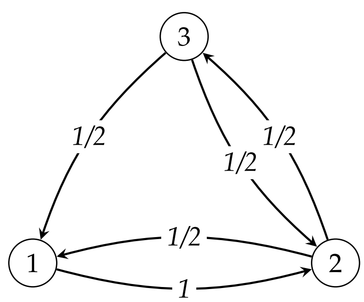
MAT 2742 — examen final

A

1. On développe $\mathtt{det}(M - x\mathbf{I})$ par rapport à la première ligne :
$\chi_M = (2-x)\mathtt{det}\begin{bmatrix} 4-x & 2 \\ -4 & -x \end{bmatrix} + 0 + 2\mathtt{det}\begin{bmatrix} -2 & 4-x \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = (2-x)(x^2-4x+8) + 2(8+4x-16)$
$= -x^3 + 6x^2 - 8x = (-x)(x^2-6x+8) = (-x)(x-2)(x-4)$
Les valeurs propres de A sont donc $0, 2, 4$ toutes de multiplicité 1.
2. $\mathbf{E}_0$: on trouve une variable libre x_3, espace de dimension 1, solutions $X = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{E}_2$: on trouve une variable libre x_2, espace de dimension 1, solutions $X = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{E}_4$: on trouve une variable libre x_3, espace de dimension 1, solutions $X = \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$
3. La matrice A est donc diagonalisable car pour chaque VP la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité. Les vecteurs $v_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A.
4. En décomposant X_0 sur la base v_0, v_2, v_4 on obtient : $X_0 = 2v_2 + v_4$ donc
$$X_k = M^k X_0 = 2^k 2v_2 + 4^k v_4 \sim 4^k v_4$$
5. En décomposant X_0 sur la base v_0, v_2, v_4 on obtient : $X_0 = c_0 v_0 + c_2 2v_2 + c_4 v_4$. Si $c_4 \neq 0$ on a $X_k \sim 4^k c_4 v_4$, si $c_4 = 0$ et $c_2 \neq 0$ alors $X_k \sim 2^k c_2 v_2$. Finalement si $c_2 = c_4 = 0$ on a $X_k = 0$ (pour $k \geq 1$). Donc $X_k \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $X_0 = c_0 v_0$ c'est à dire si X_0 est aligné avec v_0.

B

1. 

Le graphe est connexe et apériodique (on a des cycles de longueurs 2 et 3, donc $PGCD = 1$) donc la matrice M est régulière.
2. Non, quand on a une matrice stochastique régulière, elle admet un unique VES et le système converge toujours vers ce vecteur quelles que soient les conditions initiales.
3. Pour trouver le VES on résoud $(M - \mathbf{I})X = 0$. On trouve une variable libre, solutions $\begin{bmatrix} 3/2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Le VES est l'unique solution dont les coordonnées somment à 1 : $Q = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 4/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$

C

Vu le polynôme $\chi_M = -x^3$, la matrice M a zéro comme VP de multiplicité $m_0 = 3$. Comme on fait l'hyposthèse que M est diagonalisable, cela signifie que la dimension de $\mathbf{E}_0 = \ker(M)$ est égale à m_0. On a donc $\ker(M)$ un SEV de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc $\ker(M) = \mathbb{R}^3$. Par définition de $\ker(M)$ cela veut dire que $MX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ et donc $M = 0$.

D

1. La méthode du pivot ne donne pas de solution.
2. **Équations normales :** on calcule d'abord $M^\dagger M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $M^\dagger B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ puis on résoud $(M^\dagger M)X = M^\dagger B$. On trouve une unique solution $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. On retrouve $\hat{B}$ avec $\hat{B} = MX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Projections : On trouve une base ON de $\mathbf{Im}(M)$ engendré par $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ par le procédé de GS :

   $e_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $e_2' = e_2 - \dfrac{\langle e_1' \mid e_2 \rangle}{\langle e_1' \mid e_1' \rangle} e_1' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   On calcule alors $\hat{B} = proj_{\mathbf{Im}(M)}(B) = \dfrac{\langle e_1' \mid B \rangle}{\langle e_1' \mid e_1' \rangle} e_1' + \dfrac{\langle e_2' \mid B \rangle}{\langle e_2' \mid e_2' \rangle} e_2' = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{3}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Puis on résoud $MX = \hat{B}$, ce qui donne $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

E

1. $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\chi_M = x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$ donc les valeurs propres sont -2 et 4.
3. La valeur optimale est la plus grand VP de M : 4. Elle sera atteinte pour un vecteur propre de norme 1 pour la VP 4. On résout le système linéaire $(M - 4\mathbf{I})X = 0$ pour trouver des solutions $X = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et un vecteur optimal $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

F

1. On obtient les A_δ correspondantes : $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ et les $X' = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ tous donnent une solution unique mais seulement les deux dernières sont strictement positives et correspondent à des sommets $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.
2. Ces sommets sont non-dégénérés, car le rang de la matrice A est 1 et ils correspondent à un δ de taille 1.
3. On teste l'optimalité du sommet $\delta = \{2\}$: $A_{\bar{\delta}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_\delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix}$, $\phi_\delta = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$, $\phi_{\bar{\delta}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   On calcule $\phi_{\bar{\delta}}^\dagger - \phi_\delta^\dagger A_\delta^{-1} A_{\bar{\delta}} = \begin{bmatrix} -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} < 0$ le sommet est donc optimal.

G

1. On peut utiliser la forme matricielle du produit scalaire : $\langle X \mid MX \rangle = X^\dagger MX = X^\dagger A^\dagger AX = (AX)^\dagger AX = \langle AX \mid AX \rangle$ par la positivité du produit scalaire, on a $\langle AX \mid AX \rangle \geq 0$.
2. La matrice M est symmétrique car $M^\dagger = ({}^\dagger A^\dagger A) = A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger A = M$. Elle est donc diagonalisable. De plus, on sait que le minimum de $X^\dagger MX$ correspond à la VP la plus petite de M. On vient de voir que $\langle X \mid MX \rangle \geq 0$ donc le minimum est obligatoirement positif. La plus petite VP de M est positive, et donc toutes les autres le sont aussi.

H

1. On applique la méthode du pivot (dans $\mathbb{Z}_2$) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ On a deux variables libres x_3, x_4 et des solutions de la forme $X = \begin{bmatrix} 1 + x_4 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.
2. On développe le déterminant par rapport à la colonne 1 : $\mathtt{det}(M) = 1.(1) + 1(1) = 0$. La matrice n'est donc pas inversible.

I

1. Un code linéaire de longueur n est un SEV de $\mathbb{Z}_2^n$. Le $\ker$ d'une matrice est toujours un SEV, donc C est un code linéaire.
2. On échelonne M et on trouve $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, deux pivots. La matrice est de rang 2 donc son noyau C est de dimension 1 (théorème du rang).
3. La troisième ligne de M est un combinaison linéaire des deux premières, elle est donc inutile pour contrôler les mots du code : on peut contrôler avec la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
4. On ne peut pas trouver de matrice 1×3 car le rang maximum d'une telle matrice est 1 et son noyau est donc nécessairement de dimension 2. On a vu que la dimension de C est 1.