

Déterminants de Fuglede–Kadison sur les groupes libres et représentations de Burau L^2 des tresses

Fathi Ben Aribi

UCLouvain

23 mars 2022

Fuglede-Kadison determinants over free groups and Lehmer's constants, Confluentes Mathematici, 14, 1, 3-22, arxiv:2202.03877

Link invariants from L^2 -Burau maps of braids, arxiv:2101.01678v4

http://www.normalesup.org/~benaribi/Beamer_Amiens.pdf

Plan de l'exposé

Fuglede–Kadison 1952: $\det_G(A) = e^{\text{trace}(\ln(A))} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
pour des opérateurs **G -equivariants** positifs A sur $\ell^2(G)$ ($\dim = \infty$).

Objectif

Calculer des déterminants $\det_G(A)$ via des **graphes de Cayley**.

Théorème (B.A. 2022)

Pour $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \mid \rangle$ le **groupe libre**, $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Théorème (B.A.-Conway 2018, B.A. 2021)

On construit des **représentations de Burau** L^2 des tresses et on étudie les **invariants d'entrelacs** qu'elles définissent.

Motivation / Application potentielle

Mieux calculer des **invariants topologiques** (Torsions L^2).

Première Partie :

Déterminants de Fuglede–Kadison sur les groupes libres

Soit G un groupe de présentation finie (e.g. $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$).

Rep. régulière $G \curvearrowright \ell^2(G) \rightsquigarrow$ Action d'anneau $\mathbb{C}G \curvearrowright \ell^2(G)$.

Tout $A = \sum a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$, comme opérateur G -équivariant, a une trace $\text{tr}_G(A) := a_{1_G} \in \mathbb{C}$ et un **déterminant de Fuglede–Kadison**

$$\det_G(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \text{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \text{Id}))\right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

($\ln(A)$ = calcul fonctionnel, pensez “série entière”).

Ex: Pour G **fini**, $\ell^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$, et $\det_G(A) = \det(|A|)^{\frac{1}{|G|}}$.

Ex: $\det_G(a \cdot \text{Id}) = |a|$ pour $a \in \mathbb{C}$.

Ex: $\det_G(\text{Id} + a \cdot R_g) = \max(1, |a|)$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $\text{ordre}(g) = \infty$.

En général: $\det_G(A)$ est **difficile à calculer**.

Soit G un groupe de présentation finie (e.g. $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$).

Rep. régulière $G \curvearrowright \ell^2(G) \rightsquigarrow$ Action d'anneau $\mathbb{C}G \curvearrowright \ell^2(G)$.

Tout $A = \sum a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$, comme opérateur G -équivariant, a une **trace** $\text{tr}_G(A) := a_{1_G} \in \mathbb{C}$ et un **déterminant de Fuglede–Kadison**

$$\det_G(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \text{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \text{Id}))\right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

$(\ln(A)) =$ calcul fonctionnel, pensez “série entière”).

Ex: Pour G fini, $\ell^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$, et $\det_G(A) = \det(|A|)^{\frac{1}{|G|}}$.

Ex: $\det_G(a \cdot \text{Id}) = |a|$ pour $a \in \mathbb{C}$.

Ex: $\det_G(\text{Id} + a \cdot R_g) = \max(1, |a|)$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $\text{ordre}(g) = \infty$.

En général: $\det_G(A)$ est **difficile à calculer**.

Soit G un groupe de présentation finie (e.g. $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$).

Rep. régulière $G \curvearrowright \ell^2(G) \rightsquigarrow$ Action d'anneau $\mathbb{C}G \curvearrowright \ell^2(G)$.

Tout $A = \sum a_g \cdot g \in \mathbb{C}G$, comme opérateur G -équivariant, a une **trace** $\text{tr}_G(A) := a_{1_G} \in \mathbb{C}$ et un **déterminant de Fuglede–Kadison**

$$\det_G(A) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \text{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \text{Id}))\right) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

$(\ln(A)) =$ calcul fonctionnel, pensez “série entière”).

Ex: Pour G **fini**, $\ell^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$, et $\det_G(A) = \det(|A|)^{\frac{1}{|G|}}$.

Ex: $\det_G(a \cdot \text{Id}) = |a|$ pour $a \in \mathbb{C}$.

Ex: $\det_G(\text{Id} + a \cdot R_g) = \max(1, |a|)$ pour $a \in \mathbb{C}$ et $\text{ordre}(g) = \infty$.

En général: $\det_G(A)$ est **difficile à calculer**.

Calculer \det_G via des graphes de Cayley

Via $\ln(1 - X) = -\sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n}$, pour A injectif et tout $0 < \lambda < \|A\|^{-2}$,

$$\begin{aligned} \det_G(A) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \operatorname{Id}))\right) \\ &= \dots = \lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{tr}_G((\operatorname{Id} - \lambda A^*A)^n)\right), \end{aligned}$$

qui dépend seulement de la suite $c_n := \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$.

À $A^*A = \sum_{\text{fini}} a_{g_i} \cdot g_i \in \mathbb{C}G$, on associe le **graphe de Cayley pondéré** Γ_{A^*A} de groupe $\langle g_i \rangle_G$, générateurs g_i , et poids a_{g_i} .

Ainsi $c_n = \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$ est égal au **nombre de circuits** sur Γ_{A^*A} basés en 1 de **longueur** n (comptés avec les **poids** $\prod a_{g_j}$).

Calculer \det_G via des graphes de Cayley

Via $\ln(1 - X) = -\sum_{n \geq 1} \frac{X^n}{n}$, pour A injectif et tout $0 < \lambda < \|A\|^{-2}$,

$$\begin{aligned} \det_G(A) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_G(\ln(A^*A + \epsilon \operatorname{Id}))\right) \\ &= \dots = \lambda^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{tr}_G((\operatorname{Id} - \lambda A^*A)^n)\right), \end{aligned}$$

qui dépend seulement de la suite $c_n := \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$.

À $A^*A = \sum_{\text{fini}} a_{g_i} \cdot g_i \in \mathbb{C}G$, on associe le **graphe de Cayley pondéré** Γ_{A^*A} de groupe $\langle g_i \rangle_G$, générateurs g_i , et poids a_{g_i} .

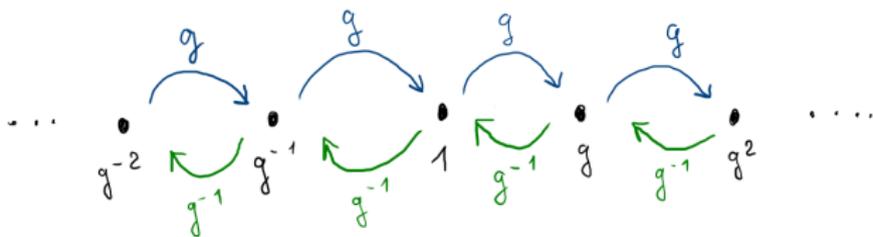
Ainsi $c_n = \operatorname{tr}_G((A^*A)^n)$ est égal au **nombre de circuits** sur Γ_{A^*A} basés en 1 de **longueur** n (comptés avec les **poids** $\prod a_{g_i}$).

Séries génératrices, exemple sur \mathbb{Z}

Pour calculer **tous les** $c_n = \text{tr}_G((A^*A)^n)$, on considère la **série génératrice** associée $u_{A^*A}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \cdot z^n$.

Relations de G , forme de $\Gamma_{A^*A} \rightsquigarrow$ **équations fonctionnelles** en u_{A^*A} .

Exemple : Sur $\mathbb{Z} = \langle g \rangle$, $u_{\mathbb{Z}}(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{tr}_G((g + g^{-1})^n) \cdot z^n$

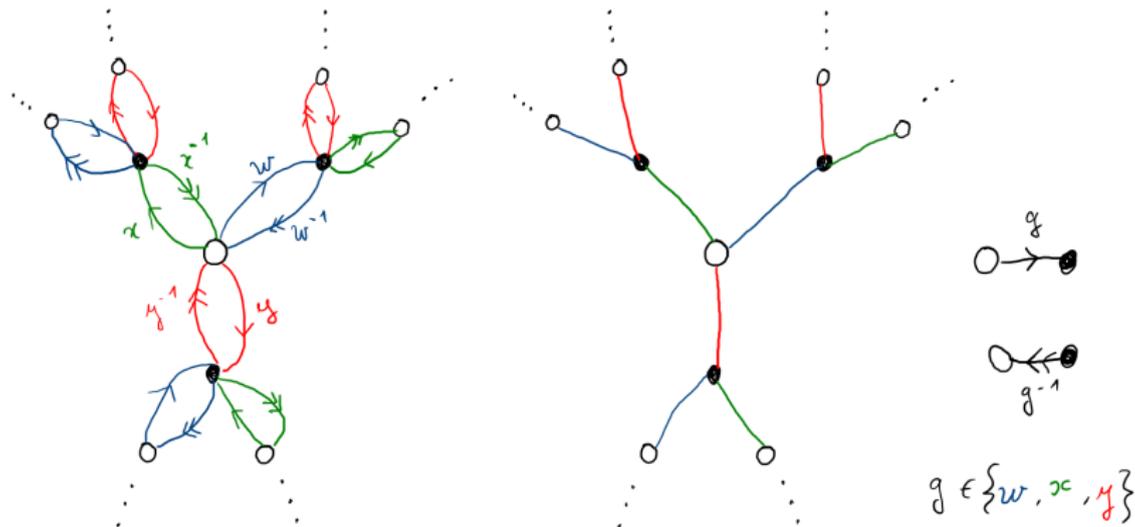


$u_{\mathbb{Z}}(z) = \frac{1}{1-2z^2} u_{\mathbb{N}}(z)$, où $u_{\mathbb{N}}(z) = \frac{1}{1-z^2} u_{\mathbb{N}}(z)$ compte les circuits sur \mathbb{N} .

On calcule alors $u_{\mathbb{Z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{2n}{n} z^{2n}$.

Proposition (Bartholdi 1999, Dasbach–Lalin 2009)

Pour $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$, on a $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}(z) = \frac{4}{1+3\sqrt{1-8z}}$.



Idée : $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}^{\mathbb{F}_2}(z) = u_{(w^{-1}+x^{-1}+y^{-1})(w+x+y)}^{\mathbb{F}_3}(z)$, puis on coupe le graphe en 3 sous-graphes équivalents.

Proposition (Bartholdi 1999, Dasbach–Lalin 2009)

Pour $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$, on a $u_{(1+x^{-1}+y^{-1})(1+x+y)}(z) = \frac{4}{1+3\sqrt{1-8z}}$.

Théorème (B.A. 2022)

Pour $G = \mathbb{F}_2 = \langle x, y \rangle$, on a $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ici le graphe Γ est un **arbre** et l'opérateur A^*A est très **symétrique**.
→ Résultats similaires sur \mathbb{F}_d .

Corollaire (B.A. 2022)

$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15\dots$ est une nouvelle **borne supérieure** commune des **constantes de Lehmer** $\Lambda_1^w(G)$ des groupes G tels que $\mathbb{F}_2 < G$.

Motivation: l'in saisissable invariant d'Alexander L^2

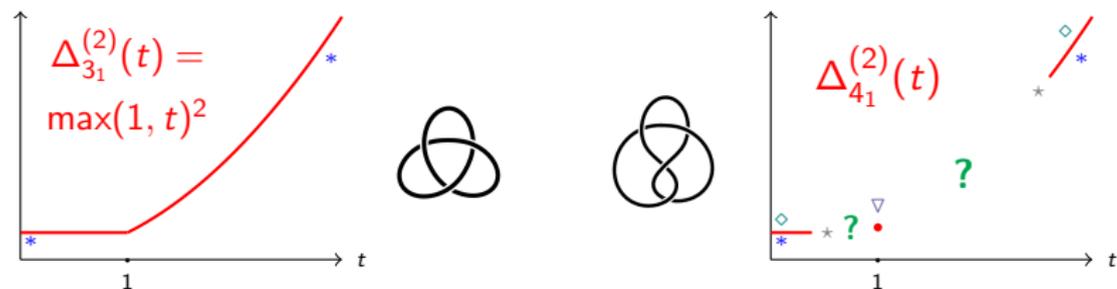
Li-Zhang 2006: L'**invariant d'Alexander L^2** d'un nœud $K \subset \mathbb{S}^3$

$$\Delta_K^{(2)}(t) = \det_{\pi_1(S^3 \setminus K)}(A(K, t)), \text{ fonction } \mathbf{continue} \text{ de } t > 0.$$

($\det_{\pi_1(S^3 \setminus K)}$ = déterminant de Fuglede–Kadison and $A(K, t)$ = **matrice de Fox**)

\rightsquigarrow volume ∇ , genre $*$, entropie de la monodromie \star , volume relatif \diamond

(Lück–Schick 1999, Dubois–Friedl–Lück 2016, Liu 2017, Friedl–Lück 2019, B.A.–Friedl–Herrmann 2021)

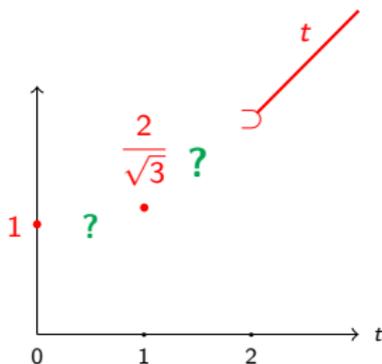


Objectif

Nouveaux calculs de $\det_{\pi_1(S^3 \setminus K)}$ *via les graphes de Cayley.*

Le cas $\mathbb{F}_2 \rightarrow$ des indices pour l'invariant d'Alexander L^2 ?

Que vaut $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + t \cdot y)$? Ce qu'on sait jusqu'ici :



Γ encore un **arbre**, mais les **équations fonctionnelles** sont **cubiques**.

Connaître $f(t) = \det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + t \cdot y)$ peut fournir des **indices** sur la **forme générale** de l'**invariant d'Alexander** $L^2 \Delta_K^{(2)}(t)$.

$(f(t), \Delta_K^{(2)}(t))$ sont-elles lisses/monomiales par morceaux ?

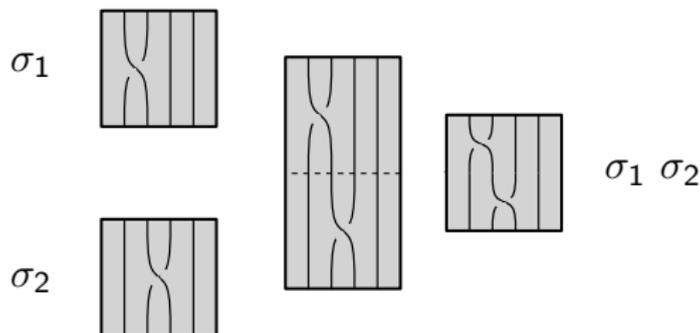
Deuxième Partie :

Représentations de Burau L^2 des tresses

Le **groupe de tresses** B_n est défini par la présentation

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ for } |i-j| \geq 2 \rangle$$

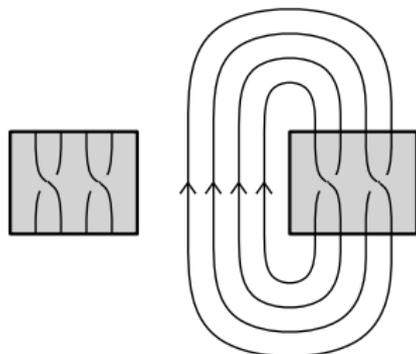
et une **tresse** $\beta \in B_n$ est aussi vue **topologiquement** comme une 1-sous-variété de $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ sans tangente horizontale.



Tresses et entrelacs

La **fermeture** $\hat{\beta}$ d'une tresse $\beta \in B_n$ est un **entrelacs** de \mathbb{S}^3 .

$$\beta = \sigma_1 \sigma_3$$



$\hat{\beta}$ = entrelacs trivial
à 2 composantes

Mouvements de Markov sur les tresses $\sqcup_{n \geq 1} B_n$:

- Markov 1, les **conjugaisons**: $\beta \mapsto \alpha^{-1} \beta \alpha$, où $\alpha, \beta \in B_n$.
- Markov 2, les **stabilisations**: $B_n \ni \beta \mapsto \sigma_n^{\pm 1} \beta \in B_{n+1}$.

Theorem (Markov 1935)

$\hat{\beta}$ et $\hat{\beta}'$ sont des **entrelacs équivalents** ssi β et β' sont liées par un nombre fini de **mouvements de Markov**.

Les représentations de Burau

Representation de Burau:

$$\mathcal{B}: B_n \ni \sigma_i \mapsto \text{Id}_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1 - T & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix} \oplus \text{Id}_{n-i-1} \in GL_n(\mathbb{Z}[T, T^{-1}])$$

Representation de Burau réduite:

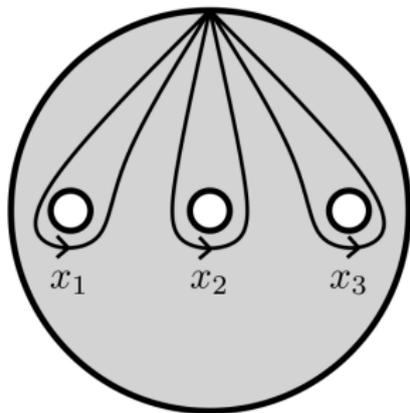
$$\bar{\mathcal{B}}: B_n \ni \sigma_i \mapsto \text{Id}_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \text{Id}_{n-i-2} \in GL_{n-1}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}])$$

Theorem (Burau 1936)

Soit $\beta \in B_n$. Alors le **polynôme d'Alexander** $\Delta_{\hat{\beta}}$ de l'entrelacs $\hat{\beta}$ vérifie (à multiplication par une unité de $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ près):

$$\Delta_{\hat{\beta}}(T) = \frac{1 - T}{1 - T^n} \det(\bar{\mathcal{B}}(\beta) - \text{Id}_{n-1}).$$

Groupe libre $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n \mid \rangle \cong \pi_1(D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$.



Artin: Une tresse $\beta \in B_n$ induit un automorphisme $h_\beta \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$.

Exemple: Pour $\sigma_1 \in B_2$, on a $h_{\sigma_1}: x_1 \mapsto x_1 x_2 x_1^{-1}$, $x_2 \mapsto x_1$.

$$B_n \hookrightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$$

Les **dérivées de Fox** sur \mathbb{F}_n sont les applications linéaires

$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{Z}\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{Z}\mathbb{F}_n$ (où $i = 1, \dots, n$), définies inductivement par:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j^{-1}) = -\delta_{i,j}x_j^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u) + u\frac{\partial}{\partial x_i}(v).$$

$\left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_i}\right)_{i,j} \in GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n)$ est le **jacobien de Fox** de $f \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$.

Exemple: Pour $\sigma_1 \in B_2$, on a $h_{\sigma_1} : x_1 \mapsto x_1x_2x_1^{-1}$, $x_2 \mapsto x_1$, et

$$\left(\frac{\partial h_{\sigma_1}(x_j)}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} 1 - x_1x_2x_1^{-1} & 1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Aut}(\mathbb{F}_n) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n)$$

Le changement de coefficients $\kappa(\Phi_n, \gamma, t)$

On construit un **morphisme d'anneaux** $\kappa(\Phi_n, \gamma, t)$ avec

- $\Phi_n: \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{Z}, x_i \mapsto 1$, l'épimorphisme d'**augmentation**,
- $\gamma: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ tel que Φ_n factorise par γ ,
- $t > 0$.

On définit $\kappa(\Phi_n, \gamma, t): \mathbb{Z}\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{R}G$ par $g \mapsto t^{\phi(g)}\gamma(g)$.

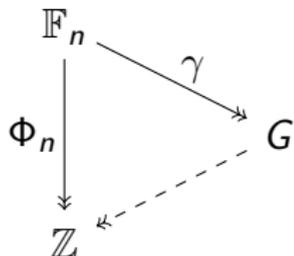
Exemple: Pour $n = 2$ et $\gamma = T^{\Phi_2}: (\mathbb{F}_2 \rightarrow T^{\mathbb{Z}} = \{T^m, m \in \mathbb{Z}\})$,

$$\kappa(\Phi_2, T^{\Phi_2}, t): \begin{pmatrix} 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} & 1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - tT & 1 \\ tT & 0 \end{pmatrix}.$$

$\kappa(\Phi_n, \gamma, t)$ induit $GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}G)$.

Une famille de représentations entre Artin and Burau

$$B_n \xrightarrow{\text{Artin}} \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\text{Fox}} GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n, \gamma, t)} GL_n(\mathbb{R}G)$$



On considère les applications

$$\beta \mapsto \kappa(\Phi_n, \gamma, t) \left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

pour différents $\gamma : \mathbb{F}_n \rightarrow G$.

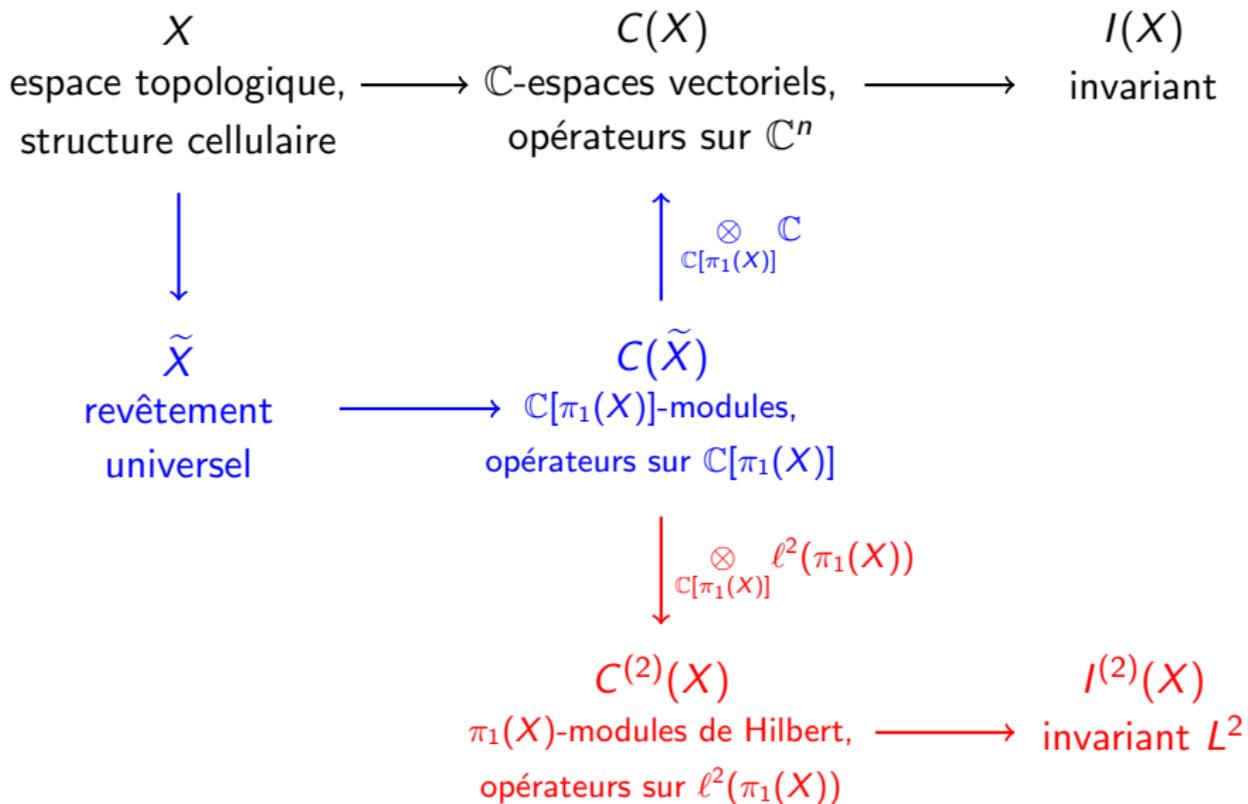
- $\gamma = \text{Id}_{\mathbb{F}_n}$: jacobien de l'**action d'Artin**, toujours **injective**.

$$B_2 \ni \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 - t x_1 x_2 x_1^{-1} & 1 \\ t x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\gamma = T^{\Phi_n}$: **représentation de Burau**, non injective si $n \geq 5$.

$$B_2 \ni \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 - tT & 1 \\ tT & 0 \end{pmatrix}.$$

L'idée générale des invariants L^2



Passer au point de vue L^2

$$B_n \xrightarrow{\text{Artin}} \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\text{Fox}} GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n, \gamma, t)} GL_n(\mathbb{R}G)$$

Problème : Extraire de l'information de $M_n(\mathbb{R}G)$ si G non abélien.
 \rightsquigarrow Sur $\ell^2(G)$ il y a le **déterminant de Fuglede-Kadison**.

On remplace l'algèbre $\mathbb{R}G$ par l'espace de Hilbert

$$\ell^2(G) := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in \mathbb{C}, \sum_{g \in G} |\lambda_g|^2 < \infty \right\}.$$

Opérateurs G -**équivariants** bornés typiques:

$$R_h: \ell^2(G) \rightarrow \ell^2(G), g \mapsto gh,$$

les **multiplications à droite** par $h \in G$.

L'opération R . induit $GL_n(\mathbb{R}G) \hookrightarrow B(\ell^2(G)^n)$.

$$B_n \xrightarrow{\text{Artin}} \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\text{Fox}} GL_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n, \gamma, t)} GL_n(\mathbb{R}G) \xrightarrow{R} B(\ell^2(G)^n),$$

La **représentation de Burau L^2** pour $t > 0$ et $\gamma: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ est:

$$\mathcal{B}_{t, \gamma}^{(2)}: \begin{pmatrix} B_n & \rightarrow & B(\ell^2(G)^n) \\ \beta & \mapsto & R_A \end{pmatrix}, \text{ avec } A = \kappa(\Phi_n, \gamma, t) \left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

La **représentation de Burau L^2 réduite** associée à t, γ est:

$$\overline{\mathcal{B}}_{t, \gamma}^{(2)}: \begin{pmatrix} B_n & \rightarrow & B(\ell^2(G)^{n-1}) \\ \beta & \mapsto & R_{A'} \end{pmatrix}, \text{ avec } A' = \kappa(\Phi_n, \gamma, t) \left(\frac{\partial h_\beta(g_j)}{\partial g_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1},$$

où $g_1 = x_1, g_2 = x_1 x_2, \dots, g_n = x_1 \dots x_n$ engendrent aussi \mathbb{F}_n .

$$B_n \xrightarrow{\text{Artin}} \text{Aut}(\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\text{Fox}} \text{GL}_n(\mathbb{Z}\mathbb{F}_n) \xrightarrow{\kappa(\Phi_n, \gamma, t)} \text{GL}_n(\mathbb{R}G) \xrightarrow{R} B(\ell^2(G)^n),$$

La **représentation de Burau L^2** pour $t > 0$ et $\gamma: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ est:

$$\mathcal{B}_{t, \gamma}^{(2)}: \begin{pmatrix} B_n & \rightarrow & B(\ell^2(G)^n) \\ \beta & \mapsto & R_A \end{pmatrix}, \text{ avec } A = \kappa(\Phi_n, \gamma, t) \left(\frac{\partial h_\beta(x_j)}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

The **représentation de Burau L^2 réduite** associée à t, γ est:

$$\overline{\mathcal{B}}_{t, \gamma}^{(2)}: \begin{pmatrix} B_n & \rightarrow & B(\ell^2(G)^{n-1}) \\ \beta & \mapsto & R_{A'} \end{pmatrix}, \text{ avec } A' = \kappa(\Phi_n, \gamma, t) \left(\frac{\partial h_\beta(g_j)}{\partial g_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n-1},$$

où $g_1 = x_1, g_2 = x_1 x_2, \dots, g_n = x_1 \dots x_n$ engendrent aussi \mathbb{F}_n .

Formule d'(anti-)multiplication: $\forall \alpha, \beta \in B_n,$

$$\mathcal{B}_{t,\gamma}^{(2)}(\alpha\beta) = \mathcal{B}_{t,\gamma}^{(2)}(\beta) \circ \mathcal{B}_{t,\gamma \circ h_\beta}^{(2)}(\alpha).$$

Conséquence : Plus $\gamma: \mathbb{F}_n \rightarrow G$ est **injectif**, moins $\mathcal{B}_{t,\gamma}^{(2)}$ est une **vraie (anti-)représentation** de groupe (non croisée).

$\mathcal{B}_{t,\gamma}^{(2)}$ est une vraie (anti-)représentation du **sous-groupe**
 $H_\gamma = \{\beta \in B_n, \gamma \circ h_\beta = \gamma\}.$

On peut toujours **calculer** $\mathcal{B}_{t,\gamma}^{(2)}(\beta)$ via les images des σ_i .

$$\mathcal{B}_{t,\gamma}^{(2)}: B_2 \ni \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} \text{Id} - tR_{\gamma(x_1 x_2 x_1^{-1})} & \text{Id} \\ tR_{\gamma(x_1)} & 0 \end{pmatrix} \in B(\ell^2(G)^{\oplus 2}).$$

Troisième Partie :

Construire des invariants L^2 des entrelacs

Les torsions d'Alexander L^2 des entrelacs

(Dubois-Friedl-Lück 14) **torsion d'Alexander L^2** de l'entrelacs L :

$$T_L^{(2)} : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ t & \longmapsto & T_L^{(2)}(t) \end{pmatrix}$$

définie avec dét. de Fuglede-Kadison $\det_{\pi_1(S^3 \setminus L)}$ et **calcul de Fox**.
(\leftrightarrow invariant d'Alexander L^2 des nœuds $\Delta_K^{(2)}(t)$)

Quelques propriétés:

(Lück-Schick 99) $T_L^{(2)}(1)$ contient le **volume** de $S^3 \setminus L$.

(Friedl-Lück, Liu 15) $T_L^{(2)}(0^+)$, $T_L^{(2)}(+\infty)$ donnent le **genre** $g(L)$.

(Miscellaneous) $T_L^{(2)}$ est **l'application nulle** ssi L est **scindé**.

La représentation de Burau L^2 au groupe de l'entrelacs

Pour $\gamma = \gamma_\beta: \mathbb{F}_n \rightarrow G_\beta \cong \pi_1(S^3 \setminus \hat{\beta})$ quotient par $h_\beta(x_i) = x_i$, la représentation de Burau L^2 **réduite** $\overline{\mathcal{B}}_{t, \gamma_\beta}^{(2)}$ fournit la **torsion d'Alexander** L^2 $T_{\hat{\beta}}^{(2)}$:

Theorem (B.A.-Conway 18)

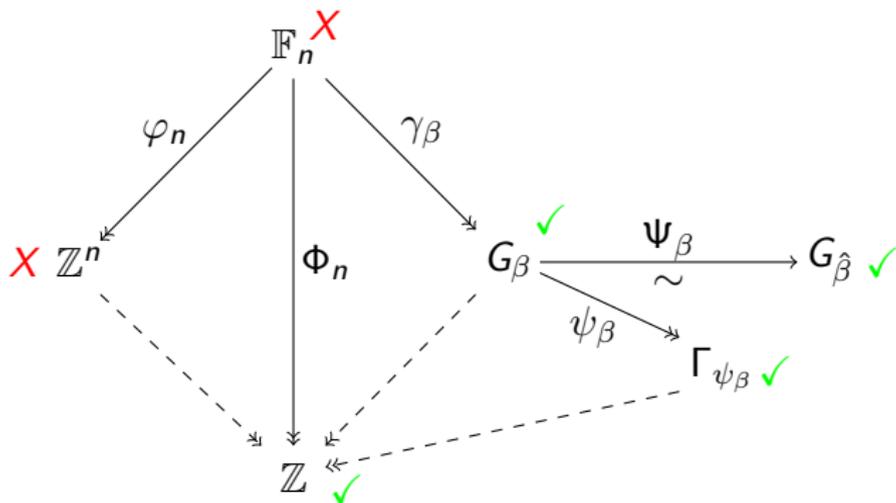
Soit $\beta \in B_n$, $L = \hat{\beta}$ sa fermeture et $t > 0$. Alors:

$$T_L^{(2)}(t) = \max(1, t)^{-n} \cdot \det_{G_L} \left(\overline{\mathcal{B}}_{t, \gamma_\beta}^{(2)}(\beta) - \text{Id}^{\oplus(n-1)} \right).$$

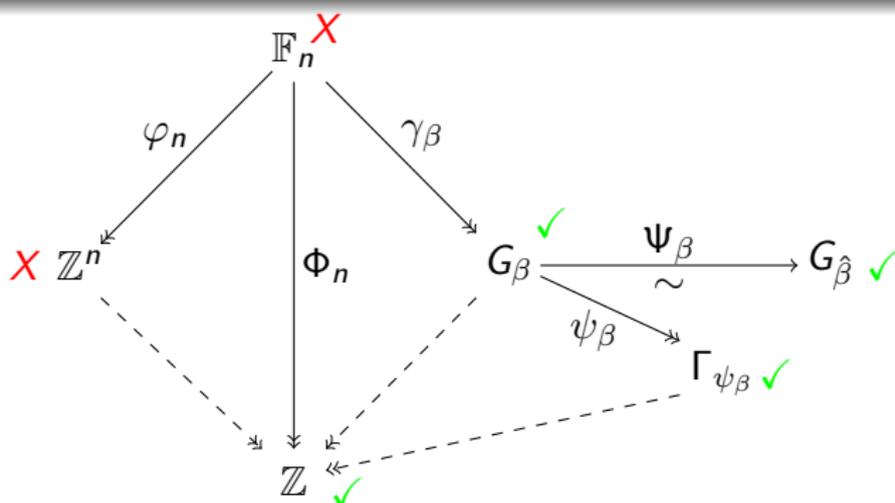
Question : Peut-on trouver **d'autres invariants** L^2 d'entrelacs avec une formule similaire pour d'autres $\gamma: \mathbb{F}_n \rightarrow G$?

Plusieurs familles d'épimorphismes

- $Id_{\mathbb{F}_n}$:= l'identité sur \mathbb{F}_n .
- φ_n := l'abélianisation de \mathbb{F}_n vers \mathbb{Z}^n .
- γ_β := le quotient de $h_\beta(x_i) = x_i$ (\iff fermeture de β).
- Φ_n := l'augmentation de \mathbb{F}_n vers \mathbb{Z} .



Pour $\gamma: \mathbb{F}_n \rightarrow G$, a-t-on $\beta \mapsto \max(1, t)^{-n} \cdot \det_G \left(\overline{\mathcal{B}}_{t,\gamma}^{(2)}(\beta) - \text{Id}^{\oplus(n-1)} \right)$ invariante par les **mouvements de Markov** ? \checkmark : Oui. \times : Non.



Theorem (B.A. 2021)

La fonction $\beta \mapsto \max(1, t)^{-n} \cdot \det_G \left(\overline{\mathcal{B}}_{t,\gamma}^{(2)}(\beta) - \text{Id}^{\oplus(n-1)} \right)$

- ① est de Markov \checkmark si $\gamma = \psi_\beta \circ \gamma_\beta$, et l'invariant d'entrelacs est une **torsion d'Alexander L^2 tordue** par ψ_β .
- ② n'est pas de Markov \times si γ est l'**identité** $\text{Id}_{\mathbb{F}_{n(\beta)}}$ ou l'**abélianisation** $\varphi_{n(\beta)}$.

La preuve du (2) utilise le calcul $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

- Calculer $\det_{\mathbb{F}_2}(1 + x + t \cdot y)$ pour $t \neq 1$.
- Étendre ce calcul de $\det_G(A)$ par **combinatoire des groupes** à d'autres classes de groupes G et d'opérateurs A .
- Essayer d'obtenir d'autres **invariants d'entrelacs** via Burau L^2 avec **d'autres formules** que $\det(\cdot - \text{Id})$.
- (avec C. Anghel-Palmer) Adapter ces techniques à des versions L^2 des **représentations de Lawrence** des tresses, dont on sait qu'elles produisent des **invariants quantiques**.