Correction Contrôle continu 2M261

30 mars 2017

Exercice 3 : Intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que la fonction $x \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   Remarque Afin de montrer la continuité de cette intégrale impropre, la continuité et l'intégrabilité de l'intégrande ne suffit pas. Nous avons besoin de dominer la fonction par une fonction intégrable indépendante de x. Ici e^{-t^2} fait l'affaire. Quand on a cette domination, nul besoin de montrer que la fonction est intégrable car c'est une conséquence de la domination.

   Rédaction Posons $f : (t, x) \mapsto e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}$. f est prolongeable par continuité en $t = 0$ et $\forall x,\ f(0, x) = 0$. f est C^0 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\forall t, x \in \mathbb{R}^*$, $|f(, t, x)| \leq e^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et indépendant de x. D'après le théorème de convergence dominée (ou le théorème sur la convergence normale des intégrales), on a que F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} F(x)$.

   Rédaction $F(0) = \sqrt{\pi}/2$ (intégrale de Gauss).

   En utilisant la même domination qu'à la question précédente, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir l'intégrale et la limite. On obtient alors :
   $$\lim_{|x|\to+\infty} F(x) = 0$$

3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = -2F(x)$.

   Remarque Pour montrer la dérivabilité d'un intégrale (resp. une série), il faut montrer qu'on a convergence dominée de l'intégrale de la dérivée (resp. uniforme ou normale de la série dérivée). Ici on avait pas de domination sur $\mathbb{R}_+^*$. Il fallait se placer sur $[a, b]$ avec $a > 0$ pour avoir la domination et donc dérivabilité. Comme a et b sont quelconques, on a bien dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Rédaction $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{-2x}{t^2} e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}$. Si $x \in [a, b]$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq \frac{2b}{t^2} e^{-(t^2+\frac{a^2}{t^2})}$ intégrable sur $\mathbb{R}+$ (prolongeable en continuité en 0 par 0, $o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$). Ainsi par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2x}{t^2} e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})} dt.$$

Le changement de variable $u = \frac{x}{t}$ permet d'obtenir $F'(x) = -2F(x)$.

4. En déduire l'expression de $F(x)$.
   Rédaction $F(x) = Ce^{-2x}$ et $F(0) = \sqrt{\pi}/2 = C$.
   Ainsi $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$.

Exercice 4 : Séries de fonctions

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge et que le reste $R_m(x) = \sum\limits_{n=m+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ vérifie :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad |R_m(x)| \leq \frac{1}{m+2}$$

Rédaction. On note f_n la fonction terme général de la série. $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} = (-1)^n u_n(x)$ avec $(u_n(x))$ une suite positive décroissante tendant vers 0. Ainsi d'après le critère spécial des séries alternées, la série de terme général $(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge et son reste est du signe du premier terme et de module inférieur au premier terme

$$|R_m(x)| \leq \frac{e^{-(m+1)x}}{m+2} \leq \frac{1}{m+2}.$$

Remarque L'inégalité sur le reste fait partie du critère spécial des séries alternées. Pour montrer que le reste est du signe du premier terme et de module inférieure au premier terme, il suffit de grouper les termes deux à deux de deux manières différentes. On écrit cela pour les indices impaires :

$$R_{2m-1} = (u_{2m} - u_{2m+1}) + (u_{2m+2} - u_{2m+3}) + (\ldots$$

et toutes les parenthèses contiennent une quantité positive et donc R_{2m-1} est du signe de $(-1)^{2m} u_{2m}$. Si on groupe d'une deuxième manière, on a :

$$R_{2m-1} = u_{2m} - (u_{2m+1} - u_{2m+2}) - (u_{2m+3} - \ldots$$

et toutes les parenthèses contiennent une quantité positive et donc $R_{2m-1} \leq u_{2m}$. Comme il est de même signe, $|R_{2m-1}| \leq u_{2m}$. Le raisonnement est analogue pour les indices paires.

2. On note f la limite de la série de fonctions définie ci-dessus. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Rédaction Si on note $S_m(x)$ les sommes partielles d'ordre m de la série de fonction, on a pour tout x:
$$|f(x) - S_m(x)| = |R_m(x)| \leq \frac{1}{m+2}.$$
   La borne est indépendante de x et on a donc convergence uniforme de S_m sur f. Comme les f_n sont continues en x et qu'on a convergence uniforme de la série, la limite est continue.

   Remarque Le reste qui tend vers 0 uniformément est la définition de la convergence uniforme. Nul besoin ici d'invoquer le critère de Cauchy uniforme.

3. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

   Rédaction Comme on a convergence uniforme de la série de fonctions, on peut intervertir la limite et la somme et on obtient le résultat annoncé (seul le premier terme ne tend pas vers 0).

4. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Remarque On a montré qu'on a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. On a par contre pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ ou même $\mathbb{R}_+^*$ car on a un problème en 0. Pour la dérivée, on doit exclure 0. Pour montrer la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$, on montre la convergence normale sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. C'est la même idée que pour la dérivabilité dans l'exercice 3.

   Rédaction $f_n'(x) = (-1)^n \frac{n}{n+1} e^{-nx}$. Soit $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$, on a :
$$|f_n'(x)| \leq e^{-na}$$
   qui est sommable et indépendant de x. On a donc convergence normale de la série dérivée sur $[a, +\infty[$. Comme les f_n sont C^1, f est C^1 sur $[a, +\infty[$ de dérivée:
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{-n}{n+1} e^{-nx}$$
   .

   Cela étant vraie pour tout $a > 0$, f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée la série dérivée.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$f'(x) - f(x) = -\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

   Rédaction
$$\begin{aligned} f'(x) - f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{-n-1}{n+1} e^{-nx} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-x})^n = -\frac{1}{1+e^{-x}}. \end{aligned}$$

6. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$:
$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}).$$

Rédaction Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $Ce^x + h(x)$ où Ce^x est la solution de l'équation homogène (sans second membre) et h est une solution particulière de l'équation différentielle. Il se trouve que $x \mapsto e^x \ln(1 + e^{-x})$ est une solution particulière (il suffit de le vérifier). Ainsi $\exists C$ tel que

$$f(x) = Ce^x + e^x \ln(1 + e^{-x}).$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $C = 0$ (sinon la limite vaudrait $\pm\infty$). On a donc :

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}).$$