INTRODUCTION

On cherche un algorithme qui pourra trouver un sommet optimal, sans devoir tester chaque sommet. C'est parce que un programme linéaire peut avoir un nombre énorme de sommets: on trouve aisément des programmes linéaires dont la région faisable possède plus de sommets que le nombre d'électrons dans l'univers.

TRANSFORMER EN TABLEAU

On considère un programme linéaire en forme canonique.

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{s.c. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

Donc on présume que chaque inégalité est écrit du forme "variables au plus petite ou égale à constante". On dénote par n le nombre de variables et p le nombre de contraintes (pas incluant les contraintes $\mathbf{x} \geq 0$). Donc A est de taille $n \times p$.

De plus, on suppose que le vecteur $\mathbf{b}$ est complètement non-négatif, c'est-à-dire que chaque constante à droite est non-négatif. C'est une restriction technique: on verra bientôt comment traiter ce cas.

La première étape consiste en transformer chaque inégalité en égalité. Ceci s'accomplit en introduisant une nouvelle variable auxiliaire pour chaque contrainte. Donc pour la contrainte i (la rangée i de $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$) on obtient

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n \leq b_i \quad \rightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{in}x_n + y_i = b_i$$

On exige que $y_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq p$. On a maintenant un système avec $n + p$ variables et p égalités.

On introduit une autre variable M pour le profit. Ce n'est pas une variable "libre", car on connaît que $M = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. En forme standard, on écrit $M - \mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$.

On a maintenant $n+p+1$ variables et $p+1$ équations. On cherche une solution de ce système qui maximise la valeur de la variable M. On peut donner la matrice augmentée de ce système comme pour n'importe quel autre. Le voici en schéma:

$$\left[\begin{array}{c||c|c|c} 1 & -\mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T & 0 \\ \hline\hline \mathbf{0} & A & I & \mathbf{b} \end{array}\right] \tag{7.1}$$

On observe que ce tableau possède $n + p + 1$ variables, $p + 1$ rangées et $p + 1$ pivots, donc n variables libres.

Ce serait utile de considérer un exemple!

Exemple 7.1. On se rappelle l'exemple 6.1.

$$\max 40x_1 + 60x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 90 \end{cases} \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

On a $n = 2$ variables et $p = 3$ contraintes; on introduit alors $p = 3$ variables $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + y_1 &= 70 \\ x_1 + x_2 + y_2 &= 40 \\ x_1 + 3x_2 + y_3 &= 90 \end{aligned}$$

On écrit la fonction objective comme $M - 40x_1 - 60x_2 = 0$. On a donc le tableau suivant. La première rangée représente l'équation de l'objectif, les autres correspondent aux contraintes. Les colonnes correspondent aux variables: les vraies variables, les variables auxiliaires, et la valeur de l'objectif. Voici les équations:

$$\begin{array}{cccccccc} M & -40x_1 & -60x_2 & & & & = 0 \\ & 2x_1 & +x_2 & +y_1 & & & = 70 \\ & x_1 & +x_2 & & +y_2 & & = 40 \\ & x_1 & +3x_2 & & & +y_3 & = 90 \end{array}$$

On a le tableau de simplex du programme linéaire original, qui n'est rien d'autre que la matrice augmentée de ce nouveau système. On indique aussi, comme aide visuel, les variables qui correspondent à chaque colonne.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} M & x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right] \end{array} \tag{7.2}$$

Comparer ceci avec la forme générale de l'équation (7.1): trouver la matrice A, I, $\mathbf{c}^T$, $\mathbf{b}$. On observe que dans cet exemple les constantes (la dernière colonne) sont non-négatives. □

SOMMETS ET PIVOTS : TROUVER L'OPTIMUM

Observons que le tableau de simplex est en forme échelonnée, pourvu qu'on se permet de permuter les colonnes. Les pivots de l'équation (7.2) sont des les colonnes 1, 4, 5 et 6. Donc les variables libres sont x_1 et x_2. Il y a exactement $n = 2$ variables libres. De façon générale, il y aurait toujours exactement n variables libres.

On cherche une solution qui correspond à un sommet, autrement dit, une solution qui correspond à avoir une égalité dans n des contraintes: soit les p contraintes du problème ou les n contraintes de la forme $x_j \geq 0$. Mais une égalité dans une des contraintes originales correspond exactement à avoir une des variables auxiliaires égale à zéro. On a le résultat important suivant:

Proposition 7.2. *Un sommet de la région faisable est exactement une solution du tableau de simplex avec n des variables (réelles ou auxiliaires) égale à zéro.*

Donc on interprète le tableau de simplex comme suit. Les pivots indiquent les variables de base, et les variables libres (les n variables libres) seront zéro. Dans le tableau actuel, on lit la solution suivante:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_2 = 0 \\ &M = 0, y_1 = 70, y_2 = 40, y_3 = 90 \end{aligned}$$

C'est une solution faisable: fabriquer rien du tout pour un profit nul. Mais ce n'est pas optimal. Comment l'améliorer?

On cherche une solution parmi les sommets, donc parmi les solutions ayant n variables nulles. L'idée c'est de changer les pivots pour permettre un meilleur choix. Autrement dit, on doit choisir une des variables libres, et modifier le tableau pour que sa colonne possède un pivot. Autrement dit, on doit choisir une des variables qui est zéro dans la solution actuelle, et l'augmenter.

Exercice 7.3. Pourquoi est-ce qu'on ne peut pas diminuer une des variables qui est zéro dans la solution actuelle? □

Comment choisir?

La première rangée donne l'équation de M. On lit que $M - 40x_1 - 60x_2 = 0$ ou $M = 40x_1 + 60x_2$ (attention au signes!). On a le choix d'augmenter x_1 ou x_2 (correspondant aux valeurs négatives dans la première rangée). Augmenter x_2 a une plus forte influence sur M, donc on choisit d'augmenter x_2, ce qui équivaut à choisir la colonne de x_2 comme colonne qui aura un pivot. On identifie x_2 comme la variable qui entre dans la solution: c'est la colonne qu'on choisit.

Il faut maintenant choisir la rangée, c'est-à-dire la position dans cette colonne où sera le pivot. L'idée c'est que, en augmentant x_2, il faut que les autre variables restent positives. Donc au pire la contribution de x_2 ne peut pas dépasser la constante dans la colonne $\mathbf{b}$. En regardant les trois rangées correspondant aux contraintes, on voit qu'on a des limites en augmentant x_2:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 70 \\ x_2 &\leq 40 \\ 3x_2 &\leq 90 \end{aligned}$$

Ces limites garantissent que x_2 reste faisable. La limite la plus restrictive est $3x_2 \leq 90$, donc c'est dans cette rangée qu'on aura le pivot.

Pour résumer, on a décider de faire à ce que la valeur en boîte devienne un pivot.

$$\left[\begin{array}{c||cccccc|c} 1 & -40 & -60 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \hline\hline 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 40 \\ 0 & 1 & \boxed{3} & 0 & 0 & 1 & & 90 \end{array}\right]$$

Afin d'accomplir ceci, on multiplie la troisième rangée par $1/3$, et on la soustrait des autres rangées. Voici le tableau qui en résulte.

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1800 \\ \hline\hline 0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 40 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 10 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 30 \end{array}\right]$$

De ce tableau on lit la solution de la même manière. On identifie les variables libres et on leur donne la valeur zéro. Les autres se lisent directement du tableau.

$$\begin{aligned}&x_1 = y_3 = 0\\&M = 1800, x_2 = 30, y_1 = 40, y_2 = 10\end{aligned}$$

C'est une solution préférable, car M a augmenté. Mais on peut faire mieux, en observant que dans la première rangée il y a encore une valeur négative. Donc on peut encore augmenter M en introduisant la variable x_1 dans la solution. En augmentant x_2 il faudrait avoir

$$\begin{aligned}&\frac{5}{3}x_2 \leq 40\\&\frac{2}{3}x_2 \leq 10\\&\frac{1}{3}x_2 \leq 30\end{aligned}$$

La condition la plus restrictive est la deuxième. Ceci indique la position du prochain pivot: colonne de x_1 et la rangée de $\frac{2}{3}x_2 \leq 10$.

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c}1 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1800\\\hline\hline 0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 40\\0 & \boxed{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 10\\0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 30\end{array}\right]$$

On multiplie cette rangée par $\frac{3}{2}$ et ensuite on utilise le 1 pour annuler les autres éléments de la colonne. Ceci donne:

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 2100\\\hline\hline 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 15\\0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 15\\0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 25\end{array}\right]$$

Dans ce tableau on lit la solution

$$\begin{aligned}&y_2 = y_3 = 0\\&M = 2100, x_1 = 15, x_2 = 25, y_1 = 15\end{aligned}$$

C'est encore plus préférable, car M a augmenté.

Pour trouver une prochaine solution, on a l'option d'introduire la variable y_2 ou y_3. Mais les deux éléments correspondants dans la première rangée sont non-négatifs. Autrement dit, on a maintenant $M = 2100 - 30y_2 - 10y_3$. On voit alors que augmenter y_2 ou y_3 diminuerait la valeur de M.

On conclut que la solution actuelle est optimal.

Exercice 7.4. Dans le développement précédent, on a trouvé trois solutions (c'est-à-dire trois sommets). Vérifier que ces trois solutions sont, en ordre, les point O, R et P de l'exemple 6.12. $\square$

Il se peut qu'un programme linéaire possède des solutions, mais ne possède aucune solution optimale. On verra comment la méthode de simplex permet de détecter ce phénomène.

Exercice 7.5. Pouvez-vous donner une raison pourquoi on pourrait ne pas avoir une solution optimal? $\square$

Exemple 7.6. Trouver la solution optimale de

$$\min -x_1 - x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \end{cases} , \quad \mathbf{x} \geq 0$$ $\square$

On commence en récrivant le programme linéaire en forme canonique:

$$\max x_1 + x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \end{cases} , \quad \mathbf{x} \geq 0$$ $\square$

On note que $\mathbf{b} \geq 0$, donc on connaît comment solutionner. On obtient le tableau initial

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

La solution actuelle est

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &= 0 \\ M = 0, y_1 &= 1, y_2 = 4 \end{aligned}$$

On a le choix d'augmenter x_1 ou x_2. Les valeurs correspondantes dans la première rangée sont égales, donc on choisira au hasard x_1. En augmentant x_1, on doit respecter les conditions

$$\begin{aligned} -x_1 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 4 \end{aligned}$$

Ici, on voit que la première “condition” n'est pas une condition du tout. On cherche à *augmenter* x_2. On peut l'augmenter autant qu'on veut, on aura toujours $-x_1 \leq 1$. Donc la seule condition restrictive est que $x_1 \leq 4$. C'est donc la rangée correspondante qui indique l'endroit du prochain pivot.

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

On fait des opérations de rangée pour que cette position devienne pivot:

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ \hline\hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

La solution actuelle est

$$\begin{aligned} x_2 = y_2 &= 0 \\ M = 4, x_1 &= 4, y_1 = 5 \end{aligned}$$

On peut augmenter M, car il y a une valeur négative dans la première rangée. Donc on augmente x_2. Les conditions restrictives sont

$$\begin{aligned} -x_2 &\leq 5 \\ -2x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

Aucune de ces conditions impose une restriction sur x_2. On cherche à *augmenter* x_2; on peut augmenter à volonté! Donc il n'y a aucune limite sur la valeur de M.

Conclusion: ce programme linéaire ne possède aucune solution optimale. Le programme linéaire original ne possède pas de solution non plus: on peut diminuer l'objectif original (le min) autant qu'on veut.

Si c'était un problème réel, alors on aurait probablement oublié une contrainte (normalement on ne pourrait pas produire une quantité illimité de quoi que ce soit). Mais ce problème, tel que présenté, ne possède aucune solution optimale.

Exercice 7.7. On a fait le choix d'augmenter x_1 au début. Refaire l'exemple avec le choix de x_2. Est-ce que le résultat final est pareille? Est-ce que les résultats intermédiaires sont pareilles? □

Exercice 7.8. Faire un graphique de ce programme linéaire, et tenter de trouver la solution optimale graphiquement. Est-ce que vous pouvez voir pourquoi il n'y a pas de solution optimal? De plus, trouver les solutions intermédiaires trouvées par la méthode de simplex et expliquer graphiquement le fait qúon peut "augmenter x_2 autant qu'on veut". □

CONSTANTES NÉGATIVES

Considérons l'exemple suivant.

Exemple 7.9. Trouver la solution optimale de

$$\min 2x_1 - 3x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

□

On récrit en forme canonique pour obtenir

$$\max -2x_1 + 3x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

On observe une des constantes est négative. Voyons ce qui se passe. On forme le tableau initial.

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

On lit la solution initiale.

$$\begin{aligned} &x_1 = x_2 = 0 \\ &M = 0, y_1 = -1, y_2 = 2 \end{aligned}$$

Le problème ici, c'est que cette "solution" n'est pas faisable, car $y_2 < 0$. N'étant pas faisable, ce n'est certainement pas un sommet. Que faire?

Exercice 7.10. Montrer que si $\mathbf{b} \geq 0$ alors la solution obtenue du tableau initial est toujours faisable. Montrer que si $\mathbf{b} \not\geq 0$ alors la solution obtenue du tableau initial n'est pas faisable. □

On comprend que la vraie raison d'exiger que $\mathbf{b} \geq 0$ est que c'est une façon de garantir que la solution initiale est faisable. Pour la méthode de simplex en forme canonique, la solution initiale est toujours l'origine; ici l'origine n'est pas faisable. Donc le vrai problème c'est comment trouver une solution initiale, c'est-à-dire un sommet de la région faisable, afin de pouvoir démarrer la méthode de simplex.

Exercice 7.11. Vérifier que l'origine n'est pas un point faisable de l'exemple 7.9. □

On considère la contrainte problématique:

$$-x_1 + x_2 + y_1 = -1$$

Note qu'on veut que y_1 soit variable de base et $x_1 = x_2 = 0$, mais on ne peut pas, car on aura alors $y_1 < 0$. L'exemple est suffisamment "petite" que vous voyez peut-être la résolution, mais on cherche une méthode plutôt qu'une réponse, donc on continue de façon générale.

La solution c'est d'introduire une VARIABLE ARTIFICIELLE, qui est, comme les autres, non-négative.

$$-x_1 + x_2 + y_1 - s = -1$$

Si on exige que s soit variable de base on voit qu'il y a une solution: $s = 1$. La variable artificielle permet "d'absorber" la négativité. Mais le fait que $s \neq 0$ veut dire qu'on n'a pas une solution faisable au programme linéaire original. Donc on cherche une solution qui minimise s, c'est-à-dire qui maximise $-s$.

Afin de trouver une solution faisable au programme linéaire original, on résout le programme suivant:

$$\max -s \quad \text{s.c.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + y_1 - s \leq -1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases} , \quad x_1, x_2, y_1, y_2, s \geq 0$$

On a donc le tableau suivant, mais on veut que s soit une variable de base, c'est-à-dire qu'on veut que la colonne de s possède un pivot.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M & x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

La colonne de s doit être ajusté pour que le pivot soit réellement un pivot.

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline\hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Note qu'en exigeant que la colonne de s possède un pivot (au lieu de y_1) on rend la constante non-négative. On lit la solution initiale:

$$x_1 = x_2 = y_1 = 0$$
$$M = -1, y_2 = 2, s = 1$$

On savait ceci déjà, n'est-ce pas? (On se souvient que l'objectif M est, pour le moment, égale à $-s$ et non le "vrai" objectif.)

Les constantes sont toutes non-négatives: ce serait toujours le cas, car en faisant à ce que s devient variable de base on multiplie sa rangée par -1, qui “répare” la constante négative.

On peut maintenant faire une méthode simplex ordinaire. On identifie la variable x_1 comme variable qui entre, et on trouve la position du prochain pivot. Ensuite on fait des opérations de rangées pour que ça devienne pivot.

$$\left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline\hline 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c||ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

On a la solution actuelle:

$$x_2 = y_1 = s = 0$$
$$M = 0, x_1 = 1, y_2 = 1$$

Encore une fois, le M représente, pour le moment, l’objectif de $-s$. Note qu’on ne peut pas augmenter M, car il n’y a aucune valeur négative dans la première rangée. Par contre, on a atteint notre but: une solution ayant $s = 0$. On voit ceci de deux façons: la colonne de s ne possède pas de pivot, donc on peut la mettre égale à zéro. De plus, l’objectif $M = -s$ a atteint la valeur de zéro.

Si on avait trouvé une solution optimale avec $M < 0$ (ou $s > 0$) alors on aurait conclut qu’il n’existe aucune solution faisable avec $s = 0$. Autrement dit, le programme linéaire original n’aurait eu aucune solution faisable du tout: une région faisable vide!

Ici ce n’est pas le cas: on a trouvé une solution faisable. Elle se produit avec x_1 et y_2 comme variables de base. C’est exactement la raison d’avoir introduit une variable artificielle: pour trouver ce que *devrait* être les pivots dans le tableau initial. Donc on retourne au tableau initial, mais maintenant on exige que les pivots soient dans les colonne indiqués par notre dernier tableau “artificielle”, c’est-à-dire dans les colonnes de x_1 et y_2.

$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ \hline\hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

On observe que toutes les constantes sont non-négatives. Ce serait toujours le cas: le fait d’avoir identifier les bonnes colonnes pour les variables de base garantit que les nouvelles constantes seront toutes non-négatives. On peut maintenant retourner à la méthode se simplex standard. On lit la solution initiale (qui est maintenant faisable!):

$$x_2 = y_1 = 0$$
$$M = -2, x_1 = 1, y_2 = 1$$

On voit que c’est possible d’augmenter M en introduisant la variable x_2. Note qu’une des conditions restrictives sur x_2 n’est pas une restriction.

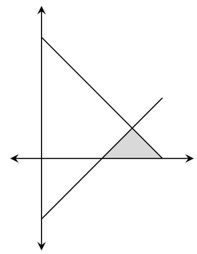
$$\left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ \hline\hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c||cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline\hline 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

On lit la solution actuelle.

$$y_1 = y_2 = 0$$
$$M = -\frac{3}{2}, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$$

On ne peut plus augmenter M, donc c'est une solution optimale.

Exercice 7.12. Voici un graphique du programme linéaire de l'exemple 7.9. Trouver sur ce graphique chaque solution intermédiaire qu'on a trouvé en résolvant ce programme linéaire, ainsi que la solution optimale.



$\square$

Exercice 7.13. Solutionner le programme linéaire suivant en utilisant la méthode de simplex.

$$\min 4x_1 - 5x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{x} \geq 0$$

Faire un graphique de ce programme linéaire. Bien indiquer la région faisable et les sommets. Indiquer sur ce graphique les solutions intermédiaires de votre méthode (méthodes?) de simplex, ou alternativement, tenter d'expliquer de façon géométrique la solution obtenue. $\square$

MÉTHODE DE SIMPLEX : ALGORITHME

On résume avec une description algorithmique de la méthode de simplex. C'est une description formelle de ceux qu'on a découvert dans les exemples.

Algorithme 7.14 (Méthode de simplex avec $\mathbf{b} \geq 0$)**.** *On commence avec*

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \textit{s.c.}\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

avec $\mathbf{b} \geq 0$.

On forme le tableau initial de simplex $\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T & 0 \\ \mathbf{0} & A & I & \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

On répète ensuite les étapes suivantes.

1. *La solution actuelle est obtenue en mettant chaque variable libre égale à zéro, et en lisant la solution pour les variables de base (celles avec pivot), y inclus la variable M.*
2. *Si chaque valeur dans la première rangée est positif (sauf peut-être la dernière), on ne peut pas augmenter M. On arrête: la solution actuelle est optimale.*
3. *Sinon, on identifie la valeur la plus négative: c'est la colonne du prochain pivot, et c'est la variable qu'on va introduire dans la solution, i.e., la variable qu'on va augmenter.*
4. *On identifie les limites imposés sur cette variable. Ceci ce fait en ignorant toute autre variable et en lisant chaque rangée comme une inégalité. La condition la plus restrictive donne la rangée du prochain pivot.*
5. *Si il n'y a aucune condition restrictive alors on pourra augmenter M autant qu'on veut. On arrête: il n'y a aucune solution optimale.*
6. *On connaît maintenant la position du prochain pivot. On multiplie cette rangée par une constante afin que le pivot devienne 1, et on l'utilise pour annuler les autres éléments dans sa colonne.* $\square$

Si $\mathbf{b} \not\geq 0$, c'est que l'origine n'est pas une solution faisable (et donc pas un sommet). On présente ici un algorithme qui commence en trouvant une solution faisable, c'est-à-dire un sommet. On peut la modifier pour obtenir une méthode itérative qui fonctionne pour plusieurs constantes négatives, mais on la présentera ici pour une seule valeur négative.

Algorithme 7.15 (Méthode de simplex avec $\mathbf{b} \not\geq 0$)**.** *On commence avec*

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad s.c.\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

1. *Introduire une variable artificielle s pour la valeur négative dans $\mathbf{b}$. Mettre $M = -s$.*
2. *Former le tableau initial avec les variables ordinaires, auxiliaires et la variable artificielle et la fonction objective $M = -s$. Utiliser des opérations de rangées afin que la variable artificielle devienne pivot.*
3. *Faire maintenant une méthode de simplex ordinaire.*
4. *Au cas où la solution optimale donne $M < 0$, il n'existe aucune solution faisable avec $s = 0$, donc aucune solution faisable du programme linéaire original. On arrête, car il n'y a aucune solution du tout.*
5. *Au cas où la solution optimale donne $M = 0$, on a trouvé une solution faisable avec $s = 0$. Noter les colonnes avec pivot : ce sont les variables de base désirées.*
6. *Reprendre le tableau du programme original, avec la "vraie" fonction objective. Faire des opérations de rangée pour que les pivots soient dans les colonnes des variables de base désirées, celles indiquées par le tableau final de la première méthode de simplex.*
7. *On a maintenant un tableau de simplex avec toutes les constantes positives. Autrement dit, on a trouvé une solution initiale, c'est-à-dire, un sommet. On peut donc faire une méthode de simplex ordinaire.*

ENTRAÎNEMENT

Exercice 7.16. Solutionner chaque programme linéaire avec la méthode simplex. Ensuite, tracer un graphique afin de repérer les solution intermédiaires et/ou expliquer le résultat de façon géométrique.

1. $\max x_1 + 3x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$
2. $\min -2x_1 + x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$
3. $\max x_1 + 3x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_2 \geq x_1 - 1 \\ x_2 \leq 2x_1 + 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$
4. $\min x_1 + 3x_2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_2 \geq x_1 - 1 \\ x_2 \leq 2x_1 + 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$