MAT 2742 — devoir #4 (solutions)

A

1. $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. On calcule $\chi_M = (-1-x)(-x) - 1 = x^2 + x - 1$, la solution de l'équation du second degré donne deux racines $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ qui sont les deux valeurs propres de M. Notez que $a + b = -1$ et $ab = -1$ on va s'en servir dans les calculs.
   Déterminons $\mathbf{E}_a$: $M - a\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1-a & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -a \\ b & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1+ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ une variable libre, solutions $X = \begin{bmatrix} ax_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
   Déterminons $\mathbf{E}_b$: $M - b\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ une variable libre, solutions $X = \begin{bmatrix} bx_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
3. La plus grande VP de M est a, donc on sait que le maximum sera atteint pour un vecteur propre associé à a de norme 1. Si on prend $A = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$ on trouve que $\langle A \mid A \rangle = a^2 + 1 = \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1 = 2 - a$, donc $\|A\| = \sqrt{2-a}$ et on atteint le maximum pour le vecteur $A' = \dfrac{1}{\|A\|} A = \dfrac{1}{\sqrt{2-a}} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$.

B

1. (a) $\delta = \{2\}$: $A_\delta = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$, pas de solutions pour $A_\delta X' = B$ donc pas de sommet.
   (b) $\delta = \{2,3\}$: $A_\delta = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, unique solution pour $A_\delta X' = B$: $X' = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 1/3 \end{bmatrix} > 0$ on a donc un sommet $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 7/6 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.
   (c) $\delta = \{1,3\}$: $A_\delta = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, unique solution pour $A_\delta X' = B$: $X' = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} > 0$ on a donc un sommet $X = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.
   (d) $\delta = \{1,2,3\}$: il ne peut pas y avoir de sommet car $rg(A) = 2$ et donc A_δ ne peut pas être injective
2. Les sommets correspondant à $\delta = \{2,3\}$ et $\delta = \{1,3\}$ sont non-dégénérés : la taille de δ est égale dans ces cas là au rang de A.
3. On applique la formule vue en cours :
   - $\delta = \{2,3\}$: $A_\delta^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$, $A_{\bar\delta} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, $\phi_\delta^\dagger = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, $\phi_{\bar\delta}^\dagger = \left[\begin{smallmatrix} 1 \end{smallmatrix}\right]$ et donc
   $$\phi_{\bar\delta}^\dagger - \phi_\delta^\dagger A_\delta^{-1} A_{\bar\delta} = 0$$
   donc le sommet est optimal.
   - $\delta = \{1,3\}$: $A_\delta^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$, $A_{\bar\delta} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$, $\phi_\delta^\dagger = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, $\phi_{\bar\delta}^\dagger = \left[\begin{smallmatrix} 2 \end{smallmatrix}\right]$ et donc
   $$\phi_{\bar\delta}^\dagger - \phi_\delta^\dagger A_\delta^{-1} A_{\bar\delta} = 0$$
   donc le sommet est optimal aussi.

On est dans un cas particulier où plusieurs sommets donnent la valeur optimale.

C

(dans cette section on considère tous les vecteurs, matrices... dans $\mathbb{Z}_2$)

1. Matrice augmentée :
$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$
On a deux variables libres x_2, x_4 et les solutions sont $X = \begin{bmatrix}-x_4\\x_2\\1\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_4\\x_2\\1\\x_4\end{bmatrix}$.

2. On calcule $\chi_M = (-x)(-x)(1-x)$ donc les valeurs propres sont 0 de multiplicité 2 et 1 de multiplicité 1.
On détermine $\mathbf{E}_0$: $M - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ Deux variables libre x_2, x_3 et solutions
$X = \begin{bmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2+x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. On en déduit une base de $\mathbf{E}_0$: $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$.
On détermine $\mathbf{E}_1$: $M - 1\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ Une variable libre x_3 et solutions $X = \begin{bmatrix}0\\0\\x_3\end{bmatrix}$.
On en déduit une base de $\mathbf{E}_1$: $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.
On peut donc poser $P = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ et calculer son inverse :
$$\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$
et donc $P^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$. Finalement, on a $M = P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}P^{-1}$.

D

1. Clairement C est égal à $\mathbf{Lin}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ donc c'est un SEV de $\mathbb{Z}_2^4$.

2. La distance entre $X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_1+x_2+x_3\end{bmatrix} \neq 0$ et 0 est égale au nombre de 1 dans X. Si $x_1 = 1$ et $x_2, x_3 = 0$ on a une distance de 2, pareil pour $x_2 = 1$ et $x_1, x_3 = 0$; $x_3 = 1$ et $x_1, x_2 = 0$. Pour les cas où on a deux variables non-nulles on trouve aussi une distance de 2. Pour le cas ou les trois variables sont à 1 on trouve une distance de 3. Donc la distance minimale de C est $d_0(C) = d(C) = 2$ (car C est linéaire).

3.* La matrice $M = \begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$ donne $MX = M\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = 0$ quand $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ c'est à dire quand $x_4 = x_1+x_2+x_3$ ce qui est équivalent à $X \in C$.