MOTIVATION: SYSTÈMES ITÉRATIFS

Considérons un exemple (simplifié!) d'une maladie: chaque mois une personne en bonne santé a une chance de 3% de tomber malade, et une personne atteinte a une chance de 5% de se guérir. Décrire la situation éventuelle.

Ce modèle divise la population en deux, donc on prend la population comme un vecteur de taille deux: $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$, où a représente le nombre de personnes en bonne santé et b le nombre de malades. Le processus se résume à l'aide d'une matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0,97 & 0,05 \\ 0,03 & 0,95 \end{bmatrix}$$

On a donc $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, où $\mathbf{x}_k$ représente la population après k mois.

Que veut dire "la situation éventuelle"? C'est que éventuellement on aura $\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{x}_k$. Ceci donne que $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}_k$. C'est une relation de valeur et vecteur propre.

L'exemple est simple mais les idées se généralisent.

DÉFINITIONS

Soit une matrice A, carré, de taille $n \times n$. Soit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un vecteur de taille n et λ un chiffre. Si

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

alors on dit que λ est VALEUR PROPRE de A et que $\mathbf{x}$ est un VECTEUR PROPRE correspondant. C'est important que $\mathbf{x}$ soit non-nul: si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alors $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ pour *toute* valeur λ, qui n'est pas une situation intéressante.

Étant donné une matrice et un vecteur, on peut déterminer directement si c'est un vecteur propre en multipliant.

Exemple 1.1. Est-ce que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est vecteur propre de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$?

On calcul $Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$. Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ on voit que $3x_1 = \lambda 1$ et $7x_1 = \lambda 1$, ce qui est impossible! Donc $\mathbf{x}$ n'est pas vecteur propre de A. □

Exercice 1.2. Déterminer si les vecteurs suivants sont vecteurs propres de A: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$. Si oui, donner la valeur propre correspondante. □

On peut aussi déterminer si une valeur est valeur propre d'une matrice.

Exemple 1.3. Est-ce que $\lambda = 2$ est valeur propre de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$?

Si oui ce devrait être possible de trouver un vecteur propre correspondant. On note que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

C'est un système d'équations linéaires. On peut résoudre à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan. Vous vous en souvenez, bien sûr...

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \rightleftharpoons R_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{3}R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{2}{3}R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque rangée dans un tel tableau représente une équation. Par exemple, à la gauche on lit les deux rangées comme "$0x_1 + x_2 = 0$" et "$3x_1 + 2x_2 = 0$". C'est exactement le système linéaire "$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$". On note que la colonne des zéros ne changera jamais, donc on se permet de la laisser tomber. À la droite on lit la réponse finale: "$x_1 = 0$" et "$x_2 = 0$". Donc $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La seule solution possible est que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, mais un vecteur propre n'est jamais zéro, donc $\lambda = 2$ n'est pas valeur propre. □

Exercice 1.4. Est-ce que $\lambda = 1$ est valeur propre de A? □

MÉTHODE GÉNÉRALE

Chaque vecteur propre correspond à une seule valeur propre, mais chaque valeur propre possède plusieurs vecteurs propres (vous avez déjà vu ceci dans exercice 1.2, n'est-ce pas?). On se rappelle la notion du NOYAU d'une matrice (dit L'ESPACE NUL, ou en anglais, KERNEL). C'est l'ensemble des vecteurs qui donnent $\mathbf{0}$ en multiplication par A:

Définition 1.5. $\ker(B) = \{\mathbf{x} \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ □

Les vecteurs propres de A correspondant à λ sont les éléments non-nuls de $\ker(A - \lambda I)$. À l'exercice 1.4 on n'a pas pu trouver des solutions non-nulles: autrement dit on avait trouvé que $\ker(A - 2I) = \{\mathbf{0}\}$. Pour avoir une valeur propre, il aurait fallu avoir $\ker(A - 2I) \neq \{\mathbf{0}\}$.

On se rappelle un théorème important en algèbre linéaire.

Théorème 1.6. $\ker(B) \neq \{\mathbf{0}\} \iff \det(B) = 0$ □

Le déterminant d'une matrice se calcul par cofacteurs. (Voir section 3.1 du manuel de cours.)

On fera donc le calcul de $\det(A - \lambda I)$. C'est le POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE de la matrice A. Les racines de ce polynôme sont exactement les valeurs propres.

On calcul comme exemple toutes les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On fera une expansion par la deuxième rangée.

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{bmatrix} 0-\lambda & -1 & 4 \\ -2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\
&= -(-2)\det\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} + (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} - (4)\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= -(-2)\Big((-1)(2-\lambda)-(4)(0)\Big) + (1-\lambda)\Big((-\lambda)(2-\lambda)\Big) - (4)\Big((-\lambda)(0)-(-1)(0)\Big) \\
&= 2(\lambda-2) + (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) \\
&= 2(\lambda-2) + (1-\lambda)(\lambda)(\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)\Big(2+(1-\lambda)\lambda\Big) \\
&= (\lambda-2)(-\lambda^2+\lambda+2) = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda = -1$ de multiplicité 1 et $\lambda = 2$ de multiplicité 2.

Note que ce n'est pas utile de tout multiplier toute de suite. C'est meilleur de tenter de sortir un facteur commun (le $(\lambda - 2)$ ici) avant de multiplier.

On aurait pu choisir n'importe quelle rangée ou colonne.

Exercice 1.7. Calculer le déterminant ci-haut en faisant une expansion par la première colonne, ainsi que la troisième rangée. Comparer au précédent. □

Sachant les valeurs propres, on calcul les vecteurs propres. C'est la même idée qu'à l'exemple 1.3, sauf que maintenant on sait déjà que c'est une bonne valeur propre.

Pour $\lambda = 2$ on calcul

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1\to -\frac{1}{2}R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y a un pivot, donc deux paramètres. La solution générale s'écrit comme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alternativement on a une base pour l'espace propre:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

De manière similaire on traite $\lambda = -1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution et base:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Pour résumer: pour la matrice A on connaît

$$\lambda_1 = -1 \ : \ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda_2 = 2 \ : \ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

DIAGONALISABILITÉ

La DIMENSION de l'espace propre est exactement le nombre de vecteurs dans la base pour l'espace propre. Note que ce n'est *pas* une base pour $\mathbb{R}^3$, il s'agit plutôt d'une base pour le noyau de la matrice $A - \lambda I$. La *multiplicité* d'une valeur propre est le nombre de fois qu'elle apparaît comme facteur dans le polynôme caractéristique.

En générale on a le théorème suivant:

Théorème 1.8. *Pour chaque espace propre, la dimension est toujours au plus la multiplicité de la valeur propre correspondante.* □

Dans notre exemple, les dimensions sont chacune égale aux multiplicités correspondantes. C'est un cas à la fois spécial et très utile (on verra bientôt une application).

Théorème 1.9. *Soit A une matrice tel que la dimension de chaque espace propre égale à la multiplicité correspondante. Alors on a $A = PDP^{-1}$, où les colonnes de la matrice P sont les bases pour chaque espace propre, et D est une matrice diagonale formée des valeurs propres.* □

Si une matrice A peut s'écrire comme $A = PDP^{-1}$, alors elle est dite DIAGONALISABLE.

Exemple 1.10. Pour la matrice A de la section précédente on écrit directement que

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

□

Observons que pour une matrice diagonalisable, on a $A^2 = \left(PDP^{-1}\right)^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. De la même façon on a $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout k.

Exemple 1.11. Pour la matrice A précédente, calculer A^{10}.

On connaît déjà la décomposition, donc on écrit

$$\begin{aligned} A^{10} = PD^{10}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Afin de finir le calcul, il faudrait calculer une inverse matricielle et deux multiplications matricielles, au lieu de neuf multiplications matricielles. □