MAT 2742 — devoir #4

À rendre le lundi 7 décembre.
Donner les détails des calculs, pas seulement le résultat.
*Les exercices marqués * sont plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.*

A

On cherche à résoudre le problème d'optimisation quadratique suivant : pour quelles valeurs de x, y telles que $x^2 + y^2 = 1$ a-t-on $p(x, y) = -x^2 + 2xy$ maximum ?

1. Donner la matrice symmétrique M correspondant à la forme quadratique p.
2. Trouver les valeurs propres et déterminer les espaces propres de M.
3. Résoudre le problème d'optimisation.

B

On considère le problème d'optimisation linéaire

$$P : \text{maximiser } \langle \phi \mid X \rangle \text{ tel que } AX = B \text{ et } X \geq 0$$
$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } \phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. A-t-on des sommets de $\mathcal{A}dm_P$ correspondant aux sous-ensembles :
   (a) $\delta = \{2\}$
   (b) $\delta = \{2, 3\}$
   (c) $\delta = \{1, 3\}$
   (d) $\delta = \{1, 2, 3\}$
2. Parmis ces sommets, lesquels sont non-dégénérés ?
3. Tester l'optimalité des sommets non-dégénérés trouvés à la question précédente.

C

(dans cette section on considère tous les vecteurs, matrices... dans $\mathbb{Z}_2$)

1. Résoudre le système linéaire $AX = B$ avec $X \in (\mathbb{Z}_2)^4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. Diagonaliser la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$: trouver P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

D

On considère le code de longueur 4 défini comme $C = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

(on appelle ce code un code de parité : le dernier bit contient 0 ou 1 selon la parité de la somme des trois premiers)

1. Le code C est-il linéaire ?
2. Quelle est la distance minimale de C. Combien d'erreur peut-il détecter ?
3.* Donner une matrice de contrôle pour le code C : trouver une matrice M telle que $\ker(M) = C$.