UN EXEMPLE

Considérons un exemple simple qui modèle une population de chouettes en termes d'adultes et de jeunes. On notera a_k le nombre d'adultes au temps k et b_k ("bébés") le nombre de jeunes au temps k. Supposons qu'à chaque année la moitié des adultes survivent et le quart des jeunes survivent (pour devenir adulte!). De plus, chaque adulte produit en moyenne deux jeunes chaque année. On a donc les équations suivantes:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 0,5a_k + 0,25b_k \\ b_{k+1} &= 2a_k \end{aligned}$$

On a donc une équation matricielle.

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

Ceci permet de calculer systématiquement les vecteurs de populations, sachant la population initiale (qu'on notera typiquement comme $\mathbf{x}_0$. À titre d'exemple si $\mathbf{x}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 100 \\ 40 \end{smallmatrix}\right]$ on calcul:

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 200 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 70 \\ 160 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 75 \\ 150 \end{bmatrix}$$

On observe deux choses.

- Il semble que $\mathbf{x}_k$ converge, c'est-à-dire, que lorsque k devient grand les populations se stabilisent.
- Il semble avoir une oscillation.

On découvra que la théorie des valeurs et vecteurs propres est très pertinent ici.

ANALYSE

Exercice 2.1. Montrer que les valeurs et vecteurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -0,5$ et $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,25 \\ 1 \end{bmatrix}$. Montrer de plus que A est diagonalisable, et l'écrire comme $A = PDP^{-1}$.

On observe que les populations au temps k peuvent se calculer avec une puissance matricielle: $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$. En appliquant la théorie de diagonalisation on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = (PDP^{-1})^k\mathbf{x}_0 = PD^kP^{-1}\mathbf{x}_0 & \\
&= \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0 \\
&= \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-0,5)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0 \\
&\approx \begin{bmatrix} 0,5 & -0,25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha
\end{aligned}$$

□

On pourrait calculer le vecteur $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$ comme $P^{-1}\mathbf{x}_0$. Mais l'important est que si k est "grand" alors $\mathbf{x}_k$ est une constante (α) fois un vecteur propre. Ceci explique la convergence numérique.

Puisque A est diagonalisable, l'ensemble des bases propres forme une base pour tout l'espace $\mathbb{R}^2$. Autrement dit on peut exprimer n'importe quel vecteur en termes de cette base.

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \tag{2.1}$$

Exercice 2.2. Montrer que $c_1 = \alpha$ et $c_2 = \beta$. En autre mots, que $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}_0$. □

Prenons par exemple que $\mathbf{x}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 100 \\ 40 \end{smallmatrix}\right]$. L'équation (2.1) devient

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -0,25 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 0,5c_1 - 0,25c_2 = 100 \\ c_1 + c_2 = 40 \end{cases}$$

On solutionne ce système à l'aide de la réduction de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,5 & 0,25 & 100 \\ 2 & 0 & 40 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 440/3 \\ 0 & 1 & -320/3 \end{array}\right]$$

On obtient alors $\mathbf{x}_0 = 440/3\mathbf{v}_1 - 320/3\mathbf{v}_2$. (Si vous avez le moindre difficulté à comprendre d'où vient cette équation, ce serait le moment de faire une révision.)

On se rappelle la relation fondamentale de vecteur et valeur propre. Si $\mathbf{v}$ est vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ alors $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 &= A^k(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) \\
&= c_1A^k\mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 \\
&= c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k\mathbf{v}_2 \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Dans notre cas on voit que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} &= 440/3 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} + (-0,5)^k \begin{bmatrix} -0,25 \end{bmatrix} \\
&\approx 440/3 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On voit encore la convergence, mais aussi l'oscillation. Le terme dominant, correspondant à la valeur propre dominante, donne la tendance éventuelle. La deuxième valeur propre étant inférieure en valeur absolue disparaît éventuellement. L'oscillation se voit dans le fait que la deuxième valeur propre est négative.

PROIE-PRÉDATEUR

Le même format peut servir de modéliser la prédation entre deux espèces, eg, chouettes et rats. Ici C_k mesure le nombre de chouettes et R_k mesure le nombre de rats en milliers.

$$C_{k+1} = 0,5C_k + 0,4R_k$$
$$R_{k+1} = -0,104C_k + 1,1R_k$$

Le $0,5$ et le $1,1$ indique la croissance des espèces en isolation. Les chouettes disparaissent sans nourriture tandis que les rats augmentent sans prédateurs. Les deux autre chiffres mesurent la conséquence de la prédation: positif pour les chouettes et négatif pour les rats. On a donc la matrice d'étape

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Un calcul routine donne les valeurs et vecteurs propres.

Exercice 2.3. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de la matrice d'étape.

On obtient, comme on a fait à l'équation (2.2), une formule pour le vecteur des populations.

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ R_k \end{bmatrix} = c_1(1,02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2(0,58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Les chiffres c_1 et c_2 dépendent des populations initiales. Plus précisément, sachant $\mathbf{x}_0$ on les obtient en solutionnant le système:

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par contre, sans savoir les populations initiales, on peut décrire la tendance éventuelle.

Si $c_1 \neq 0$ dans l'équation (2.3), alors le premier terme domine éventuellement, car le $(0,58)^k$ tend vers zéro. Donc dans ce cas, on aura éventuellement une croissance des deux espèces, avec un rapport d'environ 10 chouettes pour 13000 rats.

Si $c_1 = 0$ alors le premier terme est zéro. La tendance éventuelle sera donné par le deuxième terme, qui diminue vers zéro à cause du $(0,58)^k$. Donc les deux espèces disparaîtront. Mais ce cas est, dans un sens pratique, impossible. Avoir $c_1 = 0$ veut dire que le vecteur des populations initiales est un multiple de $\mathbf{v}_2$: donc exactement 5 chouettes pour 1000 rats.

TRAJECTOIRES

On voit que la tendance éventuelle qualitative dépend des valeurs propres. Posons λ_1 la plus grande valeur propre (en valeur absolue). Présumons que la multiplicité de λ_1 est 1 et que tout autre valeur propre est strictement inférieure à λ_1 en valeur absolue. Alors en générale on aura

$$\mathbf{x}_0 = c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 + c_1(\lambda_2)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n(\lambda_n)^k\mathbf{v}_n \tag{2.4}$$
$$\approx c_1(\lambda_1)^k\mathbf{v}_1 \tag{2.5}$$

On a une formule exacte et une approximation simple. L'approximation est valide car en élevant les valeurs propres à des grandes puissances, le premier domine.

Exercice 2.4. Que change dans l'équation (2.5) si la multiplicité de λ_1 est plus que 1? Qu'arrive s'il existe d'autre valeurs propres qui sont égales en valeur absolue à λ_1 (par exemple, $\lambda_1 = 1.2$ et $\lambda_2 = -1.2$)? $\square$

Le TRAJECTOIRE est la suite des vecteurs $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$, où chaque vecteur est obtenu en multipliant son prédécesseur par A. En deux dimensions (c'est-à-dire un modèle qui décrit deux populations) on peut représenter cette suite graphiquement. (Voir aussi la section 5.6 du manuel de cours). On verra ceci en détail au tableau en classe.

Exemple 2.5. Soit un système dynamique modélisant deux populations, avec valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$.

La valeur propre dominante est plus grande que 1, donc les populations augmentent toujours. L'origine est un point de répulsion. Les deux valeurs propres sont positives, donc il n'y aura aucune oscillation. $\square$

Exemple 2.6. Soit un système dynamique modélisant deux populations, avec valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $-1 < \lambda_2 < 0$.

La valeur propre dominante est égale à un, donc les populations se stabiliseront éventuellement. La deuxième valeur propre est négative, qui donnera une oscillation, mais une oscillation qui diminuera car elle est inférieure à un en valeur absolue. $\square$

Exemple 2.7. Soit un système dynamique modélisant deux populations, avec valeurs propres $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$.

Toutes les valeurs propres sont inférieures à un, donc les populations diminueront vers zéro peut importe les populations initiales. L'origine est un point d'attraction. $\square$

Exemple 2.8. Soit un système dynamique modélisant deux populations, avec valeurs propres $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$.

Dans la direction du vecteur propre $\mathbf{v}_1$ l'origine paraît être un point d'attraction, car $\lambda_1 > 1$. Dans la direction du vecteur propre $\mathbf{v}_2$ l'origine paraît être un point de répulsion, car $\lambda_2 < 1$. Note que dans n'importe quelle autre direction, l'origine ressemble plutôt à un point de répulsion, car c'est la plus grande valeur propre qui domine. Donc un point de selle se comporte plus comme point de répulsion. $\square$

STABILITÉ EN DEUX DIMENSIONS

Un modèle général de proie-prédateur en deux dimensions possède une matrice d'étape

$$A = \begin{bmatrix} r & q \\ -p & s \end{bmatrix}$$

avec $0 < r < 1$ et $s > 1$ (car en absence de proie le prédateur disparaît en absence de prédateur le proie augmente) et $p, q > 1$. On trouve que les valeurs propres de A sont

$$\lambda = \frac{(r+s) \pm \sqrt{(r+s)^2 - 4(rs+pq)}}{2}$$

Afin d'avoir la stabilité éventuelle, on voudra que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_2| < 1$. En posant $\lambda_1 = 1$ on obtient

$$\frac{(r+s) + \sqrt{(r+s)^2 - 4(rs+pq)}}{2} = 1$$
$$\begin{aligned} r+s &= 2 - \sqrt{(r+s)^2 - 4(rs+pq)} \\ r+s &\leq 2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

et aussi

$$\begin{aligned} r+s &= 2 - \sqrt{(r+s)^2 - 4(rs+pq)} \\ (r+s-2)^2 &= (r+s)^2 - 4(rs+pq) \\ -(r+s)+1 &= -rs - pq \\ pq &= (1-r)(s-1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Note que l'équation (2.7) implique que le discriminant est positif:

$$\begin{aligned} (r+s)^2 - 4(rs+pq) &= (r+s)^2 - 4(rs + (1-r)(s-1)) \\ &= (r+s)^2 - 4(r+s) + 4 \\ &= (r+s-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc un système proie-prédateur donnera une stabilité éventuelle si

$$\begin{aligned} &0 < r < 1, \quad s > 1, \quad p > 0, \quad q > 0 \\ &r + s \leq 2 \\ &pq = (1-r)(s-1) \end{aligned}$$

Ce genre d'analyse devient plus difficile en $n > 2$ dimensions.