sommets s_1, \dots, s_6 construit de sorte qu'il existe une arête reliant s_i et s_j si et seulement si il existe $k \neq i, j$ tel que $L_i \cup L_j \cup L_k$ n'est pas scindé. Dédurre des questions précédentes que Γ est connexe.
- (6) En conclure que L_{LP} n'est pas scindé.
- (7) Montrer que le polynôme d'Alexander de L_{LP} est nul.

- (1) On trouve $L_{-,-} = U \sqcup H_-$ et $L_{0,+} = U \sqcup U$.
- (2) On trouve $L_{0,0} = T(2,4) \sharp T(2,-4)$, et il suit de l'Exercice 6.27 que $\nabla_{T(2,\pm 4)}(z) \neq 0$, et donc que $\nabla_{L_{0,0}}(z) \neq 0$.
- (3) Via deux arbres résolvants successifs et en conséquence du (1), on trouve que $\nabla_L(z) = -z^2 \nabla_{L_{0,0}}(z) \neq 0$.
- (4) On trouve que $L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $L_1 \cup L_2 \cup L_4$, $L_3 \cup L_5 \cup L_6$ et $L_4 \cup L_5 \cup L_6$ sont équivalents à L .
- (5) Cela suit du (3) et du (4).
- (6) Si L_{LP} était scindé, par exemple de la forme $L_{LP} = L' \cup L''$ avec L', L'' inclus dans deux boules disjointes, alors le graphe Γ associé serait l'union disjointe des graphes associés à L' et L'' , ce qui contredit le (5).
- (7) Cela suit de la Définition B et de l'Exemple 10.25.

Exercice 10.29 : Vérifier que $\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} \cdot \left(\frac{\partial x_j}{\partial g_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} = Id$.

$$\text{On a } \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_1 & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_1 \dots x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & g_1 & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial x_j}{\partial g_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & -g_1^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_1^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{n-2}^{-1} & -g_{n-1}^{-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}, \text{ d'où le résultat en multipliant ces deux}$$

matrices.

Exercice 10.32 : Comme dans la Proposition 10.31, calculer les images des g_j par h_{σ_i} .

Avec la convention $g_0 = 1$, on trouve $h_{\sigma_i}(g_i) = g_{i+1}g_i^{-1}g_{i-1}$ et $h_{\sigma_i}(g_j) = g_j$ si $j \neq i$.

Exercice 10.36 : Démontrer le Théorème 10.35.

Immédiat par calcul de Fox (c'est un bon entraînement).

Exercice 10.38 : Démontrer le Corollaire 10.37.

On applique la Définition RF pour $\Delta_{\hat{\beta}}(t)$ avec la présentation en question, en retirant la dernière ligne correspondant au générateur g_n , et il suit du Théorème 10.35 qu'on obtient la valeur dans la Définition B.

11. TORSIONS DE REIDEMEISTER

11.1. La définition.

Définition 11.1. Soit X un CW-complexe fini connexe, $G = \pi_1(X)$, $\tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel, \mathbb{K} un corps, et $\rho : G \rightarrow GL_m(\mathbb{K})$ une représentation de groupes. Le *complexe de chaînes de X tordu par ρ* est le complexe de \mathbb{K} -espaces vectoriels défini par

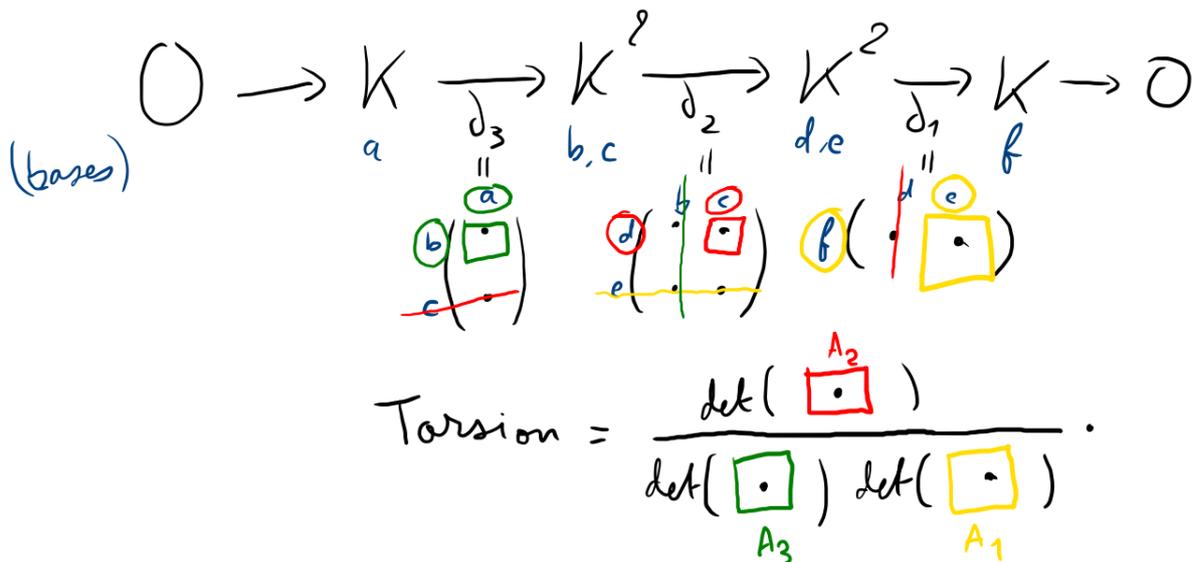
$$C_*(X, \rho) = \mathbb{K}^m \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}),$$

où le produit tensoriel est entre \mathbb{K}^m , qui est un \mathbb{K} -module à gauche et un $\mathbb{Z}G$ -module à droite via ρ^T , et $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ qui est un $\mathbb{Z}G$ -module à gauche via l'action naturelle de G sur la revêtement universel de X .

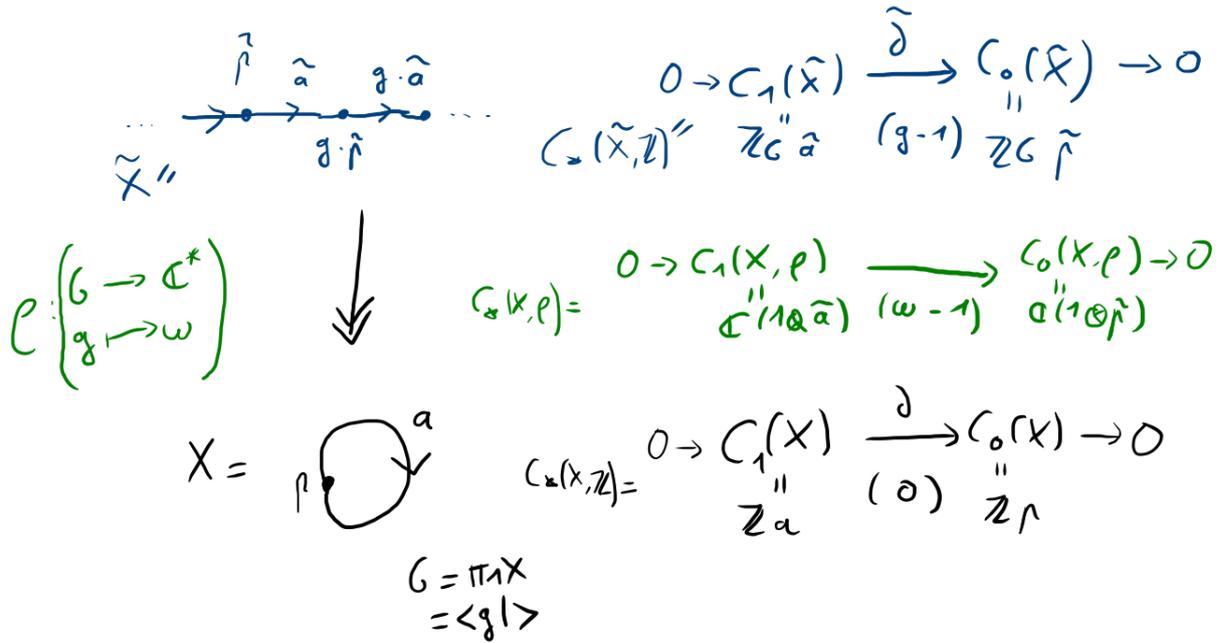
Si l'homologie $H_*(C_*(X, \rho))$ de ce complexe est nulle, alors on peut trouver des sous-matrices carrées inversibles A_k des applications de bord $\partial_k^{C_*(X, \rho)}$ correspondant à certains vecteurs de bases de sorte que chaque vecteur soit associé à exactement un de ces A_k . On définit alors la *torsion de Reidemeister de X pour ρ* comme

$$T(X, \rho) := \prod_{k \in \mathbb{N}} \det(A_k)^{(-1)^k} \in \mathbb{K}^* / (\pm \det(\rho(G))).$$

L'exemple suivant illustre comment les matrices A_k se correspondent :



11.2. L'exemple du cercle.



On a $H_*(X, \rho) = 0$ si et seulement si $\omega \neq 1$, et dans ce cas la torsion de Reidemeister est

$$T(S^1, \rho) = \frac{1}{\omega - 1} \in \mathbb{C}^* / (\pm \omega^{\mathbb{Z}}).$$

11.3. Le cas des nœuds.

Définition 11.2 (Définition R, Milnor). Soit K un nœud, $E = E_K$ son extérieur, X une structure de CW-complexe fini sur E , et \tilde{X} la structure de CW-complexe induite sur \tilde{E} .

Soit $\alpha_K : G \rightarrow t^{\mathbb{Z}} \in GL_1(\mathbb{Q}(t))$. Alors $C_*(X, \alpha_K)$ a homologie nulle et

$$\frac{\Delta_K(t)}{t - 1} \doteq T(X, \alpha_K).$$

Théorème 11.3. Pour toute présentation P de déficience 1 de E_K , il existe un CW-complexe fini W_P de dimension 2 construit à partir de P , qui est homotopiquement équivalent à E_K . L'application bord $\delta_2^{W_P}$ est donnée par la matrice de Fox de P .

De plus, cette équivalence d'homotopie induit un isomorphisme des groupes fondamentaux $\phi : \pi_1(W_P) \rightarrow G_K$, via lequel les torsions de Reidemeister de E_K et W_P se correspondent : pour tout $\rho : G_K \rightarrow GL_m(\mathbb{K})$, on a

$$T(E_K, \rho) = T(W_P, \rho \circ \phi).$$

Il suit de ce qui précède que la Définition RF du polynôme d'Alexander peut être vue comme un cas particulier de la Définition R.

RÉFÉRENCES

- [Al] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 30, 1928, p. 275–306.
- [BZ] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, volume 5 of *de Gruyter Studies in Mathematics*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.
- [Cro] P. R. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. xviii+328 pp.
- [Li] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, volume 175 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Lo] E. Long, *Topological invariants of knots : three routes to the Alexander Polynomial*, <https://www.ucl.ac.uk/~ucbpeal/alexandermac.pdf>
- [Po] M. Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. 1 (2010), no. 4, 399–411.
- [Scha] M. Scharlemann, *Unknotting Number One Knots Are Prime*, Invent. Math. 82, 37–55, 1985.
- [Sch] J. Schubert, *S-equivalence of Seifert matrices*.
- [Su] P. Suwara, *Minimal generating sets of directed oriented Reidemeister moves*, J. Knot Theory Ramifications 26 (2017), no. 4, 1750016, 20 pp.