MAT 2742 — feuille d'exercices #4

*Les exercices marqués * sont optionnels, plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*

A Systèmes dynamiques

On considère deux types de bactéries a et b. Chaque minute, 80% des bactéries de type a survivent, chaque bactérie de type b se divise en 2 bactérie de type b et une de type a.

1. Donner la matrice d'évolution M de ce système dynamique.
2. Trouver ses valeurs propres. M est-elle diagonalisable ?
3. Donner une base de $\mathbb{R}^2$ constituée uniquement de vecteurs propres de M.
4. Discuter l'évolution à long terme du système pour les valeurs initiales
   - $a_0 = 100$, $b_0 = 30$
   - $a_0 = 50$, $b_0 = 0$
5. Pouvez-vous dire à quelle condition les populations de bactéries vont à 0 ?

B* Matrice stochastiques

On regarde plus en détails la preuve du fait que les matrices stochastiques ont toujours 1 comme valeur propre :

1. Montrer que A et $A^\dagger$ ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités.
2. Si B est une matrice dont les lignes somment à $r \in \mathbb{R}$, montrer que $\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice. Quelle est la valeur propre correspondante ?
3. En déduire que si A est stochastique, 1 est une valeur propre de A.

C Chaînes de Markov

On considère les chaînes de Markov dont les matrices sont

$$A = \begin{bmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0 & 0.5\\ 1 & 0.5\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.6\\ 0 & 0.5 & 0.4\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0.8\\ 1 & 0 & 0.2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

1. Dans chaque cas, déterminer la dimension de l'espace propre $\mathbf{E}_1$. En déduire quelles sont les matrices avec un vecteur d'état stationnaire unique. Donner ce vecteur quand il est unique.
2. Dessiner le graphe associé. Les matrices sont elles stochastiques régulières ?
3. Quels sont les cas possible d'évolution à long terme pour les chaînes de Markov considérées ?