INTRODUCTION

On se dirige vers la solution approximative de systèmes linéaires. Un exemple commun est de trouver la meilleure droite étant donné un ensemble de points: c'est la DROITE DE RÉGRESSION. On verra que l'approche est également applicable à des fonctions plus générales (eg, polynômes, exponentielles, ...).

L'outil fondamental serait la projection, et donc on commence en développant un peu de théorie des projections.

PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire de deux vecteurs en $\mathbb{R}^n$ est définie comme

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

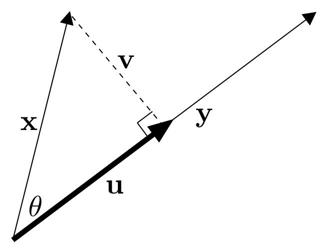
Quelques faits utiles du produit scalaire:

- La longueur d'un vecteur $\mathbf{x}$ est $\|x\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. En deux dimensions c'est le théorème de Pythagore.
- C'est un produit linéaire, dans le sens qu'on peut enlever des facteurs communs: $(k\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (k\mathbf{x})$.
- Deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont ORTHOGONAUX si l'angle entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est $90°$; on écrit alors $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. On peut détecter l'orthogonalité en calculant le produit scalaire, car $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ si et seulement si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.
- De façon plus générale, on peut déterminer l'angle θ entre deux vecteurs, car $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|x\| \|y\| \cos\theta$.

Donc le produit scalaire sert à mesurer et la longueur et la direction des vecteurs.

PROJECTION

La projection d'un vecteur $\mathbf{x}$ sur un autre vecteur $\mathbf{y}$ est la partie de $\mathbf{x}$ qui est dans la direction de $\mathbf{y}$. On peut décomposer $\mathbf{x}$ en deux parties: l'une dans la direction de $\mathbf{y}$, l'autre orthogonal à $\mathbf{y}$.



Dans le graphique, le vecteur $\mathbf{u}$ représente la projection de $\mathbf{x}$ sur $\mathbf{y}$. On écrit $\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Le vecteur $\mathbf{v}$ représente la partie de $\mathbf{x}$ qui est orthogonal à $\mathbf{y}$. On a $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Sachant la projection, $\mathbf{u}$, on pourrait calculer la partie orthogonale comme $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$.

On peut calculer la projection à l'aide de la formule suivante.

Proposition 9.1. *La projection de* $\mathbf{x}$ *sur* $\mathbf{y}$ *est* $\text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\mathbf{y}$. □

Exemple 9.2. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. On calcul la projection comme

$$\text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \frac{21}{13}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}4,8\\3,2\end{bmatrix}$$

On peut alors calculer le "reste" de $\mathbf{x}$, c'est-à-dire la partie orthogonale à $\mathbf{y}$, en calculant

$$\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} - \frac{21}{13}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}-1,8\\2,8\end{bmatrix}$$

On obtient alors une décomposition de $\mathbf{x}$ en deux parties: la première dans la direction de $\mathbf{y}$ (c'est $\text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$) et la deuxième perpendiculaire à $\mathbf{y}$.

$$\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}63/13\\42/13\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-24/13\\36/13\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}4,8\\3,2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1,8\\2,8\end{bmatrix}$$ □

Exercice 9.3. Vérifier que la décomposition donnée dans l'exercice précédant a les bonnes directions: le premier vecteur devrait être un multiple de $\mathbf{y}$ et le deuxième vecteur devrait être perpendiculaire à $\mathbf{y}$. □

Exercice 9.4. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$. Calculer $\text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, et donner une décomposition de $\mathbf{x}$ en deux vecteurs: l'un dans la direction de $\mathbf{y}$ et l'autre perpendiculaire à $\mathbf{y}$.

Calculer aussi $\text{proj}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, et donner une décomposition de $\mathbf{y}$ en deux vecteurs: l'un dans la direction de $\mathbf{x}$ et l'autre perpendiculaire à $\mathbf{x}$. □

BASES

Une BASE en $\mathbb{R}^n$ est un ensemble indépendant de vecteurs qui engendre $\mathbb{R}^n$.

On peut aussi avoir des bases pour des sous-espaces: c'est un ensemble indépendant de vecteurs qui engendre le sous-espace.

On a déjà vu des exemples: on a vu comment trouver des bases pour des espaces propres d'une matrice. En prenant l'union de toutes les bases propres, on a pu trouver une base pour $\mathbb{R}^n$ (du moins dans le cas des matrices diagonalisables). C'était une base très utile pour étudier des systèmes dynamiques.

Une base est utile car ça permet d'exprimer tout vecteur uniquement.

Théorème 9.5. *Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ une base pour un sous-espace U, et $\mathbf{x}$ n'importe quel vecteur dans U.*

Alors il existe des valeurs uniques $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ qui donnent

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$$

Ces valeurs sont les COORDONNÉES *de $\mathbf{x}$ par rapport à la base $\mathbf{x}$.* □

Exemple 9.6. On calcul les coordonnées de $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ par rapport à la base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. On cherche alors des valeurs tel que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ici, on voit directement que $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 4$.

On calcul les coordonnées de $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ par rapport à la base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. En générale, on aurait la matrice augmentée, qúon résout à l'aide de la méthode Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Les coordonnées sont alors $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 4$.

On observe que le même vecteur a des coordonnées différents par rapport à des bases différentes. De plus, le coordonnée qui a changé est le coordonnée qui correspond au vecteur du base qui n'a *pas* changé. Résumé: les coordonnées dépendent de la base *entière*. □

BASES ORTHOGONALES

L'orthogonalité n'est pas simplement une caractéristique géométrique: c'est une condition algébrique aussi.

Théorème 9.7. *Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ un ensemble orthogonal; c'est-à-dire un ensemble avec $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq k$.*

Alors $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ est en ensemble de vecteurs orthogonaux. □

Note que ce n'est pas valide dans l'autre sens: un ensemble indépendant n'est pas nécessairement orthogonal.

La conséquence c'est que si on a n vecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$, alors ce serait n vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^n$, et donc une base pour $\mathbb{R}^n$: une BASE ORTHOGONALE. De même, si on a k vecteurs orthogonaux dans un sous-espace U de dimension k, ce serait une base orthogonale pour le sous-espace U.

Exercice 9.8. Vérifier que $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ est une base orthogonale pour $\mathbb{R}^2$. Vérifier que $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ n'est pas une base orthogonale pour $\mathbb{R}^2$.

Est-ce que $\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ est une base orthogonale pour un sous-espace de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9.9. Trouver des valeurs a, b tel que $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right\}$ soit une base orthogonale. Est-ce que les valeurs a, b sont uniques? □

Une BASE ORTHONORMALE est une base orthogonale qui a aussi la propriété que chaque vecteur est de longueur 1. On peut transformer une base orthogonale à une base orthonormale en divisant chaque vecteur par sa norme.

Exercice 9.10. Vérifier que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ est une base orthogonale pour le sous espace engendré par ces deux vecteurs. □

Exemple 9.11. Pour l'exercice précédant, on trouve une base orthonormale.

On calcul que $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3$ et que $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{2}$. Donc on obtient la base orthonormale

$$\left\{\frac{1}{3}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_2\right\} = \left\{\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\-1/3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}\right\}$$ □

Exercice 9.12. Dans une base orthonormale, le produit scalaire de deux vecteurs différents est 0, et le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est 1. Expliquer pourquoi. □

L'exercice précédent peut se comprendre comme suit. Si on prend une base orthonormale, et on met les vecteurs comme colonnes d'une matrice U, alors $U^T U = I$. Une telle matrice est dite MATRICE ORTHOGONALE.[1]

BASES ORTHOGONALES ET PROJECTIONS

On cherche à calculer des projections de manière efficace. Les bases orthogonales servent exactement à ceci. Notre but immédiat est d'obtenir une formule pour la projection d'un vecteur sur un sous-espace. On verra que c'est essentiellement la même chose que la projection d'un vecteur sur un autre vecteur.

Théorème 9.13. *Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n\}$ une base orthogonale pour $\mathbb{R}^n$, et $\mathbf{x}$ n'importe quel vecteur dans $\mathbb{R}^n$.*

Alors

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_n}{\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{v}_n}\mathbf{v}_n$$ □

[1] La terminologie est un peu bizarre: on aurait pensé "matrice orthonormale". Mais c'est comme ça!

Autrement dit, $\mathbf{x}$ est égale à la somme des projections de $\mathbf{x}$ sur chaque vecteur de la base. C'est à comparer avec l'exemple 9.6: on a $\alpha_j = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{v}_j}$.

Ce théorème s'applique aux sous-espaces aussi. Si on a un vecteur $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ et un sous-espace, on pourrait demander quelle partie de $\mathbf{x}$ est “dans” le sous-espace. On voudrait trouver deux vecteurs, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, tel que $\mathbf{u}$ est dans U, $\mathbf{v}$ est orthogonal à U, et $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

“Orthogonal à U” veut dire que $\mathbf{v}$ est orthogonal à chaque vecteur dans U. On dit que le COMPLÉMENT ORTHOGONAL de U, dit $U^\perp$, est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à chaque vecteur de U.

$$U^\perp = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \perp \mathbf{x},\ \text{tout } \mathbf{x} \in U\}$$

La théorie des espaces orthogonaux donne la suivante.

Théorème 9.14. *Soit U un sous-espace quelconque de $\mathbb{R}^n$. Soit $U^\perp$ son complément orthogonal.*

Alors $\dim(U) + \dim(U^\perp) = n$. *De plus, tout vecteur $\mathbf{x}$ peut s'écrire comme $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, où $\mathbf{x} \in U$ et $\mathbf{v} \in U^\perp$.* □

On reconnaît l'idée de la projection d'un vecteur sur une autre. D'ailleurs, le graphique ci-haut illustre la projection de $\mathbf{x}$ sur l'espace engendré par $\mathbf{y}$. Une autre conséquence est la suivante: le complément orthogonal est unique.

Corollaire 9.15. *Si U et U' sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ avec* $\dim(U) + \dim(U') = n$, *et que chaque vecteur de U est orthogonal à chaque vecteur de U', alors $U' = U^\perp$.* □

Ceci se facilite avec des bases orthogonaux. On a trouvé la formule de projection sur un sous-espace, et aussi sur son complément orthogonal.

Théorème 9.16. *Soit $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ est une base orthogonale pour U, et $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_{n-k}\}$ est une base orthogonale pour $U^\perp$.*

Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \mathrm{proj}_U(\mathbf{x}) + \mathrm{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x})\\
&\mathrm{proj}_U(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{u}_k}\mathbf{u}_k\\
&\mathrm{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_{n-k}}{\mathbf{v}_{n-k}\cdot\mathbf{v}_{n-k}}\mathbf{v}_{n-k}
\end{aligned}$$

□

Exemple 9.17. Soit $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ des bases pour un espace U et son complément orthogonal, respectivement. Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors on peut calculer les deux projections comme

$$\text{proj}_U(\mathbf{x}) = \frac{3}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{U^\perp}(\mathbf{x}) = \frac{6}{18} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que la somme de ces deux projections donne $\mathbf{x}$. Donc, on aurait pu calculer une projection, et obtenir l'autre en soustrayant de $\mathbf{x}$. $\square$

Exercice 9.18. Vérifier que les deux bases données dans l'exemple précédant sont chacune des ensembles orthogonaux. Vérifier que chaque vecteur de la première est orthogonal à chaque vecteur de la deuxième. Conclure que les quatre vecteurs ensemble forment une base orthogonale pour $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exercice 9.19. Soit un ensemble orthogonal de k vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, et un autre ensemble orthogonal de $n-k$ vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, tel que chaque vecteur du premier ensemble est orthogonal à chaque vecteur du deuxième.

Expliquer pourquoi la combinaison des deux donne une base orthogonale pour $\mathbb{R}^n$. $\square$

Exercice 9.20. Pour les bases de l'exemple 9.17, trouver $\text{proj}_U(\mathbf{y})$ et $\text{proj}_{U^\perp}(\mathbf{y})$ pour $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Ensuite calculer $\mathbf{y} - \text{proj}_U(\mathbf{y})$ et comparer. $\square$

Il reste deux questions techniques. Étant donné un sous-espace, comment trouver une base orthogonale? Et aussi, comment trouver une base pour le complément orthogonale?

GRAM-SCHMIDT

On s'inspire de la première graphique de projection ci-haut. Les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ forment une base pour $\mathbb{R}^2$, mais pas une base orthogonale. On pourrait remplacer $\mathbf{x}$ avec la partie de $\mathbf{x}$ qui est orthogonal à $\mathbf{y}$, pour obtenir une base orthogonale. C'est-à-dire, $\{\mathbf{y}, \mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\}$ est une base orthogonale pour $\mathbb{R}^2$.

L'idée c'est de construire la base orthogonale un vecteur à la fois, chaque fois enlevant toutes les projections des vecteurs qui sont déjà dans la base orthogonale.

Algorithme 9.21. *Soit* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ *un ensemble qui engendre un sous-espace. On peut la transformer en base orthogonale comme suit.*

On commence avec une base orthogonale vide, et on répète les étapes suivantes.

1. *Choisir un vecteur de l'ensemble donné.*
2. *Soustraire de ce vecteur sa projection sur chaque vecteur qui est déjà dans la base orthogonale.*
3. *Mettre le résultat dans la base orthogonale.*

Exemple 9.22. Les vecteurs $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$ forment une base pour un sous-espace. Trouver une base orthogonale pour ce sous-espace.

On commence avec la base orthogonale vide, donc $\{\}$.

On choisit un vecteur dans l'ensemble; disons $\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$. On soustrait sa projection sur les autres vecteurs dans la base orthogonale. Il n'y a rien dans la base orthogonale (à date!), donc on soustrait rien. On met le résultat dans la base orthogonale.

À date on a la base orthogonale: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$. Note que tout ce qu'on a fait c'était de mettre un vecteur dans la base orthogonale: le premier vecteur serait toujours ainsi.

On répète! On choisit maintenant un vecteur; disons $\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}$. On soustrait sa projection sur chaque vecteur qui est déjà dans la base orthogonale. Donc

$$\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{6}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

On ajoute le résultat à la base orthogonale.

À date on a la base orthogonale: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$.

On choisit maintenant le dernier vecteur, $\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}$. On soustrait les projections:

$$\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\0\\2\end{bmatrix} - \frac{6}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{4}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-2\\2\end{bmatrix}$$

À date on a la base orthogonale: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\-2\\2\end{bmatrix}\right\}$. Il ne reste aucun vecteur dans l'ensemble original, donc l'algorithme se termine et c'est une base orthogonale pour l'espace engendré par les trois vecteurs originaux.

On se rappelle qu'en soustrayant les projections, on considère les projections sur les *nouveaux* vecteurs à date, et non les originaux. Aussi, on voit que puisqu'on obtient un ensemble orthogonal, alors c'est nécessairement un ensemble indépendant, donc une base pour l'espace engendré. Donc dans l'exemple 9.22 on a *prouvé* que l'ensemble original était une base. Sinon, en soustrayant on aurait obtenu un vecteur $\mathbf{0}$, qu'on aurait rejeté.

Exercice 9.23. Dans l'exemple 9.22, on a choisit les vecteurs dans un autre ordre particulier. Répéter l'exemple, mais avec un autre ordre. Est-ce qu'on obtient encore une base orthogonale? Est-ce la même base? □

Exercice 9.24. Dans l'exemple 9.22, on a trouvé une base de trois vecteurs orthogonaux. Vérifier directement que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est aussi un ensemble orthogonal. □

On voit une principe parfois utile: on peut multiplier un vecteur par une constante sans changer sa direction. Donc si on a une base orthogonale on peut multiplier chaque vecteur par des constantes et encore avoir une base orthogonale. Note que ce n'est pas la même base: lorsqu'on multiplie un vecteur par $\frac{1}{2}$ ça change! Mais c'est une autre base qui est encore orthogonale.

LE COMPLÉMENT ORTHOGONAL : COMPLÉTER UNE BASE

Sachant un sous-espace, comment trouver son complément orthogonal? On peut accomplir ceci avec une réduction Gauss-Jordan.

Algorithme 9.25. *Soit un ensemble* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ *qui engendre un sous-espace* U *de* $\mathbb{R}^n$.

On met les vecteurs comme colonnes d'une matrice A*, et on fait une méthode de Gauss sur la matrice* $[A|I]$*. Le résultat est* $[R|B]$.

Les colonnes de R *avec pivots indiquent quels vecteurs de l'ensemble on choisit pour la base du sous-espace* U.

Les rangées de B *correspondant aux rangées nulles de* R *donnent une base pour* $U^\perp$.

Si on combine la base de U *avec las base de* $U^\perp$ *on obtient une base de* $\mathbb{R}^n$*. On a "complété" la base de* U *à une base de* $\mathbb{R}^n$. □

Exemple 9.26. Un sous-espace U est engendré par les vecteurs $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. Trouver une base pour $U^\perp$.

On fait la réduction suivante.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

À gauche, il y a des pivots dans la première et deuxième colonne. Donc on prend les colonnes correspondantes comme base de U.

À gauche, il y a deux rangées nulles. Donc on prend les rangées correspondantes à droite comme base de $U^{\perp}$.

$$\text{base de } U\text{:} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{base de } U^{\perp}\text{:} \quad \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{base de } \mathbb{R}^4\text{:} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

□

Exercice 9.27. Vérifier que chaque vecteur dans la base pour $U^{\perp}$ est orthogonal à chaque vecteur dans la base pour U. □

Exercice 9.28. Dans l'exemple 9.26, vérifier que la base pour U n'est pas une base orthogonale. La transformer en base orthogonale. Faire de même pour la base pour $U^{\perp}$. Montrer que si on combine les deux bases orthogonales obtenues, on obtient une base orthogonale pour $\mathbb{R}^4$. Pourquoi est-ce qu'on n'a pas du faire une méthode de Gram-Schmidt avec quatre vecteurs? Qu'arrive si on fait une méthode de Gram-Schmidt avec les quatre vecteurs? □

Pour ceux qui s'intéressent, la méthode de l'algorithme 9.25 repose sur l'idée des matrices élémentaires. Une réduction de Gauss consiste en une multiplication par une séquence de matrices élémentaires. Donc on peut comprendre toute la réduction par une multiplication à gauche par une matrice inversible E. Donc la matrice finale $[R|B]$ est exactement $E[A|I] = [EA|E]$. Le fait d'avoir des rangées nulles à gauche veut dire que certaines rangées de E sont orthogonales à toutes les colonnes de A. Donc ce sont exactement ces rangées qu'on veut. Elles se trouvent à droite, car $EI = E$.