DÉFINITION

Soit le programme linéaire suivant en forme canonique.

$$\mathcal{P}: \quad \max\left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right\} \quad \text{s.c. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

On définit le programme linéaire DUAL comme suit:

$$\mathcal{P}^*: \quad \min\left\{\mathbf{b}^T\mathbf{y}\right\} \quad \text{s.c. } A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$$

Exemple 8.1. Voici le programme de l'exemple 6.1:

$$\mathcal{P}: \quad \max\{40x_1 + 60x_2\} \quad \text{s.c. } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \geq 0$$

Le dual du programme est donc

$$\mathcal{P}: \quad \min\{70y_1 + 40y_2 + 90y_3\} \quad \text{s.c. } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix}, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

□

On se rappelle que c'est toujours possible de récrire un programme linéaire en forme canonique, donc on peut en principe donner le dual de n'importe quel programme.

DUALITÉ ET OPTIMALITÉ

Le dual est fortement relié au programme original (parfois on dit PRIMAL pour celui-ci). On écrit $\mathcal{F}$ pour la région faisable du primal et $\mathcal{F}^*$ pour la région faisable du dual. Formellement,

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$$
$$\mathcal{F}^* = \{\mathbf{y} \mid A\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

Proposition 8.2. *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$, comme ci-haut.*

Si $\mathbf{x}$ est un point de $\mathcal{F}$ et $\mathbf{y}$ est un point de $\mathcal{F}^*$, alors $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

L'idée du preuve repose sur la multiplication de matrices et les transposes.

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{c} \leq \mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$
$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{b} \geq \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

Donc $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Exemple 8.3. Pour l'exemple 8.1, on vérifie que $\mathbf{y} = (30, 30, 30)$ est un point de $\mathcal{F}^*$ (un point faisable du dual). On calcul que pour ce point, $\mathbf{b}^T\mathbf{y} = 70(30) + 40(30) + 90(30) = 6000$. Donc pour le primal, on sait que le maximum de $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ est au plus 6000. Pour cet example, on connaît mieux, mais le principe est qu'un point faisable pour le dual donne une borne sur la valeur de l'objectif primal.

Alternativement, on pourrait prendre le point $\mathbf{x} = (10, 10)$ comme point de $\mathcal{F}$. On aura $\mathbf{x}^T\mathbf{c} = 1000$. Donc pour le dual on sait que le minimum de $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ est au moins 1000.

Exercice 8.4. Trouver d'autre points faisable du dual de l'exemple 8.1, et calculer la valeur de l'objectif dual pour ces points. Conclure que la valeur de l'objectif primal serait toujours au plus ces valeurs. Tenter de trouver un point qui donne un objectif aussi petit que possible.

Aussi, trouver des points faisable du primal de l'exemple 8.1, pour donner des bornes sur le dual. □

On voit que, en principe, la meilleure réponse à l'exercice précédant est de trouver les points faisables optimales.

Exercice 8.5. Vérifier que pour l'exemple 8.1, $\mathbf{x} = (15, 25)$ est un point faisable de $\mathcal{P}$. Vérifier aussi que $\mathbf{y} = (0, 30, 10)$ est un point faisable de $\mathcal{P}^*$. Calculer les deux fonctions objectives. En se référant à la proposition 8.2, que peut-on conclure? □

Le résultat de l'exercice précédant est typique.

Théorème 8.6. *Soit les deux programmes linéaires $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ ci-haut.*

Il y a exactement quatre possibilités

1. *Les deux régions faisables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ sont non-vides. C'est-à-dire qu'il existe des points faisables pour le primal et pour le dual. Dans ce cas, le maximum M de $\mathcal{P}$ existe, le minimum m de $\mathcal{P}^*$ existe et $M = m$.*
2. *La région faisable $\mathcal{F}$ est non-vide et $\mathcal{F}^*$ est vide. Dans ce cas, le maximum de $\mathcal{P}$ n'existe pas.*
3. *La région faisable $\mathcal{F}^*$ est non-vide et $\mathcal{F}$ est vide. Dans ce cas, le minimum de $\mathcal{P}^*$ n'existe pas.*
4. *Les deux régions faisable $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ sont vides. Il n'y a aucun point faisable pour ni l'un ni l'autre des deux programmes linéaires.* □

La dernière possibilité n'est typiquement pas intéressant: il n'y a rien à optimiser car rien n'est possible. Les deuxième et troisième possibilités sont parfois utiles dans le sens contraire: on peut prouver qu'un programme linéaire ne possède aucun point faisable du tout en montrant que son dual ne possède pas de solution optimale. Mais typiquement c'est la première possibilité qui nous intéresse.

Si les deux régions faisables ne sont pas vides, alors les deux programmes ont la même solution optimale. On peut donc choisir de solutionner soit le primal ou le dual.

DUALITÉ ET SIMPLEX

Il y a une conséquence pratique du théorème 8.6. Ayant trouvé une solution optimale du primal, on connaît la valeur optimale de la fonction objective du dual aussi. On résout deux programmes à la fois. Mais comment trouver les valeurs des *variables* dual?

Soit le tableau de simplex original d'un programme linéaire, et le tableau final:

$$\left[\begin{array}{c||c|c|c} 1 & -\mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T & 0 \\ \hline\hline \mathbf{0} & A & I & \mathbf{b} \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{c||c|c|c} 1 & \mathbf{d}^T & \mathbf{u}^T & M \\ \hline\hline \mathbf{0} & B_1 & B_2 & \mathbf{s} \end{array}\right]$$

Les matrices B_1 et B_2 sont les résultats finals des opération de rangées. Le vecteur $\mathbf{s}$ donne la solution optimale pour les variables de base (afin de connaître quelles variables, il faudrait connaître B_1 et B_2). La valeur M donne le maximum de l'objectif.

Qu'en est-il de $\mathbf{d}$ et $\mathbf{u}$? Ce sont des vecteurs non-négatifs (pourquoi?). On peut montrer que $\mathbf{d}^T = -\mathbf{c}^T + \mathbf{u}^T A$. Donc

$$0 \leq \mathbf{d} \leq \left(-\mathbf{c}^T + \mathbf{u}^T A\right)^T = \mathbf{c} + A^T \mathbf{u}$$

et $A^T\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$. On peut aussi montrer que $\mathbf{u}^T\mathbf{s} = M$. Donc $\mathbf{u}$ est un vecteur faisable pour le dual qui donne la même valeur objective que la valeur optimale du primal. On résume:

Théorème 8.7. *Soit le tableau de simplex original et final comme ci-haut, d'un programme linéaire qui possède une solution optimale. Alors la solution optimale du programme dual est exactement $\mathbf{y} = \mathbf{u}$, avec la valeur objective $m = M$. C'est-à-dire, on peut lire la solution optimale du dual dans la première rangée, dans les colonnes correspondant aux variables auxiliaires.* □

Exemple 8.8. On se rappelle l'exemple 6.1. En particulier, voici le tableau de simplex original et final:

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \quad \to \cdots \to \quad \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 2100 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 25 \end{array}\right]$$

Dans le tableau final, on lit la solution primal parmi les pivots: $x_1 = 15, x_2 = 25$. On trouve dans la première rangée la solution pour le dual, dans les colonnes des variables auxiliaires: $y_1 = 0, y_2 = 30, y_3 = 10$. □

Exercice 8.9. Vérifier que $x_1 = 15, x_2 = 25$ est solution faisable du primal, et que $y_1 = 0, y_2 = 30, y_3 = 10$ est solution faisable de dual. Vérifier aussi que ces deux solutions donnent la même valeur objective. □

DUALITÉ ET DUALITÉ

On note que le dual ressemble pas mal au primal. On voit aussi une symétrie dans le théorème 8.6. Ceci s'explique par le fait suivant:

Théorème 8.10. *Le dual du dual est le primal: $\{\mathcal{P}^*\}^* = \mathcal{P}$.*

Soit le primal

$$\mathcal{P}: \quad \max\left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\right\} \quad \text{s.c. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

et le programme dual

$$\mathcal{P}^*: \quad \min\left\{\mathbf{b}^T\mathbf{y}\right\} \quad \text{s.c. } A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$$

On peut exprimer le dual en forme canonique comme

$$\mathcal{P}^*: \quad \max\left\{-\mathbf{b}^T\mathbf{y}\right\} \quad \text{s.c. } (-A)\mathbf{y} \leq (-\mathbf{c}), \mathbf{y} \geq 0$$

Maintenant le dual du dual s'écrit comme

$$(\mathcal{P}^*)^*: \quad \min\left\{(-\mathbf{c})^T\mathbf{z}\right\} \quad \text{s.c. } (-A)^T\mathbf{z} \geq (-\mathbf{b}), \mathbf{z} \geq 0$$

On exprime ce dual du dual en forme canonique pour obtenir le programme linéaire originale.

$$(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P} : \quad \max \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{z} \right\} \quad \text{s.c. } A\mathbf{z} \leq \mathbf{b}, \mathbf{z} \geq 0$$

Exercice 8.11. Considérer le programme linéaire de l'exemple 7.9. Donner le programme linéaire dual.

On a déjà vu la solution de l'exemple 7.9 à l'aide de la méthode de simplex. En profiter pour "lire" la solution du dual. Vérifier que la solution est faisable pour le dual et aussi que l'objectif optimal dual (m) et égale à l'objectif optimal primal (M).

Faire une graphique du programme dual afin de vérifier les calculs. □

Exercice 8.12. Dans l'exemple 7.6 on a vu que il n'y avait aucune solution optimale, car c'était possible d'augmenter l'objectif sans limite.

En vous référant au théorème 8.6, que peut-on conclure pour le dual, en particulier pour la région faisable du dual? Donner le programme dual, et vérifier votre conclusion. □

Exercice 8.13. Pour les problèmes de l'exercice 7.16, écrire le dual. Ensuite, donner une solution optimale du dual, en vous référant à vos tableau finals de simplex pour les programmes primals. □