

# MAT 2742 — feuille d'exercices #5

Les exercices marqués \* sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.

## A Suites récurrentes

1. On considère les suites récurrentes  $u_k, v_k$  définies par :

$$u_{k+4} = -3u_{k+3} + 2u_{k+2} + u_{k+1} + u_k$$

$$v_{k+4} = v_{k+3} - v_{k+2} + 7v_k$$

On pose  $X_k = \begin{bmatrix} u_{k+3} \\ u_{k+2} \\ u_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}$  et  $Y_k = \begin{bmatrix} v_{k+3} \\ v_{k+2} \\ v_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix}$ . Donner les matrices  $A, B$  telles que  $AX_k = X_{k+1}$  et  $BY_k = Y_{k+1}$ .

2. Donner l'évolution à long terme de la suite récurrente

$$u_{k+2} = -u_{k+1} + 2u_k \quad u_0 = -1, u_1 = 1$$

en utilisant la méthode matricielle.

- 3.\* On regarde maintenant la suite récurrente  $u_k$  d'un type un peu différent que celui vu en classe :

$$u_{k+2} = 4u_k + 1 \quad u_0 = 1, u_1 = 1$$

On a un terme constant « +1 » qui n'est pas présent dans le cas habituel.

Pouvez-vous adapter la méthode pour donner l'évolution à long terme de la suite ?

## B Classements

Une recherche sur internet renvoie les sites  $A, B, C, D$  reliés de manière suivante :

- $A$  pointe vers  $B, C, D$
  - $B$  pointe vers  $C, D$
  - $C$  pointe vers  $B$
  - $D$  pointe vers  $A, B$
1. Tracer le graphe correspondant et le pondérer pour en faire le graphe d'une chaîne de Markov. On appelle  $M$  la matrice associée.
  2. Cette matrice est-elle régulière ?  
Si oui calculer son vecteur d'état stationnaire et donner le classement des sites.
  3. Calculer le vecteur d'état stationnaire de la matrice  $(1 - 0.2)M + 0.2\mathbf{I}_4$ .
  - 4.\* Montrer que pour tout  $p \in [0, 1]$  si  $Q$  est un vecteur d'état stationnaire de  $M$ , alors  $Q$  est un vecteur d'état stationnaire de  $(1 - p)M + p\mathbf{I}_4$ .