

# MAT 2742 — examen de mi-session

Donner les détails des calculs, pas seulement le résultat.

Calculatrices non-graphiques uniquement. Pas de notes de cours.

---

NOM, Prénom :

N° d'étudiant :

---

(pour le correcteur)

A :

B :

C :

D :

---

**A**

On considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et donner ses valeurs propres.
2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice et donner leur dimension.
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?



## B

On étudie un système dynamique en dimension 2 dont la matrice d'évolution  $B$  est diagonalisable, avec le vecteur propre  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  de valeur propre  $-0.7$  et le vecteur propre  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  de valeur propre  $3$ .

1. Quelle est l'évolution à long terme (donner un équivalent) de  $X_k = B^k X_0$  pour la condition initiale  $X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  ?
2. Pour quelles conditions initiales  $X_0$  a-t-on  $X_k \xrightarrow{\infty} 0$  ?

## C

On s'intéresse à la chaîne de Markov dont la matrice d'évolution est  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

1. Tracer le graphe associé. La matrice  $M$  est-elle régulière ?
2. Rappeler les propriétés d'évolution à long terme des chaînes de Markov régulières.
3. Calculer le vecteur d'état stationnaire de  $M$  et donner l'évolution à long terme de  $X_k = M^k X_0$  pour la condition initiale  $X_0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ .



## D

On considère le sous-espace  $E$  de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

1. Les vecteurs  $v_1, v_2$  sont-ils orthogonaux ?
2. Calculer la projection sur  $E$  du vecteur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

*(page supplémentaire pour brouillon ou réponses)*

*(page supplémentaire pour brouillon ou réponses)*



*(page supplémentaire pour brouillon ou réponses)*

*(page supplémentaire pour brouillon ou réponses)*