MAT 2742 — feuille d'exercices #6

*Les exercices marqués * sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*

A Produit scalaire et projections

1. Calculer les produits scalaires $\langle A \mid B\rangle, \langle A \mid C\rangle, \ldots$ et les normes $\|A\|, \|B\|, \ldots$ des vecteurs :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Préciser lesquels sont orthogonaux : $A \perp B$? $B \perp D$? ...

2. Normaliser les vecteurs A, B, C, D.
3. Calculer les projections orthogonales $\mathit{proj}_A(B), \mathit{proj}_A(C), \ldots$

B Bases orthogonales, orthonormales

1. Vérifier que la famille de vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

   Puis, trouver les coordonnées des vecteurs $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2/3 \\ -1 \end{bmatrix}$ dans cette base.

C Gram-Schmidt

1. Appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la base $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base orthogonale. Puis la normaliser pour obtenir une base orthonormale.
2. On considère le SEV de $\mathbb{R}^3$ E défini comme l'ensemble des vecteurs $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

   Donner une base de E, puis la transformer en une base orthogonale de E par la méthode de Gram-Schmidt.
3. Donner une base orthonormale de l'espace des solutions de l'équation $MX = 0$ avec

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$