MAT 2742 (automne 2015) — examen final

Professeur : Marc Bagnol

Donner les détails des calculs, pas seulement le résultat.
*Les exercices marqués * sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*
Calculatrices non-graphiques uniquement. Pas de notes de cours.

Il est interdit de se servir de téléphones cellulaires, de dispositifs électroniques non autorisés ou de notes de cours. Les téléphones et les dispositifs doivent être fermés et rangés dans votre sac : vous ne pouvez pas les laisser dans vos poches ou sur votre personne. Sinon, on pourrait vous demander de quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées dont le résultat pourrait être un 0 (zéro) pour l'examen.

En apposant votre signature, vous reconnaissez vous être assuré de respecter l'énoncé ci-dessus.

NOM, Prénom :

N^{o} d'étudiant : **Signature :**

(pour le correcteur)

A : **B :** **C :**

D : **E :** **F :** **G :**

H : **I :**

Total :

Partie I : diagonalisation et systèmes dynamiques

A

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ et le système dynamique $X_n \in \mathbb{R}^3$ associé $X_{k+1} = AX_k$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et donner ses valeurs propres.
2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice et donner leur dimension.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner une base de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A.
4. Quelle est l'évolution à long terme pour la condition initiale $X_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$? *(donner un équivalent)*
5. Pour quelles conditions initiales X_0 a-t-on $X_k \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$?

B

On s'intéresse à la chaîne de Markov dont la matrice d'évolution est $M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Tracer le graphe associé. La matrice M est-elle régulière ?
2. L'évolution à long terme de $X_k = M^k X_0$ dépend-elle des conditions initiales X_0 ?
3. Calculer le vecteur d'état stationnaire de M et donner l'évolution à long terme de $X_k = M^k X_0$.

C *

On a une matrice 3×3 M dont le polynôme caractéristique est $\chi_M = -x^3$. On suppose de plus que M est diagonalisable.
Prouver que $M = 0$.

Partie II : optimisation et approximation

D

On cherche à résoudre le système linéaire : $MX = B$ avec $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Le système a-t-il des solutions exactes ?
2. Résoudre approximativement : donner $\hat{B} \in \mathbb{R}^3$ et X tels que que $MX = \hat{B}$ avec $\hat{B}$ aussi proche que possible de B.

E

On cherche à résoudre le problème d'optimisation quadratique suivant : pour quelles valeurs de x, y telles que $x^2 + y^2 = 1$ a-t-on $p(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$ maximum ?

1. Donner la matrice symmétrique M correspondant à la forme quadratique p.
2. Quelles sont les valeurs propres de M ?
3. Résoudre le problème d'optimisation.

F

On considère le problème d'optimisation linéaire

$$P : \text{maximiser } \langle \phi \mid X \rangle \text{ tel que } AX = B \text{ et } X \geq 0$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \text{ et } \phi = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. A-t-on des sommets de Adm_P correspondant aux sous-ensembles $\delta = \{1\}, \{2\}, \{3\}$?
2. Ces sommets sont-ils dégénérés ?
3. Montrer que le sommet correspondant à $\delta = \{2\}$ est optimal.

G *

On a deux matrices $n \times n$ M et A telles que $M = A^{\dagger} A$.

1. Prouver que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle X \mid MX \rangle \geq 0$.
2. Prouver que M est nécessairement diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives.

Partie III : Codes linéaires

(dans cette partie on considère tous les vecteurs, matrices... dans $\mathbb{Z}_2$)

H

1. Résoudre le système linéaire $AX = B$ avec $X \in (\mathbb{Z}_2)^4$ et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est-elle inversible ?

I

Considérons la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On étudie le code $C = \ker(M) \subseteq (\mathbb{Z}_2)^3$. Les mots du code sont donc les vecteurs X tels que $MX = 0$.

1. Rappeler la définition d'un code linéaire puis expliquer pourquoi C est un code linéaire.
2. Quel est le rang de M ? Quelle est donc la dimension de C ?
3. Donner une matrice de contrôle 2×3 pour le code C.

4.* Peut-on trouver une matrice de contrôle 1×3 pour le code C ?