

Examen final

Rappel. Ce sujet comportera deux sortes de questions :

1. les questions portant sur *LEAN*, dans lesquelles on vous demandera de détailler en parallèle **3 rédactions** :

- (a) l'écriture d'une preuve en *LEAN*;
- (b) l'évolution du contexte et de l'objectif
(à présenter dans les feuilles prévues à cet effet – voir les dernières pages);
- (c) la rédaction de la preuve au papier en langage ordinaire.

Ces questions seront marquées avec le mot (**preuve LEAN**). Vous aurez le droit d'utiliser l'aide-mémoire pour cette partie.

Pour plus de détails, lisez l'exemple en fin de sujet !

2. les questions sur papier, qui demanderont ou bien de rédiger des démonstrations claires et correctes sur papier, en utilisant les schémas de rédaction présentés dans l'aide-mémoire, ou bien d'écrire des morceaux de code *LEAN*.

On introduit le prédicat *LEAN* suivant, qui affirme que la limite en $+\infty$ d'une fonction $f : \text{Real} \rightarrow \text{Real}$ est égale à $+\infty$.

<pre>def limite_infinie (f : Real → Real) := ∀ A : Real, ∃ B : Real, ∀ x : Real, x ≥ B → (f x) ≥ A</pre>
--

1. Ecrire la définition en *LEAN* d'une fonction $g : \text{Real} \rightarrow \text{Real}$ qui représente la fonction suivante :

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 3x + 7.$$

2. (**Preuve LEAN**) Complétez la preuve d'un théorème `limite_g`, affirmant que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$. L'assertion à démontrer est la suivante :

<pre>theorem limite_g : limite_infinie g := by { --Complétez la preuve }</pre>
--

3. Ecrire le code d'un prédicat `est_majoree`, portant sur une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et affirmant que f est majorée.

4. (Preuve LEAN) Complétez la preuve d'un théorème `limite_infinie_non_majoree`, affirmant que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, f n'est pas majorée. L'assertion à démontrer est la suivante :

```
theorem limite_infinie_non_majoree :
  ∀ f : Real → Real, (limite_infinie f) → ¬ (est_majoree f) := by
{
  --Complétez la preuve
}
```

(Indication : pensez à la commande `push_neg` pour traiter la négation.)

5. (Preuve LEAN) Ecrire l'énoncé d'un théorème LEAN affirmant qu'il existe des fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, mais telles que la différence $f - g$ ne tende pas vers $+\infty$. Rédiger ensuite la preuve de cet énoncé.

(Indication : vous pouvez utiliser la fonction g introduite plus haut, et invoquer le théorème `limite_g`.)

6. Ecrire un prédicat LEAN portant sur une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et affirmant que f est croissante.

7. Rédiger au papier une preuve rigoureuse du théorème suivant : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si f est croissante et non-majorée, alors $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

8. (Preuve LEAN, Bonus) Rédiger en LEAN la preuve du théorème précédent.

1 Un exemple.

Pour rappeler ce qui est attendu dans les questions marquées (**Preuve LEAN**), rédigeons la preuve du théorème suivant :

Pour toutes fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.

On suppose que dans le sujet, on a déjà introduit le prédicat `est_surjective` et la définition de la composée, comme suit :

```
def est_surjective : Nat → Nat
  ∀ y : Nat, ∃ x : Nat, f x = y

def composee (f g : Nat → Nat) :=
  fun x => f (g x)
```

On peut alors vous poser la question suivante :

(**LEAN**) Détailler la démonstration de l'énoncé LEAN suivant :

```
theorem composee_surjective :
  ∀ f g : Nat → Nat, (est_surjective (composee f g)) → (est_surjective f)
```

La réponse attendue consiste à écrire les trois rédactions suivantes, **en numérotant bien chaque étape** (vous pouvez indiquer des numéros entourés comme ci-dessous – ces numéros doivent bien se correspondre entre les trois rédactions).

1. *Preuve en LEAN (à écrire sur votre copie)* –

```
① intro f g
② intro H
③ rw [est_surjective, composee] at H
④ rw [est_surjective]
⑤ intro y
⑥ have H1 := H y
⑦ rcases H1 with ⟨x0, H2⟩
⑧ use (g x0)
⑨ assumption
```

2. Évolution du contexte et de l'objectif (à écrire dans les encadrés fournis avec le sujet) –

Contexte
① $f \circ g : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$
② $H : \text{est_surjective} (\text{composee } f \circ g)$
③ $H : \forall y : \text{Nat}, \exists x : \text{Nat}, f (g \ x) = y$
⑤ $y : \text{Nat}$
⑥ $H1 : \exists x : \text{Nat}, f (g \ x) = y$
⑦ $x0 : \text{Nat}$
⑦ $H2 : f (g \ x0) = y$
Objectif
① $\forall f \circ g : \text{Nat}, \text{est_surjective} (\text{composee } f \circ g) \rightarrow \text{est_surjective } f$
① $\text{est_surjective} (\text{composee } f \circ g) \rightarrow \text{est_surjective } f$
② $\text{est_surjective } f$
④ $\forall y : \text{Nat}, \exists x : \text{Nat}, f \ x = y$
⑤ $\exists x : \text{Nat}, f \ x = y$
⑧ $f (g \ x0) = y$
⑨ <i>(objectif atteint).</i>

3– Preuve en langage naturel (à écrire sur votre copie) –

① Soient $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
② Supposons que $f \circ g$ est surjective. Montrons que f est surjective.
⑤ Soit $y \in \mathbb{N}$. On doit montrer qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = y$.
⑥ Puisque $f \circ g$ est surjective, on a :
H1 : $\exists x \in \mathbb{N}, f(gx) = y.$
⑦ D'après H1 , il existe donc $x_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(g(x_0)) = y$.
⑧ Montrons que $x = g(x_0)$ convient.
⑨ On a en effet $f(x) = f(g(x_0)) = y$. La preuve est terminée.