MAT 2742 — devoir #2 (solutions)

A

1. On calcule $\mathtt{det}(M - x\mathbf{I}_3) = x^2 - x - 3/4$, puis on cherche ses racines[1] : le discriminant est

$$\Delta = (-1)^2 + 4(3/4) = 4 = 2^2$$

et les racines sont donc $\lambda_1 = \frac{1-2}{2} = \text{-}1/2$ et $\lambda_2 = \frac{1+2}{2} = 3/2$.

2. On l'a vu en cours mais je détaille : on a λ_1 et λ_2 de multiplicité 1, donc $\mathtt{dim}(\mathbf{E}_{\lambda_1}) \leq 1$ et $\mathtt{dim}(\mathbf{E}_{\lambda_2}) \leq 1$. Mais on sait aussi qu'un espace propre est de dimension *au moins* 1. Donc finalement $\mathtt{dim}(\mathbf{E}_{\lambda_1}) = 1$ et $\mathtt{dim}(\mathbf{E}_{\lambda_2}) = 1$. On est dans le cas où la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité de la VP, donc la matrice est diagonalisable.
En fait, quand toutes les VP sont de multiplicité 1 la matrice est toujours diagonalisable par le même raisonnement.

3. On résout $(M + 1/2\mathbf{I}_3)X = 0$, $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ \text{-}2 & \text{-}2 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Une variable libre x_2, solutions : $\begin{bmatrix} \text{-}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
Puis $(M - 3/2\mathbf{I}_3)X = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \text{-}2 & \text{-}4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Une variable libre x_2, solutions : $\begin{bmatrix} \text{-}2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$.
On a donc (en fixant $x_2 = 1$ dans les deux cas) les vecteurs propres
   - $v_1 = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = -1/2$
   - $v_2 = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = 3/2$

4. On pose la matrice $P = \left[\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. On sait que P est inversible par le théorème de diagonalisation. On calcule son inverse avec la méthode du pivot : $\left[\begin{smallmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ et donc $P^{\text{-}1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. On a donc d'après le théorème de diagonalisation :

$$M = P \begin{bmatrix} \text{-}1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} P^{\text{-}1}$$

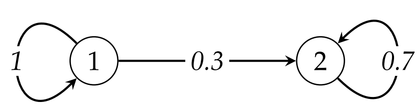
(comme d'habitude, penser à vérifier !)

5. Décomposons X_0 sur la base v_1, v_2 : $X_0 = v_1 - 2v_2$. Donc $X_k = A^k X_0 = (\text{-}1/2)^k v_1 - 2(3/2)^k v_2 \approx -2(3/2)^k v_2$.

6. Si on décompose $X_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ on voit que $X_k = A^k X_0 = c_1(\text{-}1/2)^k v_1 + c_2(3/2)^k v_2$. Si $c_2 \neq 0$, alors $X_k \approx -2(3/2)^k v_2$. Au contraire, si $c_2 = 0$ on a $X_k = c_1(\text{-}1/2)^k v_1 \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $X_k \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $c_2 = 0$, c'est à dire quand $X_0 = c_1 v_1$ est un multiple de v_1.

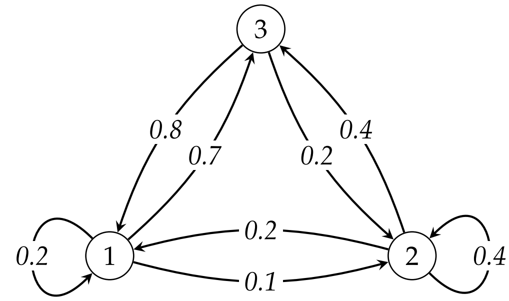
B

1. A : le graphe n'est pas connexe (on ne peut pas aller de 1 à 2) donc la chaîne n'est pas régulière.

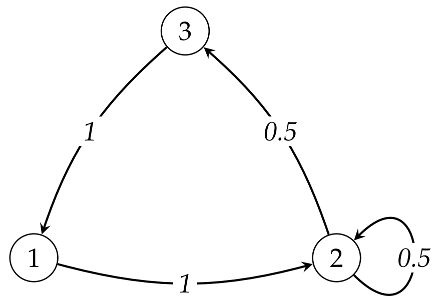


1. Selon la méthode habituelle pour les polynomes du second degré

B : le graphe est connexe (on a un cycle qui passe par tous les points) et apériodique (on a des cycles de longueur 1 donc son PGCD est 1) donc la matrice est régulière.



C : Le graphe est connexe (on a un cycle qui passe par tous les points) et apériodique (on a un cycle de longueur 1 donc son PGCD est 1) donc la matrice est régulière.



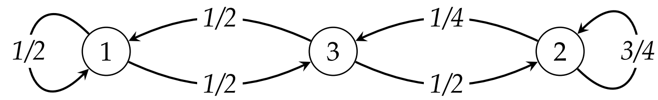
2. *(bon c'était vraiment plus difficile à résoudre sans indice, je voulais voir ce que vous arrivez à faire face à ce genre de questions)*
   Il y a plusieurs manière d'attaquer le problème, le plus simple à mon avis est de montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) M est stochastique.
   (b) Pour tout vecteur X dont les coordonnées somment à 1, MX a ses coordonnées qui somment à 1.

   Démonstration. (b) implique (a) car si on prend $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \ldots$ alors ME_i est exactement la $i^{\text{ème}}$ colonne de M et donc les colonnes de M doivent sommer à 1.
   (a) implique (b) car inversement, si on écrit $X = c_1E_1 + \cdots + c_nE_n$ das la base canonique, avec $c_1 + \cdots + c_n = 1$ on a $MX = c_1ME_1 + \cdots + c_nME_n$. Mais comme ME_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de M, ses coordonnées somment à 1 et donc les coordonnées de MX somment à $c_1 + \cdots + c_n = 1$.

   Avec ce résultat on voit que si A est stochastique, alors A vérifie (b) et donc si on prend X dont les coordonnées somment à 1 on obtient AX dont les coordonnées somment à 1, puis $A(AX)$ dont les coordonnées somment à 1, de même $A(A(AX))$ etc. Donc A^k préserve les vecteurs dont les coordonnées somment à 1, c'est à dire A^k est stochastique.

C

1. On a la matrice $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$ et le graphe



2. La matrice M est régulière car le graphe associé est connexe (on a encore un cycle qui passe par tous les points) et apériodique (on a des cycles de longueur 1 donc le PGCD est 1).

   On sait dans ce cas que le système admet un unique VES et converge vers ce vecteur indépendemment des conditions initiales.

3. On résout $(M - \mathbf{I}_3)X = 0$, $\begin{bmatrix} \text{-}1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \text{-}3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & \text{-}1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Une variable libre x_3, solutions $\begin{bmatrix} \text{-}x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Parmis ces solutions on cherche l'unique dont les coordonnées somment à 1, ce qui donne $x_3 + 2x_3 + x_3 = 1$ et donc $x_3 = 1/4$.

   L'unique VES de cette chaîne de markov est donc $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$.