MAT 2742 — feuille d'exercices #9

*Les exercices marqués * sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*

A Sommets optimaux

On considère le problème d'optimisation linéaire

$$P : \text{maximiser } \langle \phi \mid X \rangle \text{ tel que } AX = B \text{ et } X \geq 0$$
$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } \phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. A-t-on des sommets correspondant aux sous-ensembles :
   (a) $\delta = \{4\}$
   (b) $\delta = \{1,2\}$
   (c) $\delta = \{1,3\}$
   (d) $\delta = \{2,3\}$
   (e) $\delta = \{1,3,4\}$
2. Parmis les sommets trouvés à la question précédente, lesquels sont non-dégénérés ?
3. Tester l'optimalité des sommets non-dégénérés considérés.

B Codes

1. Quelle est la distance des codes suivants :

$$C = \{0000, 0011, 0101\} \qquad D = \{000, 110, 011\}$$

2. En déduire le nombre d'erreurs maximum détectées/corrigées par chacun de ces codes.
3. Lesquels sont des codes parfaits ?

C Algèbre linéaire sur $\mathbb{Z}_2$

(dans cette section on considère tous les vecteurs, matrices... dans $\mathbb{Z}_2$)

1. Determiner le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calculer le determinant, et l'inverse quand le déterminant est non-nul, des matrices :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Résoudre le système linéaire $AX = B$ avec $X \in (\mathbb{Z}_2)^4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.