

Corrections de quelques exercices.

⑦

Exo 4

Soit $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{x \in [0, n]} e^{x/2}$. Alors $I_n := \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

De plus $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x/2}$ si $x \geq 0$

et comme $\ln(1-x) \leq -x$ on a $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$ donc $|f_n(x)| \leq e^{-x/2}$ intégrable.

Par le TCD $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx = 2$

De même, on montre par le TCD que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

Exo 5

1) On a $x \sim x$, $\sim$ est clairement symétrique et si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors

$$z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{Q} \text{ donc } x \sim z.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\exists a \in \mathbb{A}$ tq $x \sim a$ ie $\exists q \in \mathbb{Q}, x = a + q$.

Donc $x \in A_q$. Ainsi $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$

Soit $y \in A_q \cap A_{q'}$ alors $y = a + q \quad a \in \mathbb{A}$
 $\quad \quad \quad = a' + q' \quad a' \in \mathbb{A}$

Donc $a' - a = q - q' \in \mathbb{Q}$

Or $a' \sim a$ et donc $a = a'$ et $q = q'$.

3) Comme μ invariante par translation, $\mu(A) = \mu(A_q) = 0$

Donc $\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(A_q) = 0$ et $\mu([0,2]) \leq \mu(\mathbb{R}) = 0$.

4) Soit $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A_q$ ie $x = a + q$ $a \in A$, $q \in [0,1]$.

Comme $A \subset [0,1]$, on a donc bien $x \in [0,2]$.

5) Ainsi: $\mu([0,2]) \geq \mu\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} A_q\right) \geq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mu(A) = \infty$ si $\mu(A) > 0$.

6) λ est une mesure sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ invariante par translation tq $\mu([0,2]) \in]0, \infty[$
Donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 10

1) $\phi_1 = p$

2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{au } n\text{-ième coup, on gagne pour la 1^{re} fois} \\ \text{ou perd au premier coup, on revient à 0 pour la 1^{re} fois} \\ \text{au temps } k \text{ et on atteint 1 pour la 1^{re} fois en } n \end{array} \right\} = \bigcup_{k=2}^{n-1} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{on perd au premier coup, on} \\ \text{revient à 0 pour la 1^{re} fois} \\ \text{au temps } k \text{ et on atteint} \\ \text{1 pour la 1^{re} fois en } n \end{array} \right\}}_{=: B_{n,k}}$

et on voit que $P(B_{n,k}) = q \cdot \phi_{k-1} \cdot \phi_{n-k}$

Donc $\phi_n = q \sum_{k=2}^{n-1} \phi_{k-1} \phi_{n-k} = q \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \phi_{n-1-k}$ (car $\phi_0 = 0$).

3) $\Phi(s) = \phi_0 + \phi_1 s + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n s^n = ps + q \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \phi_{n-1-k} s^n$

$$\Phi(s) - ps = q \sum_{m \geq 1} \sum_{k=0}^m \phi_k \phi_{m-k} s^{m+1} = qs \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{k=0}^m \phi_k \phi_{m-k} \right) s^m$$

$$= qs \Phi^2(s)$$

4) On résout l'équation. On obtient $\Phi(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2q}$

Comme $\phi(0)=0$ on en déduit $\phi(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4pq}}{2q}$.

$$5) \sum \phi_n = \Phi(1) = \frac{1 - \sqrt{1-4pq}}{2q} = \frac{1 - |2p-1|}{2q}$$

Ainsi si $p \geq \frac{1}{2}$, $\Phi(1) = 1$

si $p < \frac{1}{2}$ $\Phi(1) = \frac{p}{q}$.

6) Si $p < \frac{1}{2}$, $\Phi(1) = P(N < \infty) = \frac{p}{q} < 1$ Ainsi $P(N = \infty) > 0$ donc $E(N) = \infty$.

Si $p \geq \frac{1}{2}$ $E(N) = \sum_{n \geq 0} n \phi_n = \Phi'(1)$

$$\Phi'(1) = \begin{cases} \frac{p}{2p-1} & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exo 11

a) Chaque $\pi \in \Pi$ définit de manière unique un $\sigma \in \Omega$ tq $F(\sigma) = \pi$

b) σ étant de loi uniforme, $F(\sigma)$ est donc aussi de loi uniforme sur Π

ie $(Y_j)_j$ indépendantes et uniforme sur $\{1, \dots, s\}$.

c) $P(\sigma(Z_r)=1) = \sum_{k=r+1}^n P(\sigma(Z_k)=1, Z_r=k) = \sum_{k=r+1}^n P(Y_i \neq 1 \forall_{\substack{i \geq r \\ i \neq k}}, Y_k=1)$

$$= \sum_{k=r+1}^n \left(\prod_{\substack{i \geq k \\ i \neq k}} \frac{i-1}{i} \right) \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=r+1}^n \left(\prod_{i=r+1}^n \frac{i-1}{i} \right) \cdot \frac{1}{k-1}$$

$$= \sum_{k=r+1}^n \frac{1}{k-1} \cdot \frac{r}{n} = \frac{r}{n} \sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Ainsi $P(\sigma(Z_r) = 1) \sim \frac{r}{n} \ln \frac{n}{r}$ pour $n, r \rightarrow \infty$.

$f(x) = -x \ln x$ est maximum en $x = \frac{1}{e}$ sur $(0, 1]$. Donc $\boxed{r^*(n) \sim \frac{n}{e}}$

et $P(\sigma(Z_{r^*}) = 1) \sim \frac{1}{e}$

Exo 17

1) On remarque que $S_n - S_p$ indépendant de S_p et de A_p . Donc

$$\begin{aligned} E(S_n^2 1_{A_p}) &= E((S_n - S_p + S_p)^2 1_{A_p}) = E((S_n - S_p)^2 1_{A_p}) + E(S_p^2 1_{A_p}) \\ &\quad + 2 E((S_n - S_p) \cdot S_p 1_{A_p}) \\ &\quad \underbrace{= 0 \text{ car } E(S_n - S_p) = 0.} \end{aligned}$$

2) On a $\{\max_k |S_k| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{p=1}^n A_p$ (A_p) 2 à 2 disjointes.

$$\text{et } \varepsilon^2 P(A_p) \leq E(S_p^2 1_{A_p}) \leq E(S_n^2 1_{A_p})$$

$$\text{D'où } P(\max_k |S_k| \geq \varepsilon) \leq \sum_{p=1}^n P(A_p) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(S_n^2).$$

3) Soit $\varepsilon > 0$. D'après 2)

$$P\left(\max_{n_0 \leq k \leq n} |S_k - S_{n_0}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E|(S_n - S_{n_0})|^2}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Comme } S_n \xrightarrow{L^2} S \text{ on a } E|(S_n - S_{n_0})|^2 \rightarrow E|(S - S_{n_0})|^2$$

$$\text{D'où } P\left(\max_{k \geq n_0} |S_k - S_{n_0}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E|(S - S_{n_0})|^2}{\varepsilon^2}$$

Soit (n_k) suite croissante t.q. $E((S - S_{n_k})^2) \leq \frac{1}{2^k}$

(5)

Alors $\sum_k P(\sup_{i \geq n_k} |S_i - S_{n_k}| \geq \varepsilon) < \infty$ donc par Borel-Cantelli,

$\exists N(\omega)$ t.q. $\forall n \geq N$ $\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| \leq \varepsilon$. Donc $\forall i, j \geq n_N$,

$|S_i - S_j| \leq 2\varepsilon$. (S_n) est de Cauchy donc (S_n) C.V. p.s.

Exo 24

On a $\varphi_{X_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t)$ et $\varphi_{Y_n}(t) \rightarrow \varphi_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

et comme X_n indépendant de Y_n , $\varphi_{X_n+Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t) \varphi_{Y_n}(t)$. Donc

$$\varphi_{X_n+Y_n}(t) \rightarrow \varphi_X(t) \varphi_Y(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Exo 25

1) $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx$ Comme f paire, φ paire.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} e^{itx} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{2x^{\alpha+1}} e^{itx} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{2x^{\alpha+1}} (e^{-itx} + e^{itx}) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \cos(tx) dx \end{aligned}$$

2) On pose $u = tx$. On obtient $1 - \varphi(t) \sim t^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}} (1 - \cos u) du$

3) $\varphi_{S_n}(t) = \varphi(t)^n$

$$\varphi_{\frac{S_n}{n^{\gamma_0}}}(t) = \varphi\left(\frac{t}{n^{\gamma_0}}\right) = \left(1 - \frac{c|t|^\alpha}{n^{\gamma_0\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\gamma_0\alpha}}\right)\right)^n \rightarrow \exp(-c|t|^\alpha)$$

si $\boxed{\gamma_0 = \frac{1}{\alpha}}$

4) Comme $\exp(-c|t|^\alpha)$ continue en 0, on en déduit que

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{d} Y \quad \text{avec } Y \text{ tq } \varphi_Y(t) = \exp(-c|t|^\alpha).$$

Alors $Z = \frac{Y}{c^{1/\alpha}}$ vérifie $\varphi_Z(t) = \exp(-|t|^\alpha).$

5) Pour $x \geq 1$, $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = 1 - \frac{1}{2n^\alpha}$

Donc pour $n^{\delta_0} x \geq 1$

$$P(Y_n \leq x) = F_X(n^{\delta_0} x)^n = \left(1 - \frac{1}{2n^\alpha}\right)^n \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2x^\alpha}\right)$$

$$F_{Y_n}(x) \rightarrow \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2x^\alpha}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Exo 25

On a $X_n^+ = \max(0, X_n)$. Comme $\max(0, x)$ est une fonction continue, si

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{alors} \quad X_n^+ \xrightarrow{d} X^+ \quad \text{De même par } X_n^-$$

$$\text{et } \sup_n E(X_n^{+2}) < \infty, \quad \sup_n E(X_n^{-2}) < \infty$$

Donc il suffit de montrer le résultat par $X_n \geq 0$ $X_n \xrightarrow{d} X$ et

$$\sup E(X_n^2) < \infty.$$

$$\text{Or si } X_n \geq 0, \quad E(X_n) = \int_0^{+\infty} P(X_n > a) da$$

$$\text{et } P(X_n > a) \rightarrow P(X > a) \quad \text{p.p.} \quad (\forall a \text{ où } F_X(a) \text{ est continue})$$

$$P(X_n > a) \leq \frac{E(X_n^2)}{a^2} \leq \frac{\sup E(X_n^2)}{a^2} \quad \text{qui est intégrable sur } [1, \infty[.$$

Donc par le TCD $E(X_n) \rightarrow \int_0^{+\infty} P(X \geq a) da = E(X)$

(9)

Exo 32

$E(1_A | \mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$ mesurable donc B est $\mathcal{G}$ -mesurable

$$\text{Donc } E(1_A \cdot 1_B) = E(E(1_A | \mathcal{G}) \cdot 1_B) = 0 \quad \text{car } E(1_A | \mathcal{G}) = 0 \text{ si } 1_B = 1.$$

Donc $A \cap B = \emptyset$ ie $B \subset A^c$

Exo 33

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = E\left(\underbrace{(X - E(X|\mathcal{G}))}_{\perp \text{ aux fonctions } \mathcal{G}\text{-mesurable}} + \underbrace{E(X|\mathcal{G}) - E(X)}_{\mathcal{G}\text{-mesurable}}\right)^2$$

$$= \underbrace{E((X - E(X|\mathcal{G}))^2)}_{E(\text{Var}(X|\mathcal{G}))} + \underbrace{E((E(X|\mathcal{G}) - E(X))^2)}_{\text{Var}(E(X|\mathcal{G}))}$$

Exo 38

$$(X_n) \text{ int\'egrable et adapt\'e et } E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n + \frac{1}{n+1} E(\Pi_{n+1} - \Pi_n | \mathcal{F}_n) = X_n$$

Montrons que $\sup_n E(X_n^2) < \infty$ ce qui implique la convergence p.s et L^2

$$X_n^2 = \sum_k \frac{1}{k^2} (\Pi_k - \Pi_{k-1})^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{1}{ij} (\Pi_j - \Pi_{j-1})(\Pi_i - \Pi_{i-1})$$

$$\text{Or } E((\Pi_j - \Pi_{j-1})(\Pi_i - \Pi_{i-1})) = E((\Pi_i - \Pi_{i-1}) \underbrace{E(\Pi_j - \Pi_{j-1} | \mathcal{F}_i)}_{=0 \text{ si } j > i}) = 0 \quad (8)$$

$$\text{Donc } E(X_n^2) \leq \sum_k \frac{1}{k^2} E((\Pi_k - \Pi_{k-1})^2).$$

$$\text{En particulier si } |\Pi_k| \leq k \quad E(X_n^2) \leq 4k^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Exo 30

$$1) (X_n) \text{ intégrable, adapté et } E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 10 \cdot \frac{X_n}{10} = X_n.$$

$$(X_n) \text{ est bornée donc } X_n \xrightarrow[p.s.]{L^p} X_\infty$$

$$2) \text{ On voit que nécessairement } X_\infty \in \{0, 10\} \text{ et comme}$$

$$E(X_\infty) = E(X_0) = 3 \quad \text{on a} \quad P(X_\infty = 10) = 1 \cdot P(X_\infty = 0) = \frac{3}{10}.$$

Exo 42

$$1) (X_n^\theta) \text{ intégrable, adapté et } E(X_{n+1}^\theta | \mathcal{F}_n) = X_n^\theta E\left(\frac{e^{\theta Z_{n+1}}}{\cosh \theta}\right) = X_n^\theta$$

$$\text{et } 0 \leq X_{n \wedge \tau}^\theta \leq \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^{n \wedge \tau}} \leq e^{\theta a} \quad \text{si } \theta \geq 0$$

$$2) (X_{n \wedge \tau}^\theta) \text{ martingale bornée donc converge p.s et dans } L^2$$

$$\text{Sur } \{Z < \tau\} \quad X_{n \wedge \tau}^\theta \rightarrow X_\tau^\theta = \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^\tau}$$

$$\text{Sur } \{Z = \tau\} \quad X_{n \wedge \tau}^\theta \leq \frac{e^{\theta a}}{(\cosh \theta)^n} \rightarrow 0 \quad \text{si } \theta \neq 0.$$

$$3) W^\theta \xrightarrow[\theta \rightarrow 0^+]{\theta > 0} 1_{\{Z < \tau\}} \quad \text{et par } 0 < \theta \leq 1, \quad W^\theta \leq e^a$$

Donc par le TCD, $E(W^\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} P(Z < \infty)$.

(90)

Or $X_{n\wedge Z}^\theta \xrightarrow{L'} W^\theta$ donc $E(W^\theta) = E(X_0^\theta) = 1$

D' où $P(Z < \infty) = 1$. Ainsi $W^\theta = \frac{e^{\theta a}}{(\cos \theta)^Z}$ et comme

$E(W^\theta) = 1$, on obtient le résultat.