

INTRODUCTION

On a vu comment optimiser une fonction linéaire sujet à des contraintes linéaires: les programmes linéaires et la méthode de simplex.

La solution des systèmes approximatifs est aussi une optimisation. Il s'agit de minimiser $\|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|^2$ sujet à la contrainte que $\hat{\mathbf{b}} \in \text{col}(A)$. C'est une fonction objective quadratique et une contrainte linéaire.

On étudiera comment optimiser une fonction quadratique sujet à une contrainte quadratique.

FORMES QUADRATIQUES

Une FORME QUADRATIQUE est un polynôme en plusieurs variables, dont chaque terme est de degré deux.

Exemple 11.1. Voici trois exemples de formes quadratiques.

$$x_1^2 + x_2^2 \qquad x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \quad \square$$

Les formes quadratiques s'écrivent naturellement en matrices. Posons $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, un vecteur des variables et A une matrice $n \times n$. Alors:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Par exemple $[x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2$: la forme $x_1^2 + x_2^2$ correspond à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ici, la matrice est unique; en général on a un peu de choix.

Exercice 11.2. Vérifier que $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ si $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ et A est n'importe quel des matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Combien d'autres matrices sont possibles (indice: beaucoup!). □

Pour des raisons qu'on verra très bientôt, on préfère toujours la matrice symétrique. On dit que la MATRICE D'UNE FORME QUADRATIQUE sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n est la matrice de taille $n \times n$ tel que la position A_{ii} de la matrice est le coefficient de x_i^2 , et la position A_{ij} de la matrice est la moitié du coefficient de $x_i x_j$ (pour $i \neq j$).

Exercice 11.3. Donner la matrice (symétrique, bien sur!) pour chaque forme:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 \qquad 4x_1^2 + 6x_2x_3 \qquad -4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2 \quad \square$$

Exercice 11.4. Donner les formes quadratiques qui correspondent aux matrices suivantes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

□

MATRICES SYMÉTRIQUES

Pourquoi choisir une matrice symétrique pour une forme quadratique? À cause du résultat suivant.

Théorème 11.5. *Soit A une matrice symétrique. Alors A est diagonalizable.* □

On se rappelle qu'une matrice est diagonalizable si et seulement si la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

Il y a une autre raison.

Théorème 11.6. *Soit A une matrice symétrique, avec \mathbf{v} et \mathbf{w} des vecteurs propres avec valeurs propres distinctes λ et μ . Alors \mathbf{v} et \mathbf{w} sont orthogonales.*

Preuve. Vérifier les étapes suivants. C'est utile de commencer au centre et de procéder à gauche et à droite.

$$\mu \mathbf{w}^T \mathbf{v} = (\mathbf{w}^T A^T) \mathbf{v} = \mathbf{w}^T A^T \mathbf{v} = \mathbf{w}^T A \mathbf{v} = \mathbf{w}^T (A \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{w}^T \mathbf{v}$$

Donc $\mu \mathbf{w}^T \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}^T \mathbf{v}$. Puisque $\mu \neq \lambda$ il faut que $\mathbf{w}^T \mathbf{v} = 0$. □

La conséquence est importante: les différents espaces propres sont automatiquement orthogonaux. On peut transformer chaque base propre à une base propre orthogonale avec Gram-Schmidt. Donc on obtient le résultat suivant.

Théorème 11.7. *Soit A une matrice symétrique. Alors $A = PDP^T$ pour une matrice diagonale D et une matrice P avec $P^{-1} = P^T$.* □

C'est en combinant les deux résultats précédents. On obtient une diagonalisation comme d'habitude. Ensuite on applique Gram-Schmidt à chaque espace propre, et on normalise les vecteurs propres obtenus, ce qui donne une base orthonormale. La matrice P alors est automatiquement tel que $P^{-1} = P^T$. C'est utile de voir qu'il y a peu de nouveau ici en pratique: les valeurs propres et les bases propres s'obtiennent comme d'habitude. On est garanti que les espaces sont déjà orthogonaux entre eux, donc il ne faudrait faire Gram-Schmidt que *dans* chaque base propre (et non pas à tout l'ensemble).

Exemple 11.8. Trouver une décomposition $A = PDP^T$ pour $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

On cherche les valeurs propres en factorisant le polynôme caractéristique.

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

Ensuite on trouve une base pour chaque espace propre.

$$\begin{aligned} \lambda = 4 : \quad A - (4)I &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{base pour } E_4: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \lambda = 1 : \quad A - (2)I &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{base pour } E_4: \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

La dimension de chaque espace propre est un (on savait ceci avant de calculer les espaces propres: pourquoi?). Donc chaque base propre est déjà une base orthogonale. Il ne faut que normaliser, c'est-à-dire diviser chaque vecteur par sa longueur (ici, $\sqrt{2}$). Les deux vecteurs forment les colonnes de P , et les deux valeurs propres forment les éléments diagonales de D .

$$\begin{aligned} A = PDP^T &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Exercice 11.9. Vérifier que les deux espaces propres sont orthogonaux dans l'exemple précédent. C'est-à-dire, vérifier que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux. C'est l'orthogonalité *entre* les deux espaces.

Expliquer pourquoi les deux bases sont chacune déjà des bases orthogonales. C'est l'orthogonalité *dans* chaque espace. \square

Exemple 11.10. Les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ sont $\lambda = -2$ de multiplicité un et $\lambda = 7$ de multiplicité deux. Trouver une décomposition $A = PDP^T$.

$$\begin{aligned} \lambda = -2 : \quad A - (-2)I &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{base pour } E_{-2}: \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \\ \lambda = 7 : \quad A - (7)I &= \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{base pour } E_7: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Comme prévue, la dimension est égale à la multiplicité chaque fois. Aussi on voit que chaque vecteur dans la base de E_{-2} est orthogonale à chaque vecteur dans la base de E_7 . Il faut appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la base pour E_7 .

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{proj}_{\mathbf{u}_1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Il faut normaliser les deux vecteur \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 pour obtenir une base orthonormale de E_7 .

$$\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 11.11. Vérifier que dans l'exemple précédent, chaque vecteur dans la base de E_{-2} est orthogonale à chaque vecteur dans la base de E_7 . \square

OPTIMISATION QUADRATIQUE

On applique la théorie des matrices symétriques pour optimiser des formes quadratiques. On commence avec un théorème qui semble trop précis.

Théorème 11.12. *Soit A une matrice symétrique. Alors le maximum de $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ sujet à la contrainte que $\|\mathbf{x}\| \geq 1$ est la valeur propre maximale de A . Ce maximum est atteint lorsque \mathbf{x} est un vecteur propre correspondant.*

Preuve. Puisque A est symétrique, on peut trouver une base orthogonale pour \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A : disons $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, avec valeurs propres correspondantes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. On peut alors écrire \mathbf{x} comme $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$. Ceci donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T A (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) \\ &= \mathbf{x}^T (\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n) \\ &= (\alpha_1 \mathbf{v}_1^T + \alpha_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n^T) (\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n) \\ &= \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n \\ &\leq \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_1^2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_1 \\ &= \lambda_1 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) \\ &= \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \\ &\leq \lambda_1 \end{aligned}$$

Note que dans la multiplication des deux grandes parenthèses, on a utilisé le fait que $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1$ et $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$ si $i \neq j$. C'est parce que c'est une base orthonormale.

Si on a $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_1$, c'est que les deux " \leq " sont des " $=$ ". Il faudrait avoir \mathbf{x} un vecteur propre de λ_1 avec $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Note que même si la condition est $\|\mathbf{x}\| \leq 1$, le maximum se produit sur un vecteur \mathbf{x} avec $\|\mathbf{x}\| = 1$. Le maximum se trouve sur la "borne" de la région faisable. C'est l'analogie du résultat qui dit qu'un programme linéaire atteint son maximum sur un sommet. \square

Il y a un résultat similaire pour minimiser.

Théorème 11.13. *Soit A une matrice symétrique. Alors le minimum de $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ sujet à la contrainte que $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ est la valeur propre minimale de A . Ce minimum est atteint lorsque \mathbf{x} est un vecteur propre correspondant.* \square

Exemple 11.14. Quel est le maximum de $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, sujet à la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$?

On met $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Note que $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, et donc la condition équivaut à $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, ce qui équivaut à $\|\mathbf{x}\| = 1$. On cherche donc:

$$\max \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \quad \text{s.c.} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Selon le théorème, le maximum est la valeur maximale de A , qui est $(5 + \sqrt{5})/2$. Cette valeur est atteinte si le vecteur \mathbf{x} est vecteur propre correspondant à cette valeur propre. \square

Comment maximiser des formes quadratiques selon des contraintes *arbitraires*?

Exemple 11.15. Quel est le maximum de x_1x_2 selon la contrainte $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \leq 4$?

On écrit la fonction objective et la contrainte en forme matricielle.

$$\max \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq 4 \quad \square$$

On a transformé le problème en problème matriciel. On voudrait que la réponse soit la valeur propre maximale de la fonction objective, mais ceci n'est valide que lorsque la contrainte est en forme standard. Donc on tente de récrire la contrainte.

Exemple 11.16. Effectuer un changement de variable pour transformer $\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 4$ en forme sans terme "rectangle": c'est-à-dire, en forme avec une matrice diagonale.

Premièrement, on obtient une décomposition PDP^T de la matrice. C'est toujours possible, car on a une matrice symétrique. On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} &= 4 \\ \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \mathbf{x} &= 4 \end{aligned}$$

Si on met $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$, on obtient la forme $\mathbf{y}^T \begin{bmatrix} 4 & \\ & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} = 4$, ou $4y_1^2 + 2y_2^2 = 4$. \square

C'est une forme plus simple, mais on peut faire mieux, en transformant la contrainte à la forme standard $z_1^2 + z_2^2 = 1$.

Exemple 11.17. Effectuer un changement de variable pour transformer $4y_1^2 + 2y_2^2 = 4$ à la forme $z_1^2 + z_2^2 = 1$.

$$4y_1^2 + 2y_2^2 = 4 \quad \longrightarrow \quad y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} = 1 \quad \longrightarrow \quad z_1^2 + z_2^2 = 1$$

où $z_1 = y_1$ et $z_2 = y_2/\sqrt{2}$. C'est un changement de variable qui renormalise seulement. \square

La stratégie de maximiser les formes quadratiques est donc de transformer la contrainte en forme standard, et de considérer alors la fonction objective transformée en forme matricielle.

Algorithme 11.18. On cherche à optimiser une forme quadratique selon une contrainte quadratique, donc

$$\max \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = k$$

1. On obtient une décomposition $A = PDP^T$. La contrainte devient $\mathbf{y}^T D \mathbf{y} = k$ avec $\mathbf{y} = P^T \mathbf{x}$, ou $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$.
2. Cette forme équivaut à $\frac{\lambda_1}{k} y_1^2 + \dots + \frac{\lambda_n}{k} y_n^2$.
3. On renormalise les variables \mathbf{y} pour donner $z_1^2 + \dots + z_n^2 = 1$, à l'aide de la transformation $z_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{k}} y_j$, ou $y_j = \sqrt{\frac{k}{\lambda_j}} z_j$.
4. On écrit la forme objective $\mathbf{x}^T M \mathbf{x}$ en termes de \mathbf{z} , et en forme matricielle, obtenant alors $\mathbf{z}^T N \mathbf{z}$.
5. La valeur maximale de la fonction objective est la valeur propre maximale de N ; la valeur minimale de la fonction objective est la valeur propre minimale de N . \square

Note que en pratique, on n'a pas besoin de connaître la matrice M . Il n'y a aucune raison d'écrire la fonction objective originale en forme matricielle, c'est plutôt la fonction objective transformée qu'on devrait écrire en forme matricielle.

Exemple 11.19. Quel est le maximum de x_1x_2 selon la contrainte $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 \leq 4$?

L'approche est donc de transformer la contrainte en forme standard. On a déjà fait le travail: voici le résumé.

$$\begin{aligned}
 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 &= 4 \\
 \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} &= 4 \\
 \mathbf{y} \begin{bmatrix} 4 & \\ & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} &= 4 & \text{avec } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{y} \\
 y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} &= 1 & \text{avec } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{y} \\
 z_1^2 + z_2^2 &= 1 & \text{avec } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{y}, \text{ et } \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \sqrt{2}z_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La transformation de variable qui "standardise" la contrainte est alors:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \sqrt{2}z_2 \end{bmatrix} \\
 \text{ou } \begin{cases} x_1 = z_1/\sqrt{2} - z_2 \\ x_2 = z_1/\sqrt{2} + z_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le problème est donc

$$\begin{aligned}
 \max (x_1x_2) \quad \text{s.c. } 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 &\leq 4 \\
 \max (z_1/\sqrt{2} - z_2) (z_1/\sqrt{2} + z_2) \quad \text{s.c. } z_1^2 + z_2^2 &= 1 \\
 \max (z_1^2/2 - z_2^2) \quad \text{s.c. } z_1^2 + z_2^2 &= 1 \\
 \max \mathbf{z}^T \begin{bmatrix} 1/2 & \\ & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad \text{s.c. } \|\mathbf{z}\| = 1
 \end{aligned}$$

Puisque la contrainte est en forme standard, le maximum de la forme quadratique est la valeur propre maximale de la matrice de la fonction objective. Donc, le maximum est $1/2$. Ce maximum se produit lorsque \mathbf{z} est vecteur propre normalisé de $\lambda = 1/2$, donc $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, donc $x_1 = 1/\sqrt{2} - 0 = 1/\sqrt{2}$ et $x_2 = 1/\sqrt{2} + 0 = 1/\sqrt{2}$. \square