

MAT 2742 — feuille d'exercices #1

A Espaces vectoriels

On se place dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

On considère les vecteurs $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. La famille u_1, u_2, u_3, u_4 est-elle libre ? Lister ses sous-familles libres, génératrices, indiquer lesquelles sont des bases de \mathbb{R}^3 .
2. Donner les coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans la base $\mathbf{b} = u_1, u_2, u_3$. Dans la base $\mathbf{c} = u_1, u_3, u_4$.
3. Parmi ces ensembles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ? Quand ce sont des espaces vectoriels, en donner une base.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3 \right\} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = y \text{ et } z = 0 \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x = y \text{ et } z = 1 \right\} \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x + y - 3z = 0 \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x^2 + y = 0 \right\} \quad F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid \text{il existe } t \text{ tel que } x^2 + y - z^3 = t \right\}$$

B Matrices

On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Quels sont les produits bien définis ? (AB, BA, CA, \dots ?) Les calculer et calculer le déterminant quand le résultat est une matrice carrée.
2. Calculer les déterminants de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0.5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
3. Donner les rangs des matrices A, B, C . En déduire la dimension de leurs noyaux.
4. Calculer $A^\dagger, B^\dagger, C^\dagger$. Quel est le rang de A^\dagger ? $A^\dagger A$? AA^\dagger ? etc.

C Systèmes linéaires

1. Échelonner la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, en déduire son rang.

Résoudre l'équation $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (pour $X \in \mathbb{R}^3$).

2. Calculer l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ et son déterminant.

3. Donner la matrice correspondant à l'application linéaire $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ x+y \\ z-2y \end{bmatrix}$.