MAT 2742 — feuille d'exercices #2

A Équations linéaires

1. Determiner le rang des matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes et l'inverse quand c'est possible :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Résoudre le système linéaire $AX = B$ avec :

$$X \in \mathbb{R}^4 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B Diagonalisation

1. Parmis ces vecteurs, lesquels sont des vecteurs propres de $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$?

   (préciser la valeur propre associée ?)

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Calculer et factoriser les polynômes caractéristiques des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Calculer la dimension des sous-espaces propres de la matrice $C = \begin{bmatrix} -0,5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C Systèmes dynamiques

On considère un système dynamique dont l'évolution est donnée par les equations :

$$a_{k+1} = 0,75\, a_k + 0,25\, b_k \qquad b_{k+1} = 0,25\, a_k + 0,75\, b_k$$

1. Reformuler le problème avec l'évolution donnée par une matrice A.
2. Diagonaliser A.
3. Donner la valeur de stabilisation pour les conditions initiales $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.