Théorie de la mesure et intégration

Exercice 1 On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

1. L'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ par $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ si A est infini est-elle une mesure ?
2. L'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ par $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ si A est infini est-elle une mesure ?
3. L'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ par $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2}$ si A est non-vide et $\mu(A) = 0$ sinon est-elle une mesure ?

Exercice 2 Soit $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ (par définition $-A = \{-a : a \in A\}$).

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Les applications $f : x \mapsto x^2, g : x \mapsto x^3, h : x \mapsto e^x$ sont-elles $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables ? $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables ? $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ -mesurables ?

Exercice 3 Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{E}$ -mesurable telle que $\int_E |f| d\mu < \infty$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0$.
2. Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leq n\}} |f|^2 d\mu < \infty.$$

Exercice 4 Calculer, en les justifiant, les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

Exercice 5 On montre dans cet exercice qu'il n'existe pas de mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ invariante par translation telle que $\mu([0, 2]) \in]0, \infty[$.

1. Soit $\sim$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Pour chaque classe, on considère un de ses représentants que l'on choisit dans $[0, 1[$. On notera A l'ensemble des représentants. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A_x = \{x + a, a \in A\}$.

2. Montrer que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ et que cette union est disjointe.
3. En déduire que si $\mu(A) = 0$, alors $\mu(\mathbb{R}) = \mu([0, 2]) = 0$
4. Montrer que $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} A_q \subset [0, 2]$.
5. En déduire que si $\mu(A) > 0$, alors $\mu([0, 2]) = \infty$.
6. En déduire qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens.

Espace de probabilités

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire réelle et $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions positives mesurables telles que $fg \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(X)) \geq 1$.

Exercice 7

1. Donner un exemple de loi ni discrète ni à densité.
2. Donner un exemple de loi sans atome mais non absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (Indication : chercher une loi qui charge uniformément tous les réels sur $[0, 1]$ dont le développement décimal propre ne comporte pas de 9).

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$. On considère μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ et on note $F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t])$ (la fonction de répartition de μ). On pose, pour $0 < x \leq 1$, $G(x) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F_\mu(t) \geq x\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $G(X)$.

Exercice 9 Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$. Son but est de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a$, $c \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

1. Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$.
2. Montrer, pour $a > 0$, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, la relation

$$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1)$$

3. Dédurre la valeur de $s_c(a)$
4. Application numérique :
Calculer la valeur précédente avec $a = 900, c = 1000$; $a = 100, c = 20000$ dans les cas $p = 0,5$ et $p = \frac{18}{38}$.

Exercice 10 On reprend le modèle de l'exercice précédent mais le jeu change et le joueur est maintenant autorisé à s'endetter (il ne doit plus s'arrêter quand il est ruiné). On s'intéresse au temps d'attente du premier gain par le joueur (c'est à dire au premier instant où sa fortune s'est accrue d'une unité par rapport à sa fortune initiale).

1. Posons $\phi_n = \mathbb{P}$ ("au n ième coup, pour la première fois, le joueur réalise un gain"). Par convention, $\phi_0 = 0$. Calculer ϕ_1 .
2. On pose $\Phi(s) = \sum_{n \geq 0} \phi_n s^n$ pour $0 \leq s \leq 1$. Montrer que pour $n > 1$,

$$\phi_n = q(\phi_1 \phi_{n-2} + \dots + \phi_{n-2} \phi_1)$$

3. Dédurre que $\Phi(s) - ps = qs\Phi^2(s)$.

4. Résoudre l'équation et en déduire Φ .
5. Calculer $\sum_{n \geq 0} \phi_n$.
6. Soit N le numéro du coup où le joueur réalise un gain pour la première fois. Calculer $\mathbb{E}(N)$.

Exercice 11 Une princesse a $n \geq 3$ prétendants numérotés par ordre de mérite décroissant $1, 2, \dots, n$. Elle doit en choisir un. Le problème est qu'ils défilent un par un au hasard devant elle et qu'elle ne peut revenir sur son choix si elle en a laissé partir un. Elle doit donc adopter une stratégie pour avoir le plus de chance de choisir le meilleur...

Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ω est muni de la probabilité uniforme.

$\sigma \in \Omega$ représente un tirage du hasard (les prétendants défilent dans l'ordre $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$).

Pour $1 \leq k \leq n$, on introduit la variable Y_k qui est le rang de $\sigma(k)$ dans l'ensemble $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ rangé en ordre décroissant : $Y_k = 1$ signifie que $\sigma(k)$ est le plus grand parmi l'ensemble $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$, $Y_k = 2$ signifie qu'il y a exactement un élément de $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ plus grand que $\sigma(k)$ etc...

Par convention, on pose $Y_{n+1} = 0$.

a) Montrer que

$$F : \sigma \rightarrow (Y_1(\sigma), \dots, Y_n(\sigma))$$

définit une bijection de Ω sur $\Pi = \{1\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, n\}$

b) En déduire que les variables Y_j sont indépendantes et que Y_k suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, k\}$.

c) Soit $\tau_r = \inf\{k > r, Y_k = 1\}$ ($= n + 1$ si cet ensemble est vide).

Calculer la probabilité pour qu'au temps τ_r , le prétendant qui se présente soit le meilleur (i.e. le numéro 1).

On choisit $r^* := r^*(n)$ afin maximiser la probabilité précédente. Trouver un équivalent de r^* quand n tend vers l'infini.

Convergence spatiale

- Exercice 12**
1. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge dans L^1 mais pas dans L^2 .
 2. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge en probabilités mais pas dans L^1 .
 3. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge p.s. mais pas dans L^1 .
 4. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge en probabilités mais pas p.s.
 5. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge dans L^1 mais pas p.s.

Exercice 13 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) converge vers 0 dans L^1 .
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) converge vers 0 en probabilités.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (X_n) converge vers 0 p.s.

Exercice 14 Soit $\varepsilon_n \in]0, \infty[$ tels que $\sum_n \varepsilon_n < \infty$. Soit X_n v.a.r. telles que $\sum_n \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| \geq \varepsilon_n) < \infty$. Montrer qu'il existe X v.a.r. telle que X_n converge p.s. vers X .

Exercice 15 Un enfant collectionne des images qu'on trouve dans des paquets de céréales. La collection complète comporte $N \geq 1$ images différentes : dans chaque paquet de céréales on a une probabilité $1/N$ de trouver une image de la collection. On note $T_1, T_2, \dots, T_N$ les nombres successifs de paquets de céréales que l'enfant doit ouvrir pour obtenir pour la première fois 1, 2, $\dots$, N images différentes de la collection. On pose $T_0 = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(T_N) = NH_N$ où $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{\text{Var}(T_N)}{N^2}\right)_{N \geq 1}$ est bornée.
3. En déduire que $\frac{T_N}{N \ln N}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice 16 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. et dont la loi est sans atome. On définit l'événement A_n par

$$A_n := \{\forall k < n, X_k < X_n\}.$$

Si A_n est réalisé, on dit qu'on a obtenu un *record* à l'instant n .

1. Justifier que les événements $(A_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants et donner pour tout n la valeur de $P(A_n)$.
2. En déduire que presque sûrement, on observe une infinité de records.
3. On parle de double record à l'instant n si A_n et A_{n+1} sont réalisés. Montrer qu'il y a presque sûrement qu'un nombre fini de double record.

Exercice 17 Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On se fixe $\varepsilon > 0$ et on note pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p = \{\forall i < p, |S_i| < \varepsilon, |S_p| \geq \varepsilon\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq p$,

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{A_p}) = \mathbb{E}((S_n - S_p)^2 \mathbf{1}_{A_p}) + \mathbb{E}(S_p^2 \mathbf{1}_{A_p}).$$

2. En déduire que

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{\varepsilon^2}.$$

3. En déduire que si S_n converge dans L^2 alors S_n converge aussi p.s.

Convergence en loi

Exercice 18 Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Soit T_n le premier temps où la suite (X_i) reprend la même valeur *i.e* $T_n = \inf\{k \geq 1, \exists i < k, X_i = X_k\}$. Déterminer la limite en loi de $T_n/\sqrt{n}$.

Exercice 19 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n > 1$, $Y_n = \max_{i \leq n} X_i$.

1. Donner la limite en loi de la suite $(Y_n/\ln n)_{n \geq 2}$.
2. Montrer que presque sûrement, on a $\limsup X_n/\ln n = 1$.
3. Donner la limite en loi de la suite $(Y_n - \ln n)_{n \geq 1}$.

Exercice 20 Calculer les fonctions caractéristiques d'une loi uniforme sur $[a, b]$, d'une loi exponentielle de paramètre λ , d'une loi géométrique de paramètre p , d'une loi de Poisson de paramètre λ , d'une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 21 1. Montrer que si X_n suit une loi de Poisson de paramètre n , alors $(X_n - n)/\sqrt{n}$ tend en loi vers une loi normale centrée réduite.

2. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 22 Trouver une suite de fonctions caractéristiques qui converge partout ponctuellement mais telle que la limite ne soit pas une fonction caractéristique.

Exercice 23 Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite iid de var équidistribuées sur $\{-1, +1\}$. Montrer qu'on a la convergence en loi

$$\sqrt{\frac{1}{n^3}} \sum_{k=1}^n k X_k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

où l'on précisera la valeur de σ^2 .

Exercice 24 Soit $(X_n), (Y_n)$ deux suites de variables aléatoires réelles telles que (X_n) converge en loi vers X et (Y_n) vers Y . On suppose de plus que pour tout n , X_n est indépendant de Y_n et que X est indépendant de Y . Montrer que $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers $X + Y$.

Exercice 25 On fixe $0 < \alpha < 2$ et on considère une variable aléatoire réelle X de densité

$$f(x) = \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} 1_{\{|x| \geq 1\}}.$$

On note $\varphi(t)$ la fonction caractéristique de X .

1. Montrer que $\varphi(t)$ est paire et que

$$1 - \varphi(t) = \int_1^\infty \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} (1 - \cos(tx)) dx.$$

2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $1 - \varphi(t) \sim C|t|^\alpha$ quand $t \rightarrow 0$, où $C > 0$ est une constante réelle.
3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et toutes de même loi que X . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer qu'il existe un $\gamma_0 > 0$ tel que S_n/n^{γ_0} converge en loi vers une variable aléatoire non nulle. Exprimer ce réel γ_0 en fonction de α .
4. En déduire qu'il existe une loi de probabilité dont la fonction caractéristique est $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$.
5. Étudier la convergence de la suite

$$Y_n = \frac{1}{n^{\gamma_0}} \max_{k \leq n} X_k$$

Exercice 26 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$. On suppose que (X_n) converge en loi vers X . Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$.

Espérance conditionnelle

Exercice 27 Soit X et Y indépendantes et de même loi

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $S = X + Y$. Déterminer $\mathbb{E}[S|X]$, $\mathbb{E}[S^2|X]$ et $\mathbb{E}[a^S|X]$.

Exercice 28 Soit X, Y, U trois variables positives telles que U est uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante du couple (X, Y) . Déterminer $\mathbb{E}[(U+X)(U+Y)|\sigma(X, Y)]$, $\mathbb{E}[\ln(U+X)|X]$, et $\mathbb{E}[1_{U < f(X,Y)}|\sigma(X, Y)]$ pour f fonction mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $[0, 1]$.

Exercice 29 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles intégrables tel que $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$ p.s. Les variables aléatoires X et Y sont-elles nécessairement indépendantes ?

Exercice 30 Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Bernoulli de paramètre p . Soit $Z = \mathbf{1}_{X+Y=0}$. Calculer $E(X|Z)$ et $E(Y|Z)$. Ces deux variables sont-elles encore indépendantes ?

Exercice 31 Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ la famille de toutes les sous-tribus de $\mathcal{F}$ et X une v.a. intégrable. Montrer que la famille $(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_i))_{i \in I}$ est uniformément intégrable. On pourra utiliser le théorème de de La Vallée Poussin qui caractérise les familles uniformément intégrables.

Exercice 32 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{F}$. On considère l'événement $B = \{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{G}) = 0\}$. Montrer que $B \subset A^c$.

Exercice 33 Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On pose $\text{Var}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X/\mathcal{G}))^2/\mathcal{G}]$. Montrer que

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X/\mathcal{G})] + \text{Var}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})).$$

Exercice 34 Soit (X, Y, Z) tel que (X, Z) a même loi que (Y, Z) .

1. Montrer que pour toute f mesurable telle que $f(X)$ intégrable, $\mathbb{E}(f(X)/Z) = \mathbb{E}(f(Y)/Z)$.
2. On pose $h_1(X) = \mathbb{E}(g(Z)/X)$ et $h_2(Y) = \mathbb{E}(g(Z)/Y)$ pour g mesurable telle que $g(Z)$ intégrable. Montrer que $h_1 = h_2, \mu$ -pp, où μ désigne la loi de X .

Soient $T_1, \dots, T_n$ des variables aléatoires réelles intégrables indépendantes et de même loi. On pose $T = T_1 + \dots + T_n$.

- 3 Calculer $\mathbb{E}(T_1/T)$.
- 4 Calculer $\mathbb{E}(T/T_1)$.

Exercice 35 Soient $T_1, \dots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . On pose $T = T_1 + \dots + T_n$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant T puis calculer $\mathbb{E}(T_1/T)$.
- 2 Calculer $\mathbb{E}(T_1^2/T)$ puis $\mathbb{E}(T_1 T_2/T)$.

Martingales

Exercice 36 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère deux martingales réelles $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$. Soit τ un temps d'arrêt tel que $X_\tau = Y_\tau$ sur l'événement $\{\tau < \infty\}$. On pose $Z_n = Y_n$ si $n < \tau$ et $Z_n = X_n$ sinon. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

Exercice 37 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ la filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ et on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit a, b deux entiers positifs. On considère

$$T = \inf\{n \geq 0, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

1. Montrer que S_n est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $T < \infty$ p.s. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$ en fonction de a et b .
3. Trouver un réel c tel que $S_n^2 - cn$ soit une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
4. En déduire $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 38 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on considère une martingale réelle $(M_n)_{n \geq 0}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (M_k - M_{k-1}).$$

Montrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale qui converge p.s. et dans L^2 .

Exercice 39 Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi normale $N(0, \sigma^2)$, où $\sigma > 0$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ et $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$. On rappelle que

$$\mathbb{E}(e^{uY_1}) = e^{u^2\sigma^2/2}. \tag{1}$$

1. Soit $Z_n^u = \exp(uX_n - nu^2\sigma^2/2)$. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n \geq 1}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ -martingale.
2. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers une v.a. Z_∞^u finie. Que vaut cette limite? Pour quelles valeurs de $u \in \mathbb{R}$, $(Z_n^u)_{n \geq 1}$ est-elle une martingale fermée?

Exercice 40 On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires telle que $X_0 = 3$ et telle que pour tout $n \geq 0$, conditionnellement à $(X_0, \dots, X_n)$, X_{n+1} suit une loi Binomiale de paramètre $(10, X_n/10)$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

1. Montrer que (X_n) est une $\mathcal{F}_n$ -martingale, qui converge presque sûrement vers une variable X_∞ .
2. Donner la loi de X_∞ .

Exercice 41 On considère une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$. On fixe $p \in]0, 1[$, $\theta \in]0, 1[$ et on construit par récurrence la suite $X := (X_n)_{n \geq 0}$:

$$X_0 = p \quad \text{et pour } n \geq 0, \quad X_{n+1} := \theta X_n + (1 - \theta) \mathbf{1}_{\{U_{n+1} \leq X_n\}}.$$

1. Montrer que X_n est une martingale qui converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire qu'on notera X_∞ .
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = (1 - \theta)^2 \mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

3. En déduire que $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)] = 0$ puis la loi de X_∞ .

Exercice 42 Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2, \dots$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Soient a un entier strictement positif et $\tau = \inf\{n \geq 0, S_n = a\}$ le premier temps de passage par a .

1. Montrer que

$$X_n^\theta = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}$$

est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale. Montrer que, si $\theta \geq 0$, $(X_{n \wedge \tau}^\theta)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ -martingale bornée.

2. Montrer que, pour tout $\theta > 0$, $(X_{n \wedge \tau}^\theta)_{n \geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 vers la v.a.

$$W^\theta = \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^\tau} \mathbf{1}_{\{\tau < +\infty\}} \tag{2}$$

3. Montrer que $\mathbb{P}\{\tau < +\infty\} = 1$ et que, pour tout $\theta \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(\cosh \theta)^{-\tau}] = e^{-\theta a}.$$