MAT 2742 — feuille d'exercices #7

*Les exercices marqués * sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*

A Matrices et orthogonalité

1. Les matrices suivantes sont-elles orthonormales ? Symmétriques ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

2. Montrer que pour toute matrice $n \times n$ M et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle X \mid MY \rangle = \langle M^\dagger X \mid Y \rangle$$

B Approximation de systèmes linéaires

On considère le systeme linéaire $MX = B$ avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. Quel est le rang de M ?
2. Vérifier qu'il n'y a pas de solution exacte.

On fait d'abord une résolution approximative par la méthode de projection :

3. Trouver un vecteur $\hat{B}$ qui minimise $\|B - \hat{B}\|$, tel que $MX = \hat{B}$ a une solution.
4. Résoudre approximativement le système : trouver X tel que $MX = \hat{B}$.

On essaie ensuite la méthode des équations normales :

5. Calculer $M^\dagger M$, $M^\dagger B$ et résoudre $M^\dagger MX = M^\dagger B$.
6. Retrouver $\hat{B}$ à partir de la solution obtenue.

C Formes quadratiques et matrices symétriques

1. Donner la matrice symmétrique associée aux formes quadratiques suivantes :

$$p(x,y) = 3x^2 - y^2 \qquad q(x,y) = x^2 + 4xy \qquad r(x,y,z) = x^2 - xy + xz + y^2 - z^2$$

2. Trouver la matrice symmétrique M associée à la forme quadratique $s(x,y) = 2xy$ et diagonaliser : trouver P *orthonormale* et D diagonale telle que $M = P\Delta P^\dagger$.