INTRODUCTION

Une équation de récurrence est un peu comme un système dynamique. Mais au lieu d'avoir *plusieurs* variables qui dépendent de leurs valeurs à *une* étape précédente, on a *une* variable qui dépend de *plusieurs* étapes précédentes.

Une récurrence serait de la forme générale serait de la forme

$$f_k = \alpha_1 f_{k-1} + \alpha_2 f_{k-2} + \cdot + \alpha_n f_{k-n}$$

On dit que L'ORDRE de la récurrence est la différence maximale des indices: ici c'est n, car on a f_k en termes des n valeurs précédentes. Pour calculer f_k il faut connaître n valeurs précédentes.

Exemple 4.1. La population mondial est environ $6,8$ milliards, et à augmenté de environ 1.1% depuis l'année dernière. Si on présume que cette augmentation continue, on a le modèle suivant:

$$p_k = 1.011 p_{k-1} \qquad\qquad p_0 = 6,8$$

Ceci est un système dynamique avec une seule population. C'est aussi une récurrence d'ordre 1. □

SOLUTION MATRICIELLE

Exemple 4.2. Les nombres de Fibonacci sont obtenu par récurrence $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$, avec $f_0 = 1$ et $f_1 = 1$. Donc on obtient

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots$$

C'est une récurrence d'ordre 2. □

On pose deux questions: Comment calculer $f_{1000000}$ directement, c'est-à-dire sans devoir calculer toutes les valeurs intermédiaires? Que peut-on dire sur la tendance éventuelle de f_n?

La solution est essentiellement la même que ce qu'on a fait pour un système dynamique, mais il faut reformuler le problème. On pose

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{bmatrix}$$

et on cherche une matrice A tel que $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$ (c'est la même chose que $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, mais la forme présente sera plus claire ici).

$$\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k-1} \\ f_{k-2} \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f_k = a_{11} f_{k-1} + a_{12} f_{k-2} \\ f_{k-1} = a_{21} f_{k-1} + a_{22} f_{k-2} \end{cases}$$

La première équation suggère de prendre $a_{11} = 1$ et $a_{12} = 1$ pour donner $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$. Que faire de la deuxième? Afin d'avoir $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$ il faut que cette deuxième équation soit valide, mais on a déjà la récurrence, donc il nous faut rien de plus. La solution c'est d'ajouter une équation vraie mais redondante: $f_{k-1} = f_{k-1}$, ce qui s'accompli en mettant $a_{21} = 1$ et $a_{22} = 0$. Donc

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1}$$

Comme système algébrique, c'est exactement pareil à un système dynamique a deux variables. La seule différence est *l'interprétation* du vecteur des "populations". On le résout de la même manière, en calculant les valeurs et vecteurs propres.

Exercice 4.3. Monter que les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sont $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, avec vecteurs propres $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. □

Exercice 4.4. Montrer que le vecteur $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ peut s'écrire comme $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_2$. □

Sachant ceci, on peut écrire la solution générale pour $\mathbf{x}_k$. Un détail: on ne commence pas avec $\mathbf{x}_0$, mais plutôt avec $\mathbf{x}_1$. C'est parce que $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$ mais $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_{-1} \end{bmatrix}$. Donc on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= A^{k-1}\mathbf{x}_1 \\ &= A^{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1)^{k-1}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_2)^{k-1}\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

En termes des nombres f_k on obtient

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \iff &\begin{cases} f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1} \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k} \\ f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient deux fois la même relation. Ce n'est pas surprenant, car f_{k-1} et f_k ne sont pas deux populations différentes, mais la même population à deux intervalles successifs. Aussi, on a construit l'équation matricielle en ajoutant une équation redondante: on n'est pas surpris d'en recevoir dans la réponse une équation redondante aussi.

On a donc une formule exacte pour f_k, sans devoir calculer les valeurs intermédiaires. On se rappelle que f_k est toujours un entier positif. Ceci n'est pas évident dans la formule exacte. Pourtant, toutes les $\sqrt{5}$ s'annulent dans le calcul de f_k. Même si on ne cherche à calculer que des suites d'entiers, on entraîne des nombres irrationnels. Parfois, on entraîne même le calcul avec des nombres complexes (par exemple, si la matrice possède des valeurs propres complexes). Ceci se produit pour des applications très concrets et réelles.

On a aussi une approximation, car une des valeurs propres est plus grande que l'autre ($\lambda_1 \approx 1,618$ et $\lambda_2 \approx -0,618$). Donc pour k "grand" on a

$$f_k \approx e_k \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$$

L'approximation e_k n'est certainement pas un entier. On compare:

f_k :	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
e_k :	0.45	0.72	1.17	1.89	3.07	4.96	8.02	12.98	21.01	33.99

GÉNÉRALE

En générale, la même méthode s'applique. On commence avec une récurrence d'ordre n.

$$f_k = \alpha_1 f_{k-1} + \alpha_2 f_{k-2} + \cdots + \alpha_n f_{k-n}$$

On définie un vecteur (de taille n):

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \\ \vdots \\ f_{k-n} \end{bmatrix}$$

et on cherche une matrice A tel que $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$. La première rangée de cette équation matricielle est exactement la récurrence, à laquelle on ajoute $n-1$ équations redondantes: $f_{k-1} = f_{k-1}$, $f_{k-2} = f_{k-2}$, ..., $f_{k-n} = f_{k-n}$. Ceci donne la matrice (de taille $n \times n$) :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On mentionne un résultat théorique utile ici. La matrice A a une forme spéciale: la première rangée contient la récurrence, et en bas on a une matrice identité et une colonne de zéros. On peut montrer que le polynôme caractéristique de A est

$$x^n - \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots + \alpha_n x^0$$

On pourrait combiner un système dynamique avec une récurrence.

Exemple 4.5. On considère deux populations, qui dépendent de deux temps précédentes.

$$c_k = 0.2c_{k-1} + 0.4c_{k-2} + 0.3r_{k-1} r_k = -0,104c_{k-1} + 0.8r_{k-1} + 0.3r_{k-2}$$

On aura un vecteur

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} c_k \\ c_{k-1} \\ r_k \\ r_{k-1} \end{bmatrix}$$

et une matrice A tel que $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}\ldots$ □