

# La conjecture du volume de la TQFT de Teichmüller pour les nœuds twist

Fathi Ben Aribi

UCLouvain

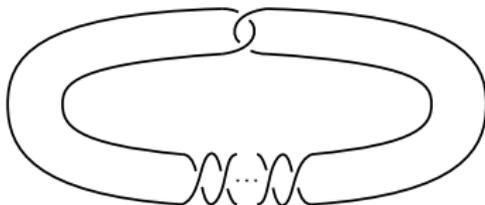
1er avril 2021

(en collaboration avec François Guéritaud et Eiichi Piguet-Nakazawa)

arXiv:1903.09480

## Objectif

*La conjecture du volume de Teichmüller pour les nœuds twist.*



- 0 **Contexte:** topologie quantique, conjectures du volume.
- 1 **Topologie:** trianguler les complémentaires des nœuds twist
- 2 **Géométrie:** les triangulations contiennent l'hyperbolicité
- 3 **Algèbre:** calculer la TQFT de Teichmüller
- 4 **Analyse:** le volume hyperbolique via une asymptotique

(Optionnel: idées de preuves, selon les goûts du public)

'84: **Polynôme de Jones**, nouvel invariant de nœud.

'90: **Witten** retrouve le polynôme de Jones via la **physique**.

90s: Des **invariants topologiques** (TQFTs de **Reshitikin-Turaev**, **Turaev-Viro**, ...) découverts grâce à l'intuition de la physique.

Andersen-Kashaev '11: **TQFT de Teichmüller** d'une 3-variété  $M$  **triangulée**, une "TQFT de **dimension infinie**".

Sa **fonction partition**  $\{Z_b(M) \in \mathbb{C}\}_{b>0}$  donne un **invariant** de  $M$ .

### Conjecture du volume (Andersen-Kashaev '11)

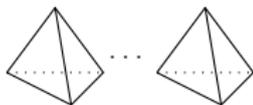
*Si  $M$  est un complémentaire de nœud hyperbolique triangulé, alors son **volume hyperbolique**  $\text{Vol}(M)$  apparaît comme un **facteur de décroissance exponentiel** de  $Z_b(M)$  dans la limite  $b \rightarrow 0^+$ .*

## TOPOLOGIE



Diagramme  
d'un nœud  $K$

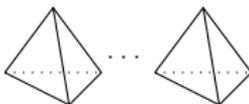
**Triangulation**  
de  $S^3 \setminus K$



## TOPOLOGIE

NŒUDS  
TWIST  $K_n$ Diagramme  
d'un nœud  $K$ **Triangulation**  
de  $S^3 \setminus K$ 

TH 1



## TOPOLOGIE

NŒUDS  
TWIST  $K_n$

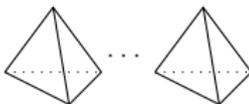


Diagramme  
d'un nœud  $K$

Triangulation  
de  $S^3 \setminus K$

TH 1

TH 2

GÉOMETRIE  
HYPERBOLIQUE

Volume  
hyperbolique

$\text{vol}(S^3 \setminus K)$

## TOPOLOGIE

NŒUDS  
TWIST  $K_n$

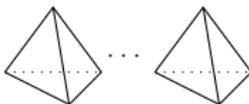


Diagramme  
d'un nœud  $K$

Triangulation  
de  $S^3 \setminus K$

TH 1

TH 2

INVARIANTS  
QUANTIQUES

$$J_K(N, q)$$

Polynômes de  
Jones coloriés

TQFT de  
Teichmüller

$$Z_b(S^3 \setminus K)$$

TH 3

GÉOMETRIE  
HYPERBOLIQUE

Volume  
hyperbolique

$$\text{vol}(S^3 \setminus K)$$

## TOPOLOGIE

NŒUDS  
TWIST  $K_n$

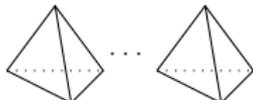


Diagramme  
d'un nœud  $K$

Triangulation  
de  $S^3 \setminus K$

TH 1

TH 2

INVARIANTS  
QUANTIQUES
$$J_K(N, q)$$

Polynômes de  
Jones coloriés

TQFT de  
Teichmüller

$$Z_b(S^3 \setminus K)$$

TH 3

LIMITE  
SEMI-CLASSIQUE

CONJECTURES  
DU VOLUME

GÉOMETRIE  
HYPERBOLIQUE

$$q = e^{2i\pi/N}, N \rightarrow \infty \rightarrow \sim e^N \frac{\text{vol}(S^3 \setminus K)}{2\pi}$$

→ Sommes

↓  
IntégralesMéthode du  
point selle

→ Intégrales

VOLUME  
hyperbolique

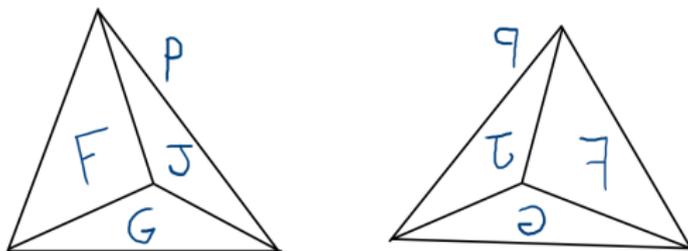
$$b \rightarrow 0^+ \rightarrow \sim e^{\frac{1}{b^2} \frac{-\text{vol}(S^3 \setminus K)}{2\pi}}$$

TH 4

Un **tétraèdre** sera compact ou **idéal** (sans sommets) ou tronqué.



Une **triangulation**  $X = (T_1, \dots, T_N, \sim)$  d'une 3-variété  $M = N$  **tétraèdres** et une **relation de recollement**  $\sim$  des faces 2 à 2.

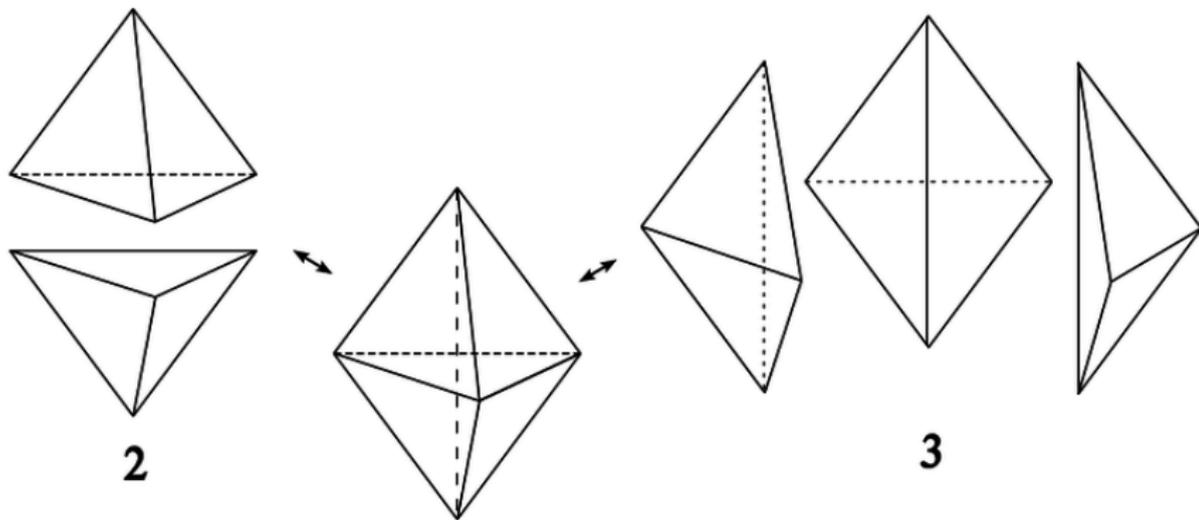


Exemple :  $(T_1, T_2, \sim)$  triangulation de  $S^3$  ( $T_i$  compacts),  
 $(S^3 \setminus 4 \text{ points})$  ( $T_i$  idéaux) ou  $(S^3 \setminus 4 \text{ boules})$  ( $T_i$  tronqués).

Mouvements de **Pachner** (2, 3) : relie des triangulations idéales.

Matveev-Piergallini:  $X$  et  $X'$  triangulent la **même**  $M$  si et seulement si elles sont reliées par un **nombre fini** de Pachner (2, 3).

⇒ Utile pour construire des **invariants topologiques** de  $M$ .

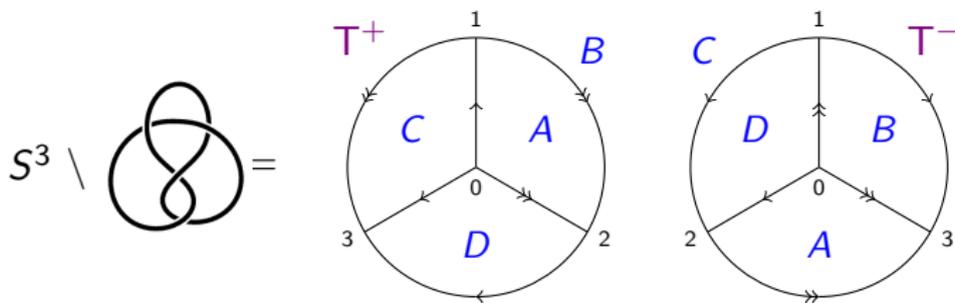


source de l'image : Wikipedia

Nos tétraèdres auront des **sommets ordonnés** (donc des **arêtes orientées** aussi)  $\rightsquigarrow$  deux **signes** possibles  $\epsilon(T) \in \{\pm 1\}$ .

Dans  $X = (T_1, \dots, T_N, \sim)$ , on demande que le recollement  $\sim$  des faces **respecte l'ordre des sommets**.

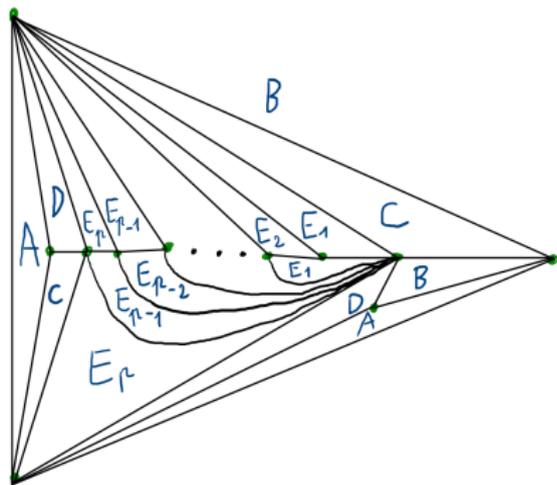
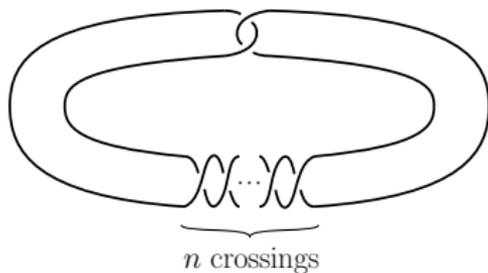
Exemple fil rouge : Triangulation **idéale**  $X = (T_+, T_-, \sim)$  du **complémentaire du nœud de huit**  $S^3 \setminus 4_1$ .



$$X^3 = \{T^+, T^-\}, \quad X^2 = \{A, B, C, D\}, \quad X^1 = \{\rightarrow, \rightsquigarrow\}, \quad X^0 = \{\cdot\}$$

applications de faces  $x_0, \dots, x_3: X^3 \rightarrow X^2$ , par exemple  $x_0(T^+) = B$ .

Thurston: depuis un **diagramme** du nœud  $K$ , on peut construire une **triangulation idéale**  $X$  du complémentaire  $M = S^3 \setminus K$ .

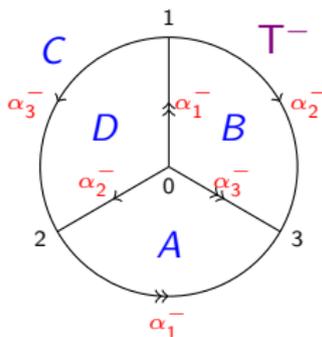
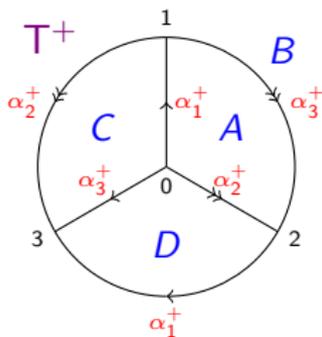


Le  $n$ -ème nœud twist  $K_n$  et la triangulation  $X_n$  ( $n$  impair,  $p = \frac{n-3}{2}$ )

**Théorème (TH 1, B.A.-P.N. '18)**

Pour tout  $n \geq 2$ , on construit une **triangulation idéale**  $X_n$  du complémentaire du **nœud twist**  $K_n$ , avec  $\left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor$  tétraèdres.

$\mathcal{A}_X$  est l'espace des **structures d'angles** sur  $X = (T_1, \dots, T_N, \sim)$ , i.e. des  $3N$ -uplets  $\alpha \in (0, \pi)^{3N}$  d'**angles diédraux** sur les arêtes, t.q. la somme est  $\pi$  à tout sommet et  $2\pi$  autour de chaque arête.



$$\mathcal{A}_X = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^+ \\ \alpha_2^+ \\ \alpha_3^+ \\ \alpha_1^- \\ \alpha_2^- \\ \alpha_3^- \end{pmatrix} \in (0, \pi)^6 \left| \begin{array}{l} \alpha_1^+ + \alpha_2^+ + \alpha_3^+ = \pi \\ \alpha_1^- + \alpha_2^- + \alpha_3^- = \pi \\ (\rightarrow) 2\alpha_1^+ + \alpha_3^+ + 2\alpha_2^- + \alpha_3^- = 2\pi \\ (\rightarrow) 2\alpha_2^+ + \alpha_3^+ + 2\alpha_1^- + \alpha_3^- = 2\pi \end{array} \right. \right\} \ni \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \vdots \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$\alpha$  fixée  $\leadsto$  fonctions d'angle  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3: X^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , par ex.  $\alpha_2(T^+) = \alpha_{2/24}^+$

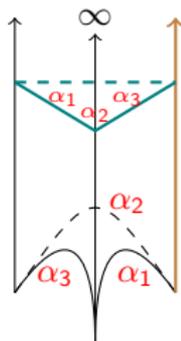
L'espace **hyperbolique** tridimensionnel est  $\mathbb{H}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0}$  avec

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{z^2},$$

une métrique de courbure constante  $-1$ .

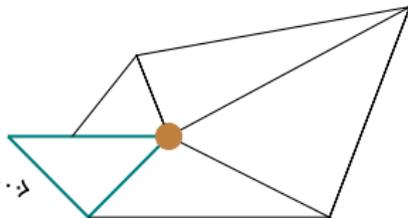
Un nœud  $K$  est **hyperbolique** si  $M = S^3 \setminus K$  peut être muni d'une métrique hyperbolique complète de **volume**  $\text{Vol}(M)$  fini.

$\leadsto$  une structure  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ , où  $X = (T_1, \dots, T_N, \sim)$  triangule  $M$ .



$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

$T \hookrightarrow \mathbb{H}^3$



$\sum_{\text{arête}} \alpha_j = 2\pi$  (+ autres)  
le recollement donne une **variété**

Pour tout  $n \geq 2$ , le nœud twist  $K_n$  est **hyperbolique**.

### Théorème (TH2, B.A.-G.-P.N. '20)

*Pour tout  $n \geq 2$ , la triangulation  $X_n$  de  $S^3 \setminus K_n$  est **géométrique**, i.e. elle admet une structure d'angle  $\alpha^0 \in \mathcal{A}_{X_n}$  correspondant à la structure hyperbolique **complète** sur  $S^3 \setminus K_n$ .*

$X$  **géométrique**  $\Leftrightarrow \exists$  solution aux équations de recollement **non linéaires** de  $X$  (difficile !)

Existence de  $X$  **géométrique** pour tout  $M \rightsquigarrow$  **Question ouverte !**

Casson-Rivin, Futer-Guéritaud: approche via  $\mathcal{A}_X$ , i.e. les solutions de la partie **linéaire** : maximiser la **fonctionnelle volume** sur  $\mathcal{A}_X$ .

Fonction **dilogarithme** :  $\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \log(1-u) \frac{du}{u}$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .

Fonctionnelle volume  $\text{Vol}: \mathcal{A}_X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (**strict. concave**) est:

$$\text{Vol}(\alpha) := \sum_{T \in X^3} \Im \text{Li}_2(z(T)) + \arg(1 - z(T)) \log |z(T)|,$$

où  $z(T) = \left( \frac{\sin \alpha_3(T)}{\sin \alpha_2(T)} \right)^{\epsilon(T)} e^{i\alpha_1(T)} \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}_{>0}$  encode les **angles** de  $T$ .

### Théorème (TH2, B.A.-G.-P.N. '20)

$\forall n \geq 2$ , la triangulation  $X_n$  de  $S^3 \setminus K_n$  est **géométrique**, i.e. elle admet une structure d'angle  $\alpha^0 \in \mathcal{A}_{X_n}$  correspondant à la structure hyperbolique **complète** sur  $S^3 \setminus K_n$ .

Idée de preuve du TH2:

- Vérifier que le polyèdre ouvert  $\mathcal{A}_X$  est **non vide**.
- Fait:  $\alpha^0$  **complète** existe  $\Leftrightarrow \max_{\mathcal{A}_X} \text{Vol}$  est atteint sur  $\mathcal{A}_X$ .
- Montrer que  $\max_{\mathcal{A}_X} \text{Vol}$  ne peut pas être sur  $\partial \mathcal{A}_X$  (cas par cas).

**Fonction partition** pour la triangulation  $X$  (et  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ ,  $\mathbf{b} > 0$ ):

$$Z_{\mathbf{b}}(X, \alpha) = \int_{\bar{x} \in \mathbb{R}^{X_2}} d\bar{x} \prod_{T_1, \dots, T_N} \rho_{\mathbf{b}}(T)(\alpha)(\bar{x}) \in \mathbb{C}.$$

**Opérateur tétraédrique:**  $\rho_{\mathbf{b}}(T)(\alpha)(\bar{x}) \in S'(\mathbb{R}^{X_2})$  est égal à

$$\frac{\delta(x_0(T) - x_1(T) + x_2(T)) e^{(2\pi i \epsilon(T) x_0(T) + (\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1}) \alpha_3(T))(x_3(T) - x_2(T))}}{\Phi_{\mathbf{b}} \left( (x_3(T) - x_2(T)) - \frac{i(\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})}{2\pi} \epsilon(T) (\alpha_2(T) + \alpha_3(T)) \right)^{\epsilon(T)}}.$$

**Dilogarithme quantique de Faddeev:**

$$\Phi_{\mathbf{b}}(x) := \exp \left( \int_{z \in \mathbb{R} + i0^+} \frac{e^{-2izx} dz}{4 \sinh(z\mathbf{b}) \sinh(z\mathbf{b}^{-1})z} \right).$$

**Proposition (Andersen-Kashaev '11)**

$|Z_{\mathbf{b}}(X, \alpha)|$  est **invariant** pour les Pachner à angles sur  $(X, \alpha)$ .

**Fonction partition** pour la triangulation  $X$  (et  $\alpha \in \mathcal{A}_X$ ,  $\mathbf{b} > 0$ ):

$$Z_{\mathbf{b}}(X, \alpha) = \int_{\bar{x} \in \mathbb{R}^{X_2}} d\bar{x} \prod_{T_1, \dots, T_N} \rho_{\mathbf{b}}(T)(\alpha)(\bar{x}) \in \mathbb{C}.$$

**Opérateur tétraédrique:**  $\rho_{\mathbf{b}}(T)(\alpha)(\bar{x}) \in S'(\mathbb{R}^{X_2})$  est égal à

$$\frac{\delta(x_0(T) - x_1(T) + x_2(T)) e^{(2\pi i \epsilon(T)x_0(T) + (\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})\alpha_3(T))(x_3(T) - x_2(T))}}{\Phi_{\mathbf{b}} \left( (x_3(T) - x_2(T)) - \frac{i(\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})}{2\pi} \epsilon(T)(\alpha_2(T) + \alpha_3(T)) \right)^{\epsilon(T)}}.$$

### Conjecture du volume (Andersen-Kashaev '11)

Soit  $X$  triangulation de  $M = S^3 \setminus K$  **hyperbolique**.

- (1)  $\exists \lambda_X$  combinaison linéaire d'angles diédraux,  $\exists$  fonction lisse  $J_X: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\forall$  structures d'angles  $\alpha$ ,  $\forall \mathbf{b} > 0$ ,

$$|Z_{\mathbf{b}}(X, \alpha)| = \left| \int_{x \in \mathbb{R}} J_X(\mathbf{b}, x) e^{-(\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})x \lambda_X(\alpha)} dx \right|.$$

## Conjecture du volume (Andersen-Kashaev '11)

Soit  $X$  triangulation de  $M = S^3 \setminus K$  **hyperbolique**.

- (1)  $\exists \lambda_X$  combinaison linéaire d'angles diédraux,  $\exists$  fonction lisse  $J_X: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\forall$  structures d'angles  $\alpha$ ,  $\forall \mathbf{b} > 0$ ,

$$|Z_{\mathbf{b}}(X, \alpha)| = \left| \int_{x \in \mathbb{R}} J_X(\mathbf{b}, x) e^{-(\mathbf{b} + \mathbf{b}^{-1})x \lambda_X(\alpha)} dx \right|.$$

- (2) Le **volume hyperbolique**  $\text{Vol}(M)$  est obtenu comme la **limite semi-classique** suivante :

$$\lim_{\mathbf{b} \rightarrow 0^+} 2\pi \mathbf{b}^2 \log |J_X(\mathbf{b}, 0)| = -\text{Vol}(M).$$

## Théorème (TH3, B.A.-P.N. '18)

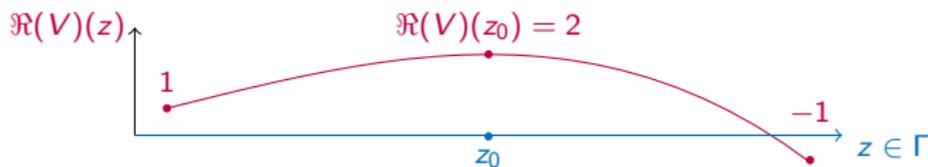
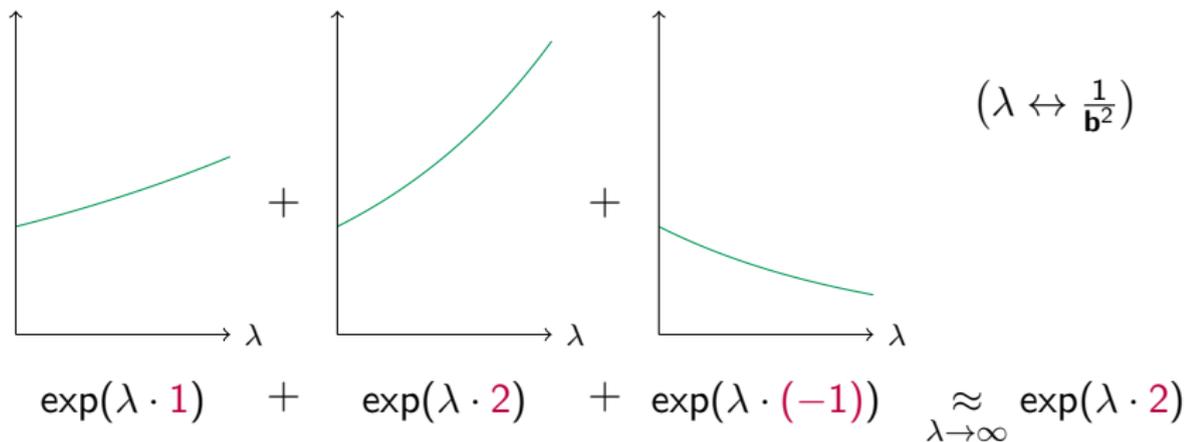
- (1) *prouvé pour tous les nœuds twist, via calculs algébriques.*

## Théorème (TH4, B.A.-G.-P.N. '20)

- (2) *prouvé pour tous les nœuds twist, via analyse asymptotique.*

La **méthode du point selle** donne (sous conditions techniques) une **asymptotique d'intégrales complexes à paramètres** de la forme :

$$\left| \int_{\Gamma} \exp\left(\frac{1}{b^2} V(z)\right) dz \right| \underset{b \rightarrow 0^+}{\approx} \exp\left(\frac{1}{b^2} \Re(V)(z_0)\right).$$



## Théorème (TH4, B.A.-G.-P.N. '20)

$$\lim_{\mathbf{b} \rightarrow 0^+} 2\pi \mathbf{b}^2 \log |J_{X_n}(\mathbf{b}, 0)| = -\text{Vol}(S^3 \setminus K_n).$$

Plan de la preuve : (a) Approximation semi-classique:

$$|J_{X_n}(\mathbf{b}, 0)| \underset{\mathbf{b} \rightarrow 0^+}{\approx} \left| \int_{\Gamma} \exp\left(\frac{1}{\mathbf{b}^2} V(z)\right) dz \right|.$$

vient de  $\log \Phi_{\mathbf{b}} \underset{\mathbf{b} \rightarrow 0^+}{\approx} \text{Li}_2$  + termes d'erreur bornés

(b) Méthode du point selle:

$$\left| \int_{\Gamma} \exp\left(\frac{1}{\mathbf{b}^2} V(z)\right) dz \right| \underset{\mathbf{b} \rightarrow 0^+}{\approx} \exp\left(\frac{1}{\mathbf{b}^2} \Re(V)(z_0)\right).$$

on vérifie que  $z_0$  existe grâce au TH2 (géométricit ).

(c) Enfin,  $\Re(V)(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \text{Vol}(S^3 \setminus K_n)$ , grâce    $\text{Li}_2 \leftrightarrow \text{Vol}$ .

## Directions futures possibles:

Étendre l'**algorithme** Diagramme du nœud  $\rightarrow$  Triangulation (nœuds non alternés, entrelacs, choix canoniques).

Comprendre les **simplifications combinatoires** dans  $Z_b(X, \alpha)$  ( $\leftrightarrow$  données de Neumann-Zagier ?)

Adapter à de **nouvelles formulations** de la TQFT de Teichmüller (par ex. pour les entrelacs).

Étendre les techniques d'analyse à une **expansion asymptotique** ( $\leftrightarrow$  torsion de Reidemeister ?)

Appliquer les **triangulations géométriques** à d'autres **conjectures du volume** (Jones coloriés, Turaev-Viro...)

**Espoir:**  $\exists$  triangulation géométrique  $\Rightarrow$  conj. du volume est vraie.

**Merci pour votre attention!**

Ce slide est laissé blanc pour servir de tableau éventuel.