MAT 2742 — feuille d'exercices #8

*Les exercices marqués * sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*

A Matrices symmétriques

Faire une diagonalisation orthonormale des matrices symétriques :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

B Optimisation quadratique

Résoudre les problèmes d'optimisation quadratique suivants

1. Pour quelles valeurs de x, y telles que $x^2 + y^2 = 1$ a-t-on $2x^2 - 4xy + y^2$ maximum ?
2. Pour quelles valeurs de x, y, z telles que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a-t-on $(x + y + z)^2$ minimum ?

3.* Pour quelles valeurs de x, y telles que $\frac{1}{9}x^2 + 4y^2 = 1$ a-t-on xy maximum ?

C Optimisation et convexité

1. Les ensembles suivants sont-ils convexes ?
   - Les solutions de l'équation linéaire $AX = B$.
   - Les vecteurs $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ tels que $x^2 + y^2 = 1$
   - Les vecteurs $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ tels que $x^2 + y^2 \leq 1$
2. Prouver que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est convexe.
3. On considère le problème d'optimisation linéaire :

$$P : \text{maximiser } \langle \phi \mid X \rangle \text{ avec } AX = B \text{ et } X \geq 0$$
$$\text{avec } \phi = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer les sommets de Adm_P, puis résoudre le problème d'optimisation.