

# Déterminants de Fuglede–Kadison sur les groupes libres et constantes de Lehmer

Fathi Ben Aribi

UCLouvain

13 octobre 2022

**arxiv:2202.03877**

[http://www.normalesup.org/~benaribi/Beamer\\_Calais.pdf](http://www.normalesup.org/~benaribi/Beamer_Calais.pdf)

# Plan de l'exposé

Fuglede–Kadison 1952:  $\det_G(A) = e^{\text{trace}(\ln(A))} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$   
pour des opérateurs  $G$ -**equivariants** positifs  $A$  sur  $\ell^2(G)$  ( $\dim = \infty$ ).

 En général,  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

$\det_G(A) \leftrightarrow$  mesure de Mahler, volume hyperbolique, etc.

Objectif

Calculer des déterminants  $\det_G(A)$  via des graphes de Cayley.

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$  le groupe libre,  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Corollaire (B.A. 2022)

Nouvelles bornes sur les valeurs de  $\det_G$  pour de nombreux  $G$ .

Motivation / Application potentielle

Mieux calculer des invariants topologiques (Torsions  $L^2$ ).

# Plan de l'exposé

Fuglede–Kadison 1952:  $\det_G(A) = e^{\text{trace}(\ln(A))} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$   
pour des opérateurs  $G$ -**equivariants** positifs  $A$  sur  $\ell^2(G)$  ( $\dim = \infty$ ).

 En général,  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

$\det_G(A) \leftrightarrow$  **mesure de Mahler, volume hyperbolique**, etc.

Objectif

**Calculer des déterminants  $\det_G(A)$  via des graphes de Cayley.**

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$  le groupe libre,  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Corollaire (B.A. 2022)

*Nouvelles bornes sur les valeurs de  $\det_G$  pour de nombreux  $G$ .*

Motivation / Application potentielle

*Mieux calculer des invariants topologiques (Torsions  $L^2$ ).*

# Plan de l'exposé

Fuglede–Kadison 1952:  $\det_G(A) = e^{\text{trace}(\ln(A))} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$   
pour des opérateurs  $G$ -**equivariants** positifs  $A$  sur  $\ell^2(G)$  ( $\dim = \infty$ ).

 En général,  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

$\det_G(A) \leftrightarrow$  **mesure de Mahler, volume hyperbolique**, etc.

Objectif

**Calculer des déterminants  $\det_G(A)$  via des graphes de Cayley.**

**Théorème (B.A. 2022)**

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \mid \rangle$  le **groupe libre**,  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Corollaire (B.A. 2022)**

**Nouvelles bornes sur les valeurs de  $\det_G$  pour de nombreux  $G$ .**

Motivation / Application potentielle

*Mieux calculer des invariants topologiques (Torsions  $L^2$ ).*

# Plan de l'exposé

Fuglede–Kadison 1952:  $\det_G(A) = e^{\text{trace}(\ln(A))} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$   
pour des opérateurs  $G$ -**equivariants** positifs  $A$  sur  $\ell^2(G)$  ( $\dim = \infty$ ).

 En général,  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

$\det_G(A) \leftrightarrow$  **mesure de Mahler, volume hyperbolique**, etc.

Objectif

**Calculer des déterminants**  $\det_G(A)$  *via des graphes de Cayley*.

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$  le **groupe libre**,  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Corollaire (B.A. 2022)

**Nouvelles bornes** sur les valeurs de  $\det_G$  pour de nombreux  $G$ .

Motivation / Application potentielle

Mieux calculer des **invariants topologiques** (*Torsions*  $L^2$ ).

# Première Partie :

## Mesures de Mahler & déterminants de Fuglede–Kadison

La **mesure de Mahler** d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$  est

$$\mathcal{M}(P) := \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |P(e^{i\theta})| d\theta \right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Exemples:

- $\mathcal{M} \left( C \cdot \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i) \right) = |C| \cdot \prod_{i=1}^r \max(1, |\alpha_i|).$
- $\mathcal{M}(L) = 1.176280818\dots$  pour le **polynôme de Lehmer**  
 $L(X) = X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$

**Problème de Lehmer (1933)**

*A-t-on  $\inf\{\mathcal{M}(P) > 1 \mid P \in \mathbb{Z}[X]\} > 1$  ? ou même = 1.176...?*

$\leftrightarrow$  nombres algébriques, systoles hyperboliques, ... (Smyth 2008, Pham-Thilmany 2021)

La **mesure de Mahler** d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$  est

$$\mathcal{M}(P) := \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |P(e^{i\theta})| d\theta \right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Exemples:

- $\mathcal{M} \left( C \cdot \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i) \right) = |C| \cdot \prod_{i=1}^r \max(1, |\alpha_i|).$
- $\mathcal{M}(L) = 1.176280818\dots$  pour le **polynôme de Lehmer**  
 $L(X) = X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$

Problème de Lehmer (1933)

*A-t-on  $\inf\{\mathcal{M}(P) > 1 \mid P \in \mathbb{Z}[X]\} > 1$  ? ou même  $= 1.176\dots$  ?*

$\hookrightarrow$  nombres algébriques, systoles hyperboliques, ... (Smyth 2008, Pham-Thilmany 2021)

La **mesure de Mahler** d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$  est

$$\mathcal{M}(P) := \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |P(e^{i\theta})| d\theta \right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Exemples:

- $\mathcal{M} \left( C \cdot \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i) \right) = |C| \cdot \prod_{i=1}^r \max(1, |\alpha_i|).$
- $\mathcal{M}(L) = 1.176280818\dots$  pour le **polynôme de Lehmer**  
 $L(X) = X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$

**Problème de Lehmer (1933)**

*A-t-on  $\inf\{\mathcal{M}(P) > 1 \mid P \in \mathbb{Z}[X]\} > 1$  ? ou même = 1.176...?*

$\hookrightarrow$  nombres algébriques, systoles hyperboliques, ... (Smyth 2008, Pham-Thilmany 2021)

Soit  $G$  un groupe de présentation finie (e.g.  $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ ).

**Rep. régulière**  $G \curvearrowright \ell^2(G) \rightsquigarrow$  Action d'anneau  $\mathbb{C}G \curvearrowright \ell^2(G)$ .

Tout  $A = \sum a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$ , comme opérateur  $G$ -équivariant, a une trace  $\text{tr}_G(A) := a_{1_G} \in \mathbb{C}$  et un **déterminant de Fuglede–Kadison**

$$\det_G(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \text{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \text{Id}))\right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

( $\ln(A)$  = calcul fonctionnel, pensez “série entière”).

Ex: Pour  $G$  **fini**,  $\ell^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$ , et  $\det_G(A) = \det(|A|)^{\frac{1}{|G|}}$ .

Ex:  $\det_G(a \cdot \text{Id}) = |a|$  pour  $a \in \mathbb{C}$ .

Ex:  $\det_G(\text{Id} + a \cdot R_g) = \max(1, |a|)$  pour  $a \in \mathbb{C}$  et  $\text{ordre}(g) = \infty$ .

En général:  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

Soit  $G$  un groupe de présentation finie (e.g.  $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ ).

**Rep. régulière**  $G \curvearrowright \ell^2(G) \rightsquigarrow$  Action d'anneau  $\mathbb{C}G \curvearrowright \ell^2(G)$ .

Tout  $A = \sum a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$ , comme opérateur  $G$ -équivariant, a une **trace**  $\mathrm{tr}_G(A) := a_{1_G} \in \mathbb{C}$  et un **déterminant de Fuglede–Kadison**

$$\det_G(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \mathrm{Id}))\right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

$(\ln(A)) =$  calcul fonctionnel, pensez “série entière”).

Ex: Pour  $G$  fini,  $\ell^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$ , et  $\det_G(A) = \det(|A|)^{\frac{1}{|G|}}$ .

Ex:  $\det_G(a \cdot \mathrm{Id}) = |a|$  pour  $a \in \mathbb{C}$ .

Ex:  $\det_G(\mathrm{Id} + a \cdot R_g) = \max(1, |a|)$  pour  $a \in \mathbb{C}$  et  $\mathrm{ordre}(g) = \infty$ .

En général:  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

Soit  $G$  un groupe de présentation finie (e.g.  $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ ).

**Rep. régulière**  $G \curvearrowright \ell^2(G) \rightsquigarrow$  Action d'anneau  $\mathbb{C}G \curvearrowright \ell^2(G)$ .

Tout  $A = \sum a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$ , comme opérateur  $G$ -équivariant, a une **trace**  $\text{tr}_G(A) := a_{1_G} \in \mathbb{C}$  et un **déterminant de Fuglede–Kadison**

$$\det_G(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \text{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \text{Id}))\right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

$(\ln(A)) =$  calcul fonctionnel, pensez “série entière”).

Ex: Pour  $G$  **fini**,  $\ell^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$ , et  $\det_G(A) = \det(|A|)^{\frac{1}{|G|}}$ .

Ex:  $\det_G(a \cdot \text{Id}) = |a|$  pour  $a \in \mathbb{C}$ .

Ex:  $\det_G(\text{Id} + a \cdot R_g) = \max(1, |a|)$  pour  $a \in \mathbb{C}$  et  $\text{ordre}(g) = \infty$ .

En général:  $\det_G(A)$  est **difficile à calculer**.

Proposition (Lien avec la mesure de Mahler, Schmidt 1995, Lück 2002)

Pour  $G = \mathbb{Z}$ , et  $P \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ , on a  $\det_{\mathbb{Z}}(P) = \mathcal{M}(P)$ .

Lück 2019: **Constante de Lehmer** du groupe  $G$ :

$\Lambda_1^w(G) := \inf\{\det_G(A) > 1 \mid A \in \mathbb{Z}G \curvearrowright \ell^2(G) \text{ injectif}\} \in [1, 2]$ .

Exemples:  $\Lambda_1^w(\{1\}) = 2$ ,  $\Lambda_1^w(\mathbb{Z}/2) = \sqrt{3}$ ,  $\Lambda_1^w(\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

Problème de Lehmer–Lück (Lück 2019)

Pour quels  $G$  a-t-on  $\Lambda_1^w(G) > 1$  ? ou bien  $\Lambda_1^w(G) = 1.176\dots$  ?

Lehmer–Lück si  $G = \mathbb{Z} \Leftrightarrow$  Problème de Lehmer (car  $\det_{\mathbb{Z}} = \mathcal{M}$ ).

Proposition (Lien avec la mesure de Mahler, Schmidt 1995, Lück 2002)

Pour  $G = \mathbb{Z}$ , et  $P \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ , on a  $\det_{\mathbb{Z}}(P) = \mathcal{M}(P)$ .

Lück 2019: **Constante de Lehmer** du groupe  $G$ :

$\Lambda_1^w(G) := \inf\{\det_G(A) > 1 \mid A \in \mathbb{Z}G \curvearrowright \ell^2(G) \text{ injectif}\} \in [1, 2]$ .

Exemples:  $\Lambda_1^w(\{1\}) = 2$ ,  $\Lambda_1^w(\mathbb{Z}/2) = \sqrt{3}$ ,  $\Lambda_1^w(\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

Problème de Lehmer–Lück (Lück 2019)

Pour quels  $G$  a-t-on  $\Lambda_1^w(G) > 1$  ? ou bien  $\Lambda_1^w(G) = 1.176\dots$ ?

Lehmer–Lück si  $G = \mathbb{Z} \Leftrightarrow$  Problème de Lehmer (car  $\det_{\mathbb{Z}} = \mathcal{M}$ ).

Proposition (Lien avec la mesure de Mahler, Schmidt 1995, Lück 2002)

Pour  $G = \mathbb{Z}$ , et  $P \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ , on a  $\det_{\mathbb{Z}}(P) = \mathcal{M}(P)$ .

Lück 2019: **Constante de Lehmer** du groupe  $G$ :

$\Lambda_1^w(G) := \inf\{\det_G(A) > 1 \mid A \in \mathbb{Z}G \curvearrowright \ell^2(G) \text{ injectif}\} \in [1, 2]$ .

Exemples:  $\Lambda_1^w(\{1\}) = 2$ ,  $\Lambda_1^w(\mathbb{Z}/2) = \sqrt{3}$ ,  $\Lambda_1^w(\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

**Problème de Lehmer–Lück (Lück 2019)**

Pour quels  $G$  a-t-on  $\Lambda_1^w(G) > 1$  ? ou bien  $\Lambda_1^w(G) = 1.176\dots$  ?

Lehmer–Lück si  $G = \mathbb{Z} \Leftrightarrow$  Problème de Lehmer (car  $\det_{\mathbb{Z}} = \mathcal{M}$ ).

# Deuxième Partie :

## Déterminants de Fuglede–Kadison & graphes de Cayley

# Calculer $\det_G$ via des graphes de Cayley

Via  $\ln(1 - X) = -\sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n}$ , pour  $A$  injectif et tout  $0 < \lambda < \|A\|^{-2}$ ,

$$\begin{aligned} \det_G(A) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \operatorname{Id}))\right) \\ &= \dots = \lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{tr}_G((\operatorname{Id} - \lambda A^*A)^n)\right), \end{aligned}$$

qui dépend seulement de la suite  $c_n := \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$ .

À  $A^*A = \sum_{\text{fini}} a_{g_i} \cdot g_i \in \mathbb{C}G$ , on associe le **graphe de Cayley pondéré**  $\Gamma_{A^*A}$  de groupe  $\langle g_i \rangle_G$ , générateurs  $g_i$ , et poids  $a_{g_i}$ .

Ainsi  $c_n = \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$  est égal au **nombre de circuits** sur  $\Gamma_{A^*A}$  basés en 1 de **longueur**  $n$  (comptés avec les **poids**  $\prod a_{g_i}$ ).

# Calculer $\det_G$ via des graphes de Cayley

Via  $\ln(1 - X) = -\sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n}$ , pour  $A$  injectif et tout  $0 < \lambda < \|A\|^{-2}$ ,

$$\begin{aligned} \det_G(A) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \operatorname{Id}))\right) \\ &= \dots = \lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{tr}_G((\operatorname{Id} - \lambda A^*A)^n)\right), \end{aligned}$$

qui dépend seulement de la suite  $c_n := \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$ .

À  $A^*A = \sum_{\text{fini}} a_{g_i} \cdot g_i \in \mathbb{C}G$ , on associe le **graphe de Cayley pondéré**  $\Gamma_{A^*A}$  de groupe  $\langle g_i \rangle_G$ , générateurs  $g_i$ , et poids  $a_{g_i}$ .

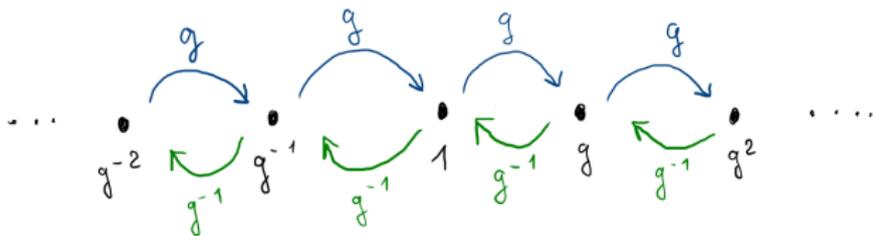
Ainsi  $c_n = \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$  est égal au **nombre de circuits** sur  $\Gamma_{A^*A}$  basés en 1 de **longueur**  $n$  (comptés avec les **poids**  $\prod a_{g_i}$ ).

# Séries génératrices, exemple sur $\mathbb{Z}$

Pour calculer **tous les**  $c_n = \text{tr}_G((A^*A)^n)$ , on considère la **série génératrice** associée  $u_{A^*A}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \cdot z^n$ .

**Relations** de  $G$ , forme de  $\Gamma_{A^*A} \rightsquigarrow$  **équations fonctionnelles** en  $u_{A^*A}$ .

Exemple : Sur  $\mathbb{Z} = \langle g \rangle$ ,  $u_{\mathbb{Z}}(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{tr}_G((g + g^{-1})^n) \cdot z^n$

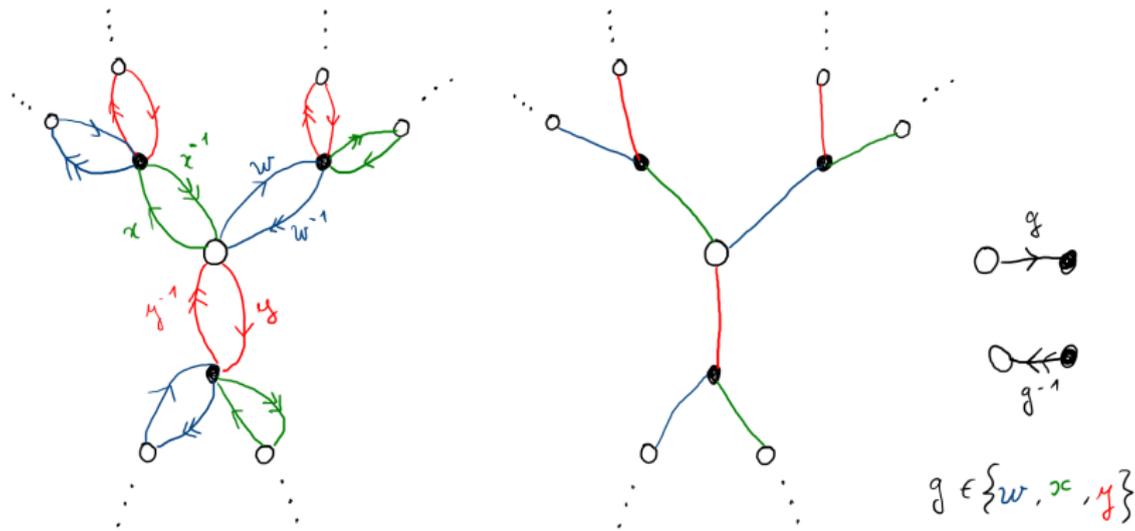


$u_{\mathbb{Z}}(z) = \frac{1}{1-2z^2 u_{\mathbb{N}}(z)}$ , où  $u_{\mathbb{N}}(z) = \frac{1}{1-z^2 u_{\mathbb{N}}(z)}$  compte les circuits sur  $\mathbb{N}$ .

On calcule alors  $u_{\mathbb{Z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n}$ .

Proposition (Bartholdi 1999, Dasbach–Lalin 2009)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}(z) = \frac{4}{1+3\sqrt{1-8z}}$ .



Idée :  $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}^{\mathbb{F}_2}(z) = u_{(w^{-1}+x^{-1}+y^{-1})(w+x+y)}^{\mathbb{F}_3}(z)$ , puis on coupe le graphe en 3 sous-graphes équivalents.

Proposition (Bartholdi 1999, Dasbach–Lalin 2009)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}(z) = \frac{4}{1+3\sqrt{1-8z}}$ .

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Ici le graphe  $\Gamma$  est un **arbre** et l'opérateur  $A^*A$  est très **symétrique**.  
On peut démontrer similairement:

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_d = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$ , on a

$\det_{\mathbb{F}_d}(1 + x_1 + \dots + x_d) = \frac{d^{\frac{d}{2}}}{(d+1)^{\frac{d-1}{2}}}$ , et

$\det_{\mathbb{F}_d}(x_1 + x_1^{-1} + \dots + x_d + x_d^{-1}) = \frac{(2d-1)^{\frac{2d-1}{2}}}{(2d)^{d-1}}$ .

Proposition (Bartholdi 1999, Dasbach–Lalin 2009)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}(z) = \frac{4}{1+3\sqrt{1-8z}}$ .

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Ici le graphe  $\Gamma$  est un **arbre** et l'opérateur  $A^*A$  est très **symétrique**.  
On peut démontrer similairement:

Théorème (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_d = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$ , on a

$\det_{\mathbb{F}_d}(1 + x_1 + \dots + x_d) = \frac{d^{\frac{d}{2}}}{(d+1)^{\frac{d-1}{2}}}$ , et

$\det_{\mathbb{F}_d}(x_1 + x_1^{-1} + \dots + x_d + x_d^{-1}) = \frac{(2d-1)^{\frac{2d-1}{2}}}{(2d)^{d-1}}$ .

# De nouvelles bornes pour le Problème de Lehmer–Lück

$$\Lambda_1^w(G) := \inf\{\det_G(A) > 1 \mid A \in \mathbb{Z}G \curvearrowright \ell^2(G) \text{ injectif}\} \in [1, 2].$$

Problème de Lehmer–Lück (Lück 2019)

Pour quels  $G$  a-t-on  $\Lambda_1^w(G) > 1$  ? ou  $\Lambda_1^w(G) = 1.176\dots$  ?

Fait :  $H \xrightarrow{\iota} G \Rightarrow \forall A \in \mathbb{Z}H, \det_G(\iota(A)) = \det_H(A).$   
 $\Rightarrow \Lambda_1^w(G) \leq \Lambda_1^w(H).$

Conséquence (Lehmer 1933)

Pour  $G \neq \{1\}$  sans torsion,  $\Lambda_1^w(G) \leq \Lambda_1^w(\mathbb{Z}) \leq \mathcal{M}(L) = 1.176\dots$

Notre théorème nous donne donc une **nouvelle borne** :

Théorème + Corollaire (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15\dots$

→ Tout  $G$  avec des **sous-groupes libres** vérifie  $\Lambda_1^w(G) \leq 1.15\dots$

# De nouvelles bornes pour le Problème de Lehmer–Lück

$$\Lambda_1^w(G) := \inf\{\det_G(A) > 1 \mid A \in \mathbb{Z}G \curvearrowright \ell^2(G) \text{ injectif}\} \in [1, 2].$$

Problème de Lehmer–Lück (Lück 2019)

Pour quels  $G$  a-t-on  $\Lambda_1^w(G) > 1$  ? ou  $\Lambda_1^w(G) = 1.176\dots$  ?

Fait :  $H \xrightarrow{\iota} G \Rightarrow \forall A \in \mathbb{Z}H, \det_G(\iota(A)) = \det_H(A).$   
 $\Rightarrow \Lambda_1^w(G) \leq \Lambda_1^w(H).$

Conséquence (Lehmer 1933)

Pour  $G \neq \{1\}$  sans torsion,  $\Lambda_1^w(G) \leq \Lambda_1^w(\mathbb{Z}) \leq \mathcal{M}(L) = 1.176\dots$

Notre théorème nous donne donc une **nouvelle borne** :

Théorème + Corollaire (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15\dots$

→ Tout  $G$  avec des **sous-groupes libres** vérifie  $\Lambda_1^w(G) \leq 1.15\dots$

# De nouvelles bornes pour le Problème de Lehmer–Lück

$$\Lambda_1^w(G) := \inf\{\det_G(A) > 1 \mid A \in \mathbb{Z}G \curvearrowright \ell^2(G) \text{ injectif}\} \in [1, 2].$$

Problème de Lehmer–Lück (Lück 2019)

Pour quels  $G$  a-t-on  $\Lambda_1^w(G) > 1$  ? ou  $\Lambda_1^w(G) = 1.176\dots$  ?

Fait :  $H \xrightarrow{\iota} G \Rightarrow \forall A \in \mathbb{Z}H, \det_G(\iota(A)) = \det_H(A).$   
 $\Rightarrow \Lambda_1^w(G) \leq \Lambda_1^w(H).$

Conséquence (Lehmer 1933)

Pour  $G \neq \{1\}$  sans torsion,  $\Lambda_1^w(G) \leq \Lambda_1^w(\mathbb{Z}) \leq \mathcal{M}(L) = 1.176\dots$

Notre théorème nous donne donc une **nouvelle borne** :

Théorème + Corollaire (B.A. 2022)

Pour  $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$ , on a  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15\dots$

→ Tout  $G$  avec des **sous-groupes libres** vérifie  $\Lambda_1^w(G) \leq 1.15\dots$

# Troisième Partie :

## Déterminants de Fuglede–Kadison, topologie & géométrie hyperbolique

# Torsions $L^2$ et volumes hyperboliques

Soit  $M$  une 3-variété. Soit  $C^{(2)}(M) := \ell^2(\pi_1 M) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1(M)} C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z})$ .

Torsion  $L^2$  de  $M$ :  $T^{(2)}(M) := \prod_{k \in \mathbb{N}} \det_{\pi_1(M)} \left( \partial_k^{C^{(2)}(M)} \right)^{(-1)^k} \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Théorème** (Burghlea-Friedlander-Kappeler-McDonald 1996, Lott-Mathai 1992, Lück-Schick 1999)

*Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique (close ou à pointes). Alors*

$$T^{(2)}(M) = \exp \left( \frac{\text{Vol}(M)}{6\pi} \right).$$

**Théorème** (B.A. 2022)

*Pour une infinité de 3-variétés hyperboliques  $M$  et tout groupe  $G > \pi_1(M)$ , on a  $\Lambda_1^w(G) \leq \exp \left( \frac{\text{Vol}(M)}{6\pi} \right) < 1.15\dots$*

Utilise que  $\text{rk}(\pi_1(M)) = 2$  (e.g. remplissages de Dehn sur l'entrelacs de Whitehead).

# Torsions $L^2$ et volumes hyperboliques

Soit  $M$  une 3-variété. Soit  $C^{(2)}(M) := \ell^2(\pi_1 M) \otimes_{\mathbb{Z}\pi_1(M)} C_*(\tilde{M}, \mathbb{Z})$ .

Torsion  $L^2$  de  $M$ :  $T^{(2)}(M) := \prod_{k \in \mathbb{N}} \det_{\pi_1(M)} \left( \partial_k^{C^{(2)}(M)} \right)^{(-1)^k} \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Théorème** (Burghlea-Friedlander-Kappeler-McDonald 1996, Lott-Mathai 1992, Lück-Schick 1999)

*Soit  $M$  une 3-variété hyperbolique (close ou à pointes). Alors*

$$T^{(2)}(M) = \exp \left( \frac{\text{Vol}(M)}{6\pi} \right).$$

**Théorème** (B.A. 2022)

*Pour une infinité de **3-variétés hyperboliques**  $M$  et tout groupe*

$$G > \pi_1(M), \text{ on a } \Lambda_1^w(G) \leq \exp \left( \frac{\text{Vol}(M)}{6\pi} \right) < 1.15\dots$$

Utilise que  $\text{rk}(\pi_1(M)) = 2$  (e.g. remplissages de Dehn sur l'entrelacs de Whitehead).

# Motivation: l'in saisissable invariant d'Alexander $L^2$

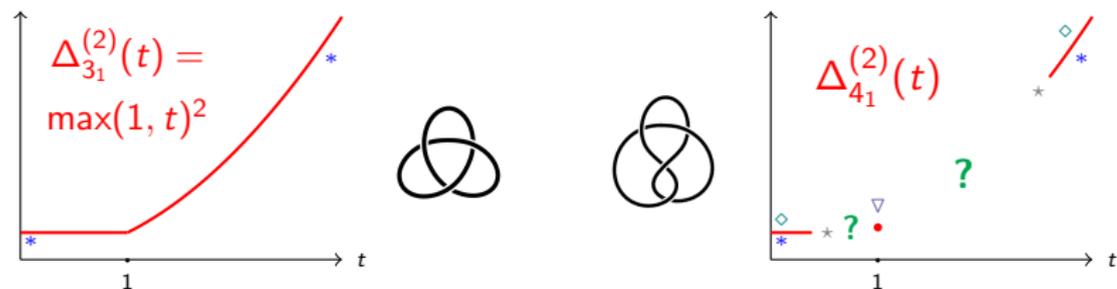
Li-Zhang 2006: L'**invariant d'Alexander  $L^2$**  d'un nœud  $K \subset \mathbb{S}^3$

$\Delta_K^{(2)}(t) = \det_{\pi_1(S^3 \setminus K)}(A(K, t))$ , fonction **continue** de  $t > 0$ .

( $\det_{\pi_1(S^3 \setminus K)}$  = déterminant de Fuglede–Kadison and  $A(K, t)$  = **matrice de Fox**)

$\rightsquigarrow$  volume  $\nabla$ , genre  $*$ , entropie de la monodromie  $\star$ , volume relatif  $\diamond$

(Lück–Schick 1999, Dubois–Friedl–Lück 2016, Liu 2017, Friedl–Lück 2019, B.A.–Friedl–Herrmann 2021)

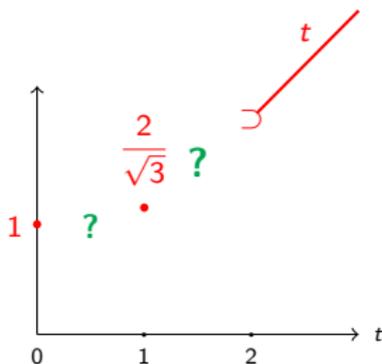


Objectif

**Nouveaux calculs** de  $\det_{\pi_1(S^3 \setminus K)}$  *via les graphes de Cayley.*

# Le cas $\mathbb{F}_2 \rightarrow$ des indices pour l'invariant d'Alexander $L^2$ ?

Que vaut  $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + t \cdot y)$  ? Ce qu'on sait jusqu'ici :



Γ encore un **arbre**, mais les **équations fonctionnelles** sont **cubiques**.

Connaître  $f(t) = \det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + t \cdot y)$  peut fournir des **indices** sur la **forme générale** de l'**invariant d'Alexander**  $L^2 \Delta_K^{(2)}(t)$ .

$(f(t), \Delta_K^{(2)}(t))$  sont-elles lisses/monomiales par morceaux ?