INTRODUCTION

Exemple 6.1. Une usine fabrique deux sortes de vélos, X et Y. La main-d'oeuvre est distribuée parmi trois usines, A, B, et C. Les vélos de type X nécessitent 2 heures de travail dans l'usine A, 1 heure dans B et 1 heure dans C. Les vélos de type Y nécessitent 1 heure de travail dans l'usine A, 1 heure dans B et 3 heures dans C. Chaque vélo X remporte $40 de profit et chaque vélo Y remporte $60. Le temps disponible chaque semaine pour fabriquer des vélos est 70 heures dans l'usine A, 40 heures dans B et 90 heures dans C. Combien de vélos de chaque type devrait-on fabriquer afin de maximiser le profit? □

Bien que les chiffres sont peut-être artificiels dans cet exemple, on peut voir un problème général. On cherche à optimiser une certaine fonction (ici, maximiser le profit total). En principe, c'est simple: on augmente la production. Mais on a aussi des contraintes sur les ressources disponibles (ici, des limites sur le nombre d'heures au total).

Avant de passer aux détails, on observe que dans l'exemple 6.1, il y a deux variables: le nombre de vélos de type X et le nombre de type Y. Il y a aussi trois contraintes: chacune des trois usines a une limite sur le nombre d'heures disponible. On pourrait facilement imaginer une situation avec beaucoup plus de variables, et beaucoup plus de contraintes. Donc on ne cherche pas seulement une réponse à l'exemple 6.1, mais une réponse qu'on pourrait généraliser et même automatiser.

On demande plusieurs questions:

- Est-ce que il existe solution optimale?
- Est-ce que la solution optimale est unique?
- Est-ce qu'on peut trouver une solution optimale d'une manière efficace?

PROGRAMMES LINÉAIRES: FORME

On commence en formalisant en peu de notation.

Dans l'exemple 6.1, on identifie deux paramètres qu'on peut modifier: le nombre de vélos de chaque type. Ce sont les variables. Notons x_1 pour le nombre de vélos de type X et x_2 pour le nombre de type Y. Étant donné des valeurs pour x_1 et x_2, le profit est

$$40x_1 + 60x_2$$

On dit que c'est la FONCTION OBJECTIVE, ou parfois l'OBJECTIF.

Il y a aussi trois limites sur les ressources; autrement dit, trois raisons pourquoi on ne peut pas simplement fabriquer une infinité de vélos (pour un profit infini). Ce sont les CONTRAINTES du problème.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 70 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 40 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 90 \end{aligned}$$

C'est souvent utile de présenter l'information en forme matricielle. On écrit alors

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad \text{s.c. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \tag{6.1}$$

Ceci indique qu'on cherche à maximiser la quantité $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$, sujet à la contrainte de $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$. Note que $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ est une quantité (c'est-à-dire un chiffre et non pas un vecteur). Aussi, la notation de "$\leq$" et "$\geq$" s'applique à chaque coordonnée.

Pour l'exemple 6.1, on aurait

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Exercice 6.2. Vérifier que ces matrices donnent vraiment l'objectif et les contraintes de l'exemple 6.1. □

On peut imaginer d'autres variations: min au lieu de max, ou peut-être $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$. Ce serait bien sûr une autre application: par exemple on cherche à minimiser les dépenses du gouvernement sujet à la nécessité de fournir un minimum de services aux citoyens. On pourrait exiger des valeurs négatives pour les variables, ou bien permettre n'importe quelle valeur.

On dit PROGRAMME LINÉAIRE pour un problème qui cherche à optimiser une fonction linéaire sujet à une contrainte linéaire. Donc l'objectif est soit $\max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ou $\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Les contraintes peuvent êtres une combinaison de $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x} \leq 0$ ou $\mathbf{x}$ libre. On dit qu'un programme linéaire de la forme précise de l'équation (6.1) est en FORME CANONIQUE.

Exemple 6.3. Voici quelques exemples de programmes linéaires.

$$\min \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \text{s.c. } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \geq 0$$

$$\max \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \text{s.c. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \geq 0$$

$$\max \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \text{s.c. } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \geq 0$$

□

Exercice 6.4. Pour chaque programme linéaire ci-haut, identifier le nombre de variables; c'est-à-dire, la taille du vecteur $\mathbf{x}$ dans chaque cas. Aussi identifier le nombre de contraintes, et écrire explicitement la fonction objective et chacune des contraintes. □

Bien que l'application serait en forme de maximiser ou minimiser, il n'y a pas de différence fondamental. On peut transformer un programme linéaire pour donner un système équivalent.

Exemple 6.5. Soit le programme linéaire $\min 2x_1 - x_2$ s.c. $x_1 - x_2 \geq 3$, $x_1 + x_2 \leq 4$.

Minimiser $2x_1 - x_2$ équivaut à minimiser la négative, c'est-à-dire minimiser $-2x_1 + x_2$. Aussi, exiger que $x_1 - x_2 \geq 3$ équivaut à exiger que $-x_1 + x_2 \leq -3$. Donc les deux programmes suivants sont équivalents:

$$\min \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{s.c. } \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases} \qquad\qquad \max \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{s.c. } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

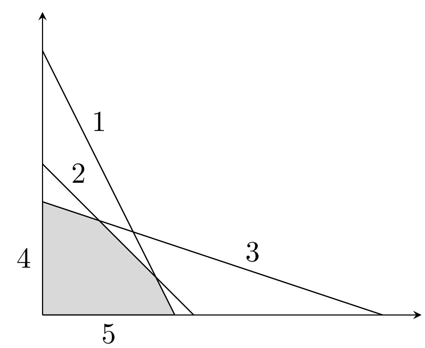
Étant donné un programme linéaire, l'ensemble de toutes les valeurs permissibles des variables donne la RÉGION FAISABLE. Formellement, pour un programme linéaire de la forme équation (6.1), la région faisable est l'ensemble de tout $\mathbf{x}$ avec $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, donc on peut imaginer une représentation graphique — du moins pour $n = 2$! Un point dans la région faisable est dit SOLUTION FAISABLE. C'est une solution au programme linéaire qui n'est peut-être pas optimale, mais du moins légal!

Reprenons l'exemple 6.1. Pour chaque contrainte, on obtient une droite en remplaçant chaque inégalité par une égalité. L'inégalité correspond à l'une ou l'autre côté de la droite: c'est un demi-plan. La région faisable correspond à l'intersection de toutes les demi-plans.

Pour l'exemple 6.1, il y a cinq contraintes: on compte aussi $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ comme contraintes.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 70 \\ 1x_1 + 1x_2 &\leq 40 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 90 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc afin de déterminer la région faisable on aurait cinq droites. Les contraintes sont numérotés dans l'ordre donnée. La région faisable est indiquée en gris.



Exercice 6.6. Déterminer les points d'intersection de chaque pair de droites. Note qu'afin de faire un graphique précis, c'est souvent utile de calculer les interceptes: ce sont les points d'intersection d'une des "vraies" droites avec $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. □

Pour chaque point dans le plan, on pourrait calculer un profit. Par exemple, si $x_1 = -100$ et $x_2 = 20$ on obtient un profit de $40x_1 + 60x_2 = -\$3880$. Mais ce calcul est illusoire, car le point $(-100, 20)$ n'est pas faisable. On peut voir que ce n'est pas faisable de deux façons: soit en le plaçant sur le graphique, ou mieux, en calculant $A\mathbf{x}$ et comparant à $\mathbf{b}$.

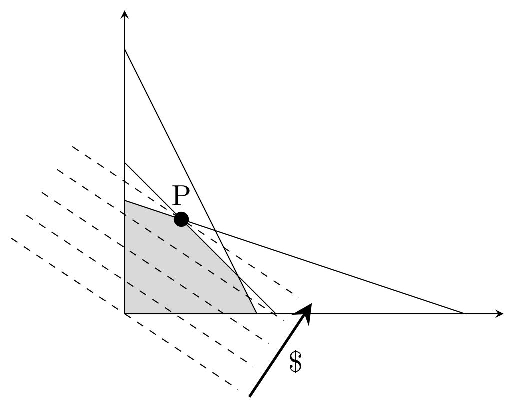
Exercice 6.7. Pour chaque point donné, déterminer le profit correspondant. Lesquelles sont des solutions faisables? En comparant les profits à chaque point, déterminé lesquels ne sont *pas* optimales.

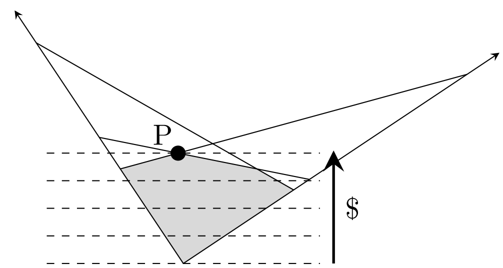
Points: $(-20, 100)$, $(0, 0)$, $(10, 10)$, $(15, 15)$, $(30, 0)$, $(0, 25)$. □

On peut solutionner un programme linéaire graphiquement, en suivant la tendance de la fonction objective sur la région faisable. On identifie les surfaces de valeur constant de l'objectif.

Soit $M = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ la valeur de l'objective. On trace une série de courbes correspondant à des valeurs croissantes de M, afin d'identifier le point optimale dans la région faisable.

Exemple 6.8. Pour l'exemple 6.1, on a comme départ $40x_1 + 60x_2 = 0$: c'est une droite passant par l'origine. En traçant une série de droites de la forme $40x_1 + 60x_2 = M$ pour divers valeurs de M, on déduit que la direction de croissance est exactement normale à cette droite, c'est-à-dire, dans la direction $(40, 60)$. La flèche "\$" indique la direction de croissance du profit. C'est indiqué dans le graphique à gauche. C'est peut-être utile de faire une rotation, comme à droite.





On trouve que la solution optimale se trouve au point $P = (15, 25)$. On y retrouve un profit de $40(15) + 60(25) = \$2100$. □

Exercice 6.9. Pour chaque programme linéaire de l'exemple 6.3, faire un graphique de la région faisable. Déterminer la direction de croissance de la fonction objective. Tenter de solutionner en suivant la direction de croissance de la fonction objective. Que remarquez-vous pour chaque programme? □

SOLUTION ANALYTIQUE: SOMMETS

La solution graphique de l'exemple 6.1 est raisonnable. La difficulté est que le nombre de dimensions est en générale égale au nombre de variables.

Une contrainte linéaire donne en général un *hyperplan*: une surface de $n-1$ dimensions. Donc en $\mathbb{R}^2$, on a des droites comme on a vu. En $\mathbb{R}^3$ les contraintes donnent des plans. De même avec les surfaces d'objectif constant: on a une série de plans parallèles en $\mathbb{R}^3$.

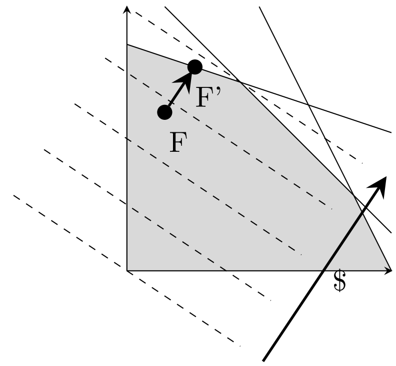
L'idée de la solution graphique reste valide, donc on s'inspire pour développer quelques idées.

On observe que la solution optimale s'est produit à un sommet, c'est-à-dire l'intersection de deux droites. En générale, un sommet est l'intersection de n hyperplans en $\mathbb{R}^n$: donc deux droites en $\mathbb{R}^n$, trois plans en $\mathbb{R}^3$, etc[1]

Proposition 6.10. *Si un programme linéaire possède une solution optimale, alors, parmi toutes les solutions optimales d'un programme linéaire, on peut trouver une solution optimale à un sommet.* □

[1] On exige de plus que les hyperplans sont en POSITION GÉNÉRALE, ou autrement dit, indépendants. Donc on ne considère pas l'intersection de deux droites parallèles, ni de trois plans qui partageant une droite, etc.

Preuve. Voici une idée de la preuve. Considérons un point F strictement à l'intérieur de la région faisable d'un programme linéaire. Puisque c'est strictement à l'intérieur, on pourra déplacer F dans la direction de croissance de l'objectif pour obtenir le point faisable F'. Donc F n'est pas une solution optimale, car le point F' est meilleur.



On conclut que les points intérieurs ne sont jamais optimales. En allant vers F' on atteint une des contraintes. Dans cet exemple, la contrainte atteinte n'est pas parallèle aux droites de valeur constant de l'objectif, donc on peut continuer à augmenter jusqu'au sommet P. Si la contrainte aurait été parallèle, on aurait pu continuer à gauche ou à droite en conservant l'objectif, donc on aurait trouvé un sommet ayant la même valeur objective que F'. □

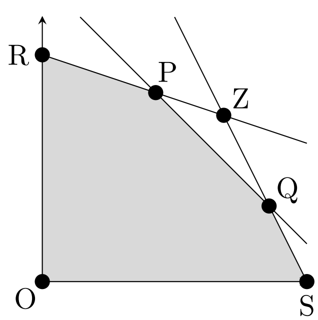
On a donc l'algorithme suivant pour solutionner un programme linéaire.

Algorithme 6.11. *Soit un programme linéaire qui possède une solution optimale. On peut la trouver comme suit.*

1. *Déterminer tous les sommets.*
2. *Évaluer la fonction objective à chaque sommet.*
3. *Choisir une des sommets qui donne la valeur optimale.* □

En $\mathbb{R}^2$, un sommet est l'intersection de deux droites qui est aussi un point faisable. Donc on calcule l'intersection de chaque paire de droites et on élimine les points non-faisables.

Exemple 6.12. On retourne à l'exemple 6.1. On identifie les sommets: P, Q, R et S. Le point Z est l'intersection de deux contraintes, mais ce n'est pas un sommet car ce n'est pas faisable. On calcul l'objectif à chaque sommet, et on voit que P est optimale parmi les sommets, donc c'est une solution optimale du programme linéaire.



point	coord.	objectif
P	$(15, 25)$	\$2100
Q	$(30, 10)$	\$1800
R	$(0, 30)$	\$1800
S	$(35, 0)$	\$1400
O	$(0, 0)$	\$0
Z	$(24, 22)$	pas un sommet

□

Exercice 6.13. Vérifier les coordonnées des point P, Q, R, S, et Z, ainsi que les calculs de l'objectifs à chacun. Aussi, vérifier que Z n'est pas dans la région faisable en vérifiant les contraintes $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ pour $\mathbf{x} = Z$. □

Exercice 6.14. Solutionner chaque programme linéaire de l'exemple 6.3 en utilisant l'algorithme 6.11. Comparer avec vos résultats de l'exercice 6.9. Que remarquez-vous pour chaque programme? □

DIFFICULTÉS

Solutionner un programme linéaire en suivant algorithme 6.11 est meilleur que faire un graphique, mais il reste encore des difficultés. En $\mathbb{R}^2$, on voit que la région faisable est un polygone, donc il y a au plus p sommets, où p représente le nombre de contraintes. En $\mathbb{R}^n$, le nombre de sommets peut être exponentiel: même faire une liste est quasi-impossible. Il nous faut une méthode qui ne considère pas *chaque* sommet, mais plutôt une méthode qui *choisit* un sommet optimale.

Il y a une autre difficulté: afin d'appliquer l'algorithme 6.11, il faut savoir qu'il y a une solution optimale. Il faudrait donc détecter ceci.

Vous avez déjà vu un exemple d'un programme linéaire qui n'a pas de solution optimale parmi exemple 6.3. Cette situation correspond à une région faisable qui n'est pas borné dans la direction de croissance de l'objective.

Vous avez aussi vu un exemple d'un programme linéaire qui n'a pas de solution unique. En générale, l'ensemble des solutions optimales est soit un point (unique!), un segment de droite, un segment d'un plan, etc.