

MAT 2742 — devoir #2

À rendre le lundi 19 octobre.

Donner les détails des calculs, pas seulement le résultat.

Les exercices marqués * sont plus difficiles ou plus théoriques, à faire quand vous avez fini les autres.

A

On considère un système dynamique de dimension 2 dont la matrice d'évolution est :

$$M = \begin{bmatrix} 7/2 & 4 \\ -2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M et trouver ses valeurs propres.
2. Expliquer pourquoi M est diagonalisable.
3. Donner une base de \mathbb{R}^2 constituée de vecteurs propres de M .
4. Diagonaliser M : donner une matrice inversible R (calculer son inverse R^{-1}) et une matrice diagonale D telle que $A = RDR^{-1}$.
5. On considère la condition initiale $X_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Quelle est l'évolution à long terme de $X_k = M^k X_0$?
6. À quelle condition a-t-on $X_k \xrightarrow{\infty} 0$?

B

1. Dessiner le graphe associé aux matrices stochastiques suivantes. Sont-elles régulières ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2* Montrer que si A est une matrice stochastique, alors A^2 est aussi stochastique.
Puis montrer que A^k est stochastique pour tout k .

C

On étudie la chaîne de Markov suivante : la population d'Ottawa se déplace soit en bus, soit à vélo, soit en voiture pendant l'année. Chaque année certains changent de mode de transport de la manière suivante :

- La moitié des cyclistes continue à se déplacer leur vélo, l'autre moitié décide de se déplacer en bus.
 - Les trois quarts de ceux qui se déplacent en voiture décide de continuer, un quart décide de prendre le bus à la place.
 - La moitié des utilisateurs de bus changent pour se déplacer en voiture, l'autre moitié change pour se déplacer à vélo.
1. Donner le graphe et la matrice de cette chaîne de Markov.
 2. Expliquer pourquoi on a un unique vecteur d'état stationnaire. La convergence du système dépend-elle des conditions initiales ?
 3. Calculer le vecteur d'état stationnaire.