MAT 2742 — devoir #3 (solutions)

A

1. Les conditions initiales donnent $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est telle que $AX_k = X_{k+1}$.

2.* Ici on doit trouver une solution pour avoir 2^k. Si on a un vecteur de la forme $\begin{bmatrix} v_{k+1} \\ v_k \\ 2^k \end{bmatrix}$, une matrice avec la première ligne $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ permettra de récupérer u_{k+2}. On essaye donc cette approche : on pose $Y_k = \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ v_k \\ 2^k \end{bmatrix}$, avec $Y_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et alors la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est telle que $BY_k = Y_{k+1}$.

B

1. La matrice n'est pas orthonormale car $AA^\dagger \neq \mathbf{I}_2$. Ou encore parce que ses colonnes ne forment pas une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Par contre elle est symmétrique : $A^\dagger = A$.
2. Le calcul du polynome caractéristique donne $\chi_A = x^2 - 4x = x(x-4)$ les valeurs propres de A sont donc 0 de multiplicité 1 et 4 de multiplicité 1.
3. On détermine $\mathbf{E}_0$ en résolvant $AX = 0$

   $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   une variable libre x_2 et les solutions sont $\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{E}_0$ est donc de dimension 1.

   Puis on détermine $\mathbf{E}_4$ en résolvant $(A - 4\mathbf{I})X = 0$

   $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \cdots \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   une variable libre x_2 et les solutions sont $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{E}_4$ est donc de dimension 1.
4. On sait déjà par le théorème de diagonalisation des matrices symmétriques que $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{E}_4$. Comme les deux espaces sont de dimension 1 on n'a pas besoin d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt, en mettant ensemble une base ON de $\mathbf{E}_0$ et de $\mathbf{E}_4$ on aura une base ON de $\mathbb{R}^2$.

   On peut donc poser $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ qui est une matrice ON telle que $A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} P^\dagger$.

C

1. La méthode du pivot aboutit à l'absence de solutions :

   $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la dernière ligne demande $0x_2 = 1$, impossible.

2. **Méthode 1, projections :** on calcule la projection de B sur $\mathbf{Im}(M)$, pour cela on commence par trouver une base OG de $\mathbf{Im}(M)$ par le procédé de GS appliqué à $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$:

   $E'_1 = E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   $E'_2 = E_2 - proj_{E'_1}(E_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{\langle E'_1 \mid E_2 \rangle}{\langle E'_1 \mid E'_1 \rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   On peut maintenant calculer :

   $\hat{B} = proj_{\mathbf{Im}(M)}(B) = proj_{E'_1}(B) + proj_{E'_2}(B) = \dfrac{\langle E'_1 \mid B \rangle}{\langle E'_1 \mid E'_1 \rangle} E'_1 + \dfrac{\langle E'_2 \mid B \rangle}{\langle E'_2 \mid E'_2 \rangle} E'_2$

   $= 0 + \frac{1}{1+1/4+1/4} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

   puis résoudre $MX = \hat{B}$

   $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   On a une unique solution approchée : $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

   Méthode 2, equations normales : on calcule $A^\dagger A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ et $A^\dagger B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ puis on résoud $A^\dagger A X = B$:

   $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$

   On a une unique solution $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. On peut en déduire la projection $\hat{B}$ de B sur $\mathbf{Im}(M)$ en calculant $\hat{B} = MX = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

   (notez qu'on retrouve bien la même chose dans les deux cas !)

3. La distance entre B et $\hat{B}$ est la norme $\|B - \hat{B}\|$. On calcule donc

   $\|B - \hat{B}\|^2 = \langle B - \hat{B} \mid B - \hat{B} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \rangle = 3(1/9) = 1/3$

   La distance entre B et $\hat{B}$ est donc $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D

Une forme quadratique est un polynome sur plusieurs variables dont tous les termes sont de degré 2.

1. p est bien une FQ et la matrice correspondante est $\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
2. q n'est pas une FQ car le terme xyz est de degré 3.
3. r n'est pas une FQ car le terme 1 est de degré 0.
4. s est bien une FQ et la matrice correspondante est $\begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{bmatrix}$
5. t est bien une FQ et la matrice correspondante est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$