Mouvements de Markov sur les applications de Burau L^2

Fathi Ben Aribi

UCLouvain

15 décembre 2020

Contexte

B.A., Conway 2018 : Construction des **applications de Burau L^2** $\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}$ des groupes de tresses B_n, où $t > 0$ et $\gamma\colon \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G$.

Pour $\gamma\colon \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G_K$, lien avec $T^{(2)}_K(t)$ **la torsion d'Alexander L^2**.

Question

Quels autres **invariants de nœuds** *peut-on construire via* $\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}$ *?*

Théorème (B.A. 2020+)

1. *Pour γ plus bas que G_K :* **invariants d'Alexander L^2 tordus**.
2. *Pour certains autres γ:* **pas** *d'invariant de nœuds.*

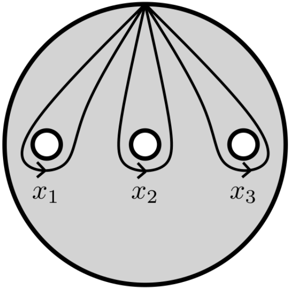
<u>Méthode :</u> Appliquer les **mouvements de Markov** aux $\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}$.

Plan de l'exposé

1. Préliminaires (Artin, Fox, Burau)
2. Applications de Burau L^2
3. Torsions d'Alexander L^2
4. Mouvements de Markov et nouveaux invariants

Tresses et groupe libre

Groupe libre $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \ldots, x_n \mid \rangle \;\cong\; \pi_1(D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\})$.



Artin: Une tresse $\beta \in B_n$ induit un automorphisme $h_\beta \in Aut(\mathbb{F}_n)$.

Exemple: Pour $\sigma_1 \in B_2$, $h_{\sigma_1}: \; x_1 \mapsto x_1 x_2 x_1^{-1}, \; x_2 \mapsto x_1$.

$$B_n \hookrightarrow Aut(\mathbb{F}_n)$$

Calcul de Fox

Les **dérivées de Fox** sur $\mathbb{F}_n$ sont des applications linéaires $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{Z}\mathbb{F}_n \to \mathbb{Z}\mathbb{F}_n$ (où $i = 1, \dots, n$), définies inductivement par:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{i,j}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j^{-1}\right) = -\delta_{i,j} x_j^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u) + u \frac{\partial}{\partial x_i}(v).$$

$\left(\dfrac{\partial f(x_j)}{\partial x_i}\right)_{i,j} \in GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n)$ est le **jacobien de Fox** de $f \in Aut(\mathbb{F}_n)$.

Exemple: Pour $\sigma_1 \in B_2$, $h_{\sigma_1}: \ x_1 \mapsto x_1 x_2 x_1^{-1}, \ x_2 \mapsto x_1$, et

$$\left(\frac{\partial h_{\sigma_1}(x_j)}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} & 1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Aut(\mathbb{F}_n) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n)$$

On définit un **morphisme d'anneaux** $\kappa(\Phi_n, \gamma, t)$: pour

- $\Phi_n \colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{Z}, x_i \mapsto 1$, l'épimorphisme d'**augmentation**.
- $\gamma \colon \mathbb{F}_n \to G$ tel que Φ_n factorise par γ,
- $t > 0$,

on définit $\kappa(\Phi_n, \gamma, t) \colon \mathbb{Z}\mathbb{F}_n \to \mathbb{R}G$ par $g \mapsto t^{\phi(g)}\gamma(g)$.

Exemple: Pour $n = 2$ et $\gamma = T^{\Phi_2} \colon \left(\mathbb{F}_2 \to T^{\mathbb{Z}} = \{T^m, m \in \mathbb{Z}\}\right)$,

$$\kappa(\Phi_2, T^{\Phi_2}, t) \colon \begin{pmatrix} 1 - x_1x_2x_1^{-1} & 1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - tT & 1 \\ tT & 0 \end{pmatrix}.$$

$\kappa(\Phi_n, \gamma, t)$ induit $GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \to GL_n(\mathbb{R}G)$.

Entre Artin et Burau

$$B_n \overset{Artin}{\hookrightarrow} Aut(\mathbb{F}_n) \overset{Fox}{\hookrightarrow} GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n,\gamma,t)} GL_n(\mathbb{R}G)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_n \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, two heads, "\Phi_n"'] & & G \arrow[dll, dashed, two heads] \\
\mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$

Considérons les applications

$$\beta \ \mapsto \ \kappa(\Phi_n, \gamma, t) \left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

pour différents $\gamma \colon \mathbb{F}_n \to G$.

- $\gamma = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_n}$: jacobien de **l'action d'Artin**, toujours **injective**.

$$B_2 \ni \sigma_1 \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} & 1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\gamma = T^{\Phi_n}$: **rep. de Burau**, qui est **non injective** pour $n \geqslant 5$.

$$B_2 \ni \sigma_1 \ \mapsto \ \begin{pmatrix} 1 - tT & 1 \\ tT & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Problème :</u> Extraire de l'info de $M_n(\mathbb{R}G)$ si G est non commutatif.

$\rightarrow$ Sur $\ell^2(G)$ il y a le **déterminant de Fuglede-Kadison**.

On remplace donc l'algèbre $\mathbb{R}G$ par l'espace de Hilbert

$$\ell^2(G) := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \;\middle|\; \lambda_g \in \mathbb{C}, \sum_{g \in G} |\lambda_g|^2 < \infty \right\}.$$

Opérateurs **bornés** G-équivariants typiques:

$$R_h \colon \ell^2(G) \to \ell^2(G), g \mapsto gh,$$

l'opérateur **multiplication à droite** par $h \in G$.

L'opération $R.$ induit $\quad GL_n(\mathbb{R}G) \hookrightarrow B\left(\ell^2(G)^n\right).$

Les applications de Burau L^2

$$B_n \overset{Artin}{\hookrightarrow} Aut(\mathbb{F}_n) \overset{Fox}{\hookrightarrow} GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n,\gamma,t)} GL_n(\mathbb{R}G) \overset{R.}{\hookrightarrow} B\left(\ell^2(G)^n\right),$$

L'**application de Burau** L^2 associée à $t > 0$ et $\gamma\colon \mathbb{F}_n \to G$ est:

$$\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}\colon \begin{pmatrix} B_n & \to & B\left(\ell^2(G)^n\right) \\ \beta & \mapsto & R_A \end{pmatrix}, \text{où } A = \kappa(\Phi_n,\gamma,t)\left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

L'**application de Burau** L^2 **réduite** associée aux mêmes t, γ est:

$$\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma}\colon \begin{pmatrix} B_n \to B\left(\ell^2(G)^{n-1}\right) \\ \beta \mapsto \quad R_{A'} \end{pmatrix}, \text{où } A' = \kappa(\Phi_n,\gamma,t)\left(\frac{\partial h_\beta(g_j)}{\partial g_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}.$$

où $g_1 = x_1,\ g_2 = x_1x_2,\ \ldots,\ g_n = x_1\ldots x_n$ engendrent aussi $\mathbb{F}_n$.

$$B_n \overset{Artin}{\hookrightarrow} Aut(\mathbb{F}_n) \overset{Fox}{\hookrightarrow} GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n,\gamma,t)} GL_n(\mathbb{R}G) \overset{R.}{\hookrightarrow} B\left(\ell^2(G)^n\right),$$

L'**application de Burau** L^2 associée à $t > 0$ et $\gamma\colon \mathbb{F}_n \to G$ est:

$$\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma} \colon \begin{pmatrix} B_n & \to & B\left(\ell^2(G)^n\right) \\ \beta & \mapsto & R_A \end{pmatrix}, \text{où } A = \kappa(\Phi_n, \gamma, t)\left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

L'**application de Burau** L^2 **réduite** associée aux mêmes t, γ est:

$$\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma} \colon \begin{pmatrix} B_n \to B\left(\ell^2(G)^{n-1}\right) \\ \beta \mapsto R_{A'} \end{pmatrix}, \text{où } A' = \kappa(\Phi_n, \gamma, t)\left(\frac{\partial h_\beta(g_j)}{\partial g_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}.$$

où $g_1 = x_1,\ g_2 = x_1x_2,\ \ldots,\ g_n = x_1\ldots x_n$ engendrent aussi $\mathbb{F}_n$.

Multiplicativité et calculs

Formule d'(anti-)**multiplication**: $\forall \alpha, \beta \in B_n$,

$$\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}(\alpha\beta) = \mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}(\beta) \circ \mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma \circ h_\beta}(\alpha).$$

Conséquence : Plus $\gamma \colon \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G$ est **injectif**, moins $\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}$ ressemble à une (anti-)**représentation de groupe**.

$\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}$ est une (anti-)rep. du **sous-groupe** $\{\beta \in B_n, \gamma \circ h_\beta = \gamma\}$.

On peut quand même **calculer** $\mathcal{B}^{(2)}_{t,\gamma}(\beta)$ via les images des σ_i.

(Dubois-Friedl-Lück 14) **Torsion d'Alexander** L^2 de l'entrelacs L :

$$T_L^{(2)} \colon \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ t & \longmapsto & T_L^{(2)}(t) \end{pmatrix}.$$

Quelques propriétés:

(Lück-Schick 99) $T_L^{(2)}(1)$ contient le **volume** de $S^3 \setminus L$.

(Friedl-Lück, Liu 15) $T_L^{(2)}(0^+)$, $T_L^{(2)}(+\infty)$ donnent le **genre** $g(L)$.

(Miscellaneous) $T_L^{(2)}$ est **nulle** ssi L est **scindé**.

Burau L^2 à l'étage du groupe de l'entrelacs

La torsion d'Alexander L^2 est définie avec le **déterminant de Fuglede-Kadison** $\det_G \colon R_{M_n(\mathbb{Z}G)} (\subset B(\ell^2(G)^n)) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

(difficile à calculer !)

Pour $\gamma = \gamma_\beta \colon \mathbb{F}_n \to G_\beta \cong \pi_1(S^3 \setminus \hat{\beta})$ le quotient par $h_\beta(x_i) = x_i$,
Burau L^2 **réduite** $\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma_\beta}$ donne la torsion d'Alexander L^2 $T^{(2)}_{\hat{\beta}}$:

Théorème (B.A.-Conway 17)

Soit $\beta \in B_n$, $L = \hat{\beta}$ sa fermeture et $t > 0$. On a alors:

$$T^{(2)}_L(t) \cdot \max(1,t)^n \;=\; \det{}_{G_L}\left(\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma_\beta}(\beta) - \mathrm{Id}^{\oplus(n-1)}\right).$$

Fonctions de Markov

Les **mouvements de Markov** sur les tresses $\sqcup_{n\geqslant 1} B_n$ sont:

- Markov 1, la **conjugaison** : $\beta \mapsto \alpha^{-1}\beta\alpha$, où $\alpha, \beta \in B_n$.
- Markov 2, les **stabilisations** : $B_n \ni \beta \mapsto \sigma_n^{\pm 1}\beta \in B_{n+1}$.

Markov : $\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont des entrelacs isotopes ssi β et β' sont reliées par un nombre fini de Markov 1, Markov 2 et leurs inverses.

Une fonction F sur $\sqcup_{n\geqslant 1} B_n$ est une **fonction de Markov** si elle est invariante par les mouvements de Markov.
$\rightarrow$ F donne un **invariant d'entrelacs**.

Question

Pour quels γ a-t-on $\beta \mapsto \det_G \left(\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma}(\beta) - \mathrm{Id}^{\oplus(n-1)} \right)$ fonction de Markov ?

La Markov-admissibilité d'une famille d'épimorphismes

Une famille $\mathcal{Q}$ d'**épimorphismes de groupes libres**

$$\mathcal{Q} = \left\{ Q_\beta \colon \mathbb{F}_{n(\beta)} \twoheadrightarrow G_{Q_\beta} \mid \beta \in \sqcup_{n \geqslant 1} B_n \right\}$$

est **Markov-admissible** si pour toute paire de tresses β, β' reliées par un mouvement de Markov, Q_β et $Q_{\beta'}$ sont "comparables".

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_n \arrow[r, "h_\alpha", "\sim"'] \arrow[d, two heads, "Q_\beta"] & \mathbb{F}_n \arrow[d, two heads, "Q_{\alpha^{-1}\beta\alpha}"] \\
G_{Q_\beta} \arrow[r, "\exists\ \chi^{\mathcal{Q}}_{\beta,\alpha}", "\sim"'] & G_{Q_{\alpha^{-1}\beta\alpha}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_n \arrow[r, hook, "\iota_n"] \arrow[d, two heads, "Q_\beta"] & \mathbb{F}_{n+1} \arrow[d, two heads, "Q_{\sigma_n^\varepsilon \beta}"] \\
G_{Q_\beta} \arrow[r, hook, "\exists\ \sigma^{\mathcal{Q}}_{\beta,\varepsilon}"] & G_{Q_{\sigma_n^\varepsilon \beta}}
\end{tikzcd}$$

But : Construire une **fonction de Markov** sur $\sqcup_{n \geqslant 1} B_n$ via $\mathcal{Q}$.

Plusieurs familles d'épimorphismes Markov-admissibles

- $Id_{\mathbb{F}_n}$:= l'**identité** sur $\mathbb{F}_n$.
- φ_n := l'**abélianisation** de $\mathbb{F}_n$ vers $\mathbb{Z}^n$.
- γ_β := le quotient par $h_\beta(x_i) = x_i$ $\quad$ ($\Leftrightarrow$ **fermeture** de β).
- Φ_n := l'**augmentation** de $\mathbb{F}_n$ vers $\mathbb{Z}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{F}_n \ X \arrow[dl, two heads, "\varphi_n"'] \arrow[dd, two heads, "\Phi_n"] \arrow[dr, two heads, "\gamma_\beta"] & & \\
X \ \mathbb{Z}^n \arrow[dr, dashed, two heads] & & G_\beta \ \checkmark \arrow[dl, dashed, two heads] \arrow[r, "\Psi_\beta", "\sim"'] \arrow[dr, two heads, "\psi_\beta"'] & G_{\hat{\beta}} \ \checkmark \\
 & \mathbb{Z} \ \checkmark & & \Gamma_{\psi_\beta} \ \checkmark \arrow[ll, dashed, two heads]
\end{tikzcd}
$$

$\det\left(\mathrm{Burau}^{(2)} - \mathrm{Id}\right)$ est **fonction de Markov** ? $\checkmark$: Oui. X: Non.

Obtenir des fonctions de Markov

Pour $\mathcal{Q} = \{Q_\beta\}_{\beta \in \sqcup_{n \geqslant 1} B_n}$ Markov-admissible et $t > 0$, on définit:

$$F_{\mathcal{Q}} := \left(\begin{array}{ccc} \sqcup_{n\geqslant 1} B_n & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}) / \{t \mapsto t^m, m \in \mathbb{Z}\} \\ \beta & \mapsto & \left[t \mapsto \dfrac{\det_{G_{Q_\beta}} \left(\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t, Q_\beta}(\beta) - \mathrm{Id}^{\oplus (n-1)} \right)}{\max(1, t)^n} \right] \end{array} \right)$$

Théorème (B.A. 2020+)

1. *Si $\{Q_\beta\} = \{\psi_\beta \circ \gamma_\beta\}$, alors $F_{\mathcal{Q}}$ est de Markov, et l'invariant associé est une torsion d'Alexander L^2 tordue par ψ_β.*
2. *Si les Q_β sont les identités $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_{n(\beta)}}$ ou les abélianisations $\varphi_{n(\beta)}$, alors $F_{\mathcal{Q}}$ n'est pas de Markov.*

Idée de la preuve du Théorème 1

<u>Conjugaison :</u> Pour $\gamma\colon \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G$, la formule de produit donne:

$$\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma}(\alpha^{-1}\beta\alpha) = \overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma}(\alpha) \circ \overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma\circ h_\alpha}(\beta) \circ \left(\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma\circ h_{\alpha^{-1}\beta\alpha}}(\alpha)\right)^{-1},$$

qui est une **conjugaison** si γ va assez bas pour que $\gamma \circ h_{\alpha^{-1}\beta\alpha} = \gamma$.

✓ pour $\gamma = \psi_\beta \circ \gamma_\beta$.

<u>Stabilisations :</u> Par des opérations élémentaires, on obtient

$$\overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma}\left(\sigma_n^{\pm 1}\beta\right) \approx \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{B}}^{(2)}_{t,\gamma}(\beta) & * \\ (\gamma\circ h_\beta - \gamma)(*) & * \end{pmatrix},$$

où $*$ a un déterminant de Fuglede-Kadison connu.

✓ pour $\gamma = \psi_\beta \circ \gamma_\beta$.

Calculs de déterminants pour le Théorème 2

On montre dans les deux cas que $F_{\mathcal{Q}}(\sigma_1^{-1}) \neq F_{\mathcal{Q}}(\sigma_2\sigma_1^{-1})$.

Difficulté : Pour prouver que deux déterminants de Fuglede-Kadison sont **différents**, il faut les **calculer**.

Pour les abélianisations $\varphi_n \colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{Z}^n$,

$F_{\mathcal{Q}}(\sigma_2\sigma_1^{-1}) = \det_{\mathbb{Z}^3}(\mathrm{Id} + R_x + R_y) = 1.38135... \neq 1 = F_{\mathcal{Q}}(\sigma_1^{-1})$.

(Boyd, calculs de **mesures de Mahler**)

Pour les identités $\mathrm{Id}_{\mathbb{F}_n}$,

$$F_{\mathcal{Q}}(\sigma_2\sigma_1^{-1}) = \det_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Id} + R_x + R_y) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15... \neq 1 = F_{\mathcal{Q}}(\sigma_1^{-1}).$$

(Bartholdi-Dasbach-Lalin, **marches aléatoires** sur des **arbres**)

Possibles pistes futures

- Trouver de plus larges classes de $\mathcal{Q}$ telles que $F_{\mathcal{Q}}$ n'est pas de Markov.
- Essayer d'obtenir des invariants d'entrelacs depuis Burau L^2 par **d'autres formules** que $\det(\cdot - \mathrm{Id})$.
- (avec C. Anghel) Adapter ces techniques à de futures versions L^2 des **représentations de Lawrence** des groupes de tresses, qui sont connues pour donner des **invariants quantiques**.