

MAT 2742 — devoir #3

À rendre le lundi 23 novembre.

Donner les détails des calculs, pas seulement le résultat.

Les exercices marqués * sont plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.

A

1. Soit (u_k) la suite récurrente définie par :

$$u_{k+3} = 2u_{k+2} - u_{k+1} + u_k \quad u_0 = 3, u_1 = 1, u_2 = 1$$

On pose $X_k = \begin{bmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}$. Donner le vecteur X_0 et une matrice A telle que $AX_k = X_{k+1}$.

2* Adapter la méthode précédente pour exprimer sous forme d'un système dynamique la suite récurrente :

$$v_{k+2} = 5v_{k+1} - v_k + 2^k \quad u_0 = 3, u_1 = 1$$

B

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

1. La matrice A est-elle orthonormale ? Est-elle symétrique ?
2. Quelles sont les valeurs propres de A ?
3. Déterminer les espaces propres correspondants.
4. En déduire une matrice orthonormale P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^t$.

C

On cherche à résoudre le système linéaire : $MX = B$ avec $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Le système a-t-il des solutions exactes ?
2. Résoudre approximativement : donner \hat{B} aussi proche que possible de B tel que $MX = \hat{B}$ a une solution et résoudre ce nouveau système.
3. Évaluer l'erreur d'approximation : quelle est la distance entre B et \hat{B} ?

D

Les fonctions suivantes sont-elles des formes quadratiques ? Donner la matrice symétrique correspondante quand c'est le cas.

1. $p(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 5z^2$
2. $q(x, y, z) = x^2 + 4xyz + y^2 + zx$
3. $r(x, y) = 2x^2 + 2xy + 1$
4. $s(x, y) = y^2 + 3xy$
5. $t(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 3w^2$