MAT 2742 — devoir #1 (solutions)

A

1. L'ensemble des solutions contient le vecteur nul (car $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Z$) est stable par sommes ($AX = Z$ et $AY = Z$ implique $A(X+Y) = AX + AY = Z + Z = Z$) et par multiplication scalaire ($AX = Z$ implique $A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda Z = Z$). On résoud maintenant le système dont la matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 1 & 0 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 0,5 & \text{-}1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \text{-}1 & \text{-}1 & 0{,}5 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$ (on place -1 en pivot)

$\begin{bmatrix} \text{-}1 & \text{-}1 & 0{,}5 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 1 & 0 \\ 0 & \text{-}1 & 1 & \text{-}1 & 0 \end{bmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + 2.L_1$ (on traite la première colonne)

$\begin{bmatrix} \text{-}1 & \text{-}1 & 0{,}5 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + 1.L_2$ (on traite la deuxième colonne, la matrice est échelonnéee)

$\begin{bmatrix} \text{-}1 & 0 & \text{-}0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 + 1.L_2$ (on traite le haut de la deuxième colonne)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $L_{\text{-}1} \leftarrow 1.L_{\text{-}1}$ (on normalise, la matrice est complètement échelonnée)

On a deux variables libres x_3 et x_4 et les solutions sont les vecteurs de la forme

$$X = \begin{bmatrix} \text{-}0,5x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

En prenant $x_3 = 0, x_4 = 1$ et $x_3 = 1, x_4 = 0$ on obtient deux vecteurs

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} \text{-}0,5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui forment une base de l'ensemble des solutions.

2. On expanse par rapport à la deuxième ligne :
$det(M) = \text{-}det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \text{-}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \text{-}1 & \text{-}1 \end{bmatrix} = \text{-}(1 - (\text{-}1)) - (\text{-}1 - (\text{-}2)) = \text{-}2 - 1 = \text{-}3$
(la matrice est donc inversible)
On démarre avec la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + \text{-}1 \bullet L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 1 \bullet L_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + 0{,}5 \bullet L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $\quad L_3 \leftarrow 2/3 \bullet L_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + \text{-}1 \bullet L_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + 1 \bullet L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow \text{-}1/2 \bullet L_2$

L'inverse est donc $M^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$. (on vérifie le résultat !)

B

1. On calcule (par exemple en faisant une expansion par rapport à la deuxième colonne) $\chi_M = \mathtt{det}(M - x\mathbf{I}) = \text{-}\mathtt{det}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4-x \end{bmatrix} + (1-x)\mathtt{det}\begin{bmatrix} -1-x & -2 \\ 2 & 4-x \end{bmatrix} = \cdots = (0-x)(2-x)(2-x)$. On a donc deux valeurs propres : 0 de multiplicité 1 ; 2 de multiplicité 2.
2. On résout le système $(M - 0\mathbf{I})X = MX = 0$:

   $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + \text{-}1 \bullet L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2 \bullet L_1$

   $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftrightarrow L_3$

   $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow 1/2 \bullet L_2 \quad L_1 \leftarrow \text{-}1 \bullet L_1$

   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + 1 \bullet L_2$

   On a une variable libre x_3 et les solutions sont de la forme $\begin{bmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$. L'espace propre $\mathbf{E}_0$ est donc de dimension 1.

   On résout ensuite $(M - 2\mathbf{I})X = 0$

   $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftrightarrow L_1$

   $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + \text{-}3 \bullet L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2 \bullet L_1$

   $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_2 \leftarrow 1/4 \bullet L_2 \quad L_1 \leftarrow \text{-}1 \bullet L_1$

   $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + 2 \bullet L_2$

   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow L_1 + \text{-}1 \bullet L_2$

   On a une variable libre x_3 et les solutions sont de la forme $\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$. L'espace propre $\mathbf{E}_2$ est donc de dimension 1.

3. La dimension de $\mathbf{E}_2$ est différente de l'ordre de la racine 2 de χ_M la matrice M n'est donc pas diagonalisable.

C

1. On peut modéliser le système dans $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante : une suite de vecteurs $X_n = \begin{bmatrix} c_n \\ p_n \end{bmatrix}$ donnant les stocks de carburant (c_n) et de pétrole (p_n) au mois n avec $X_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 250 \end{bmatrix}$; la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2,1 \\ 0,4 & 0 \end{bmatrix}$ qui donne l'évolution du système, $X_{n+1} = AX_n$.
2. On calcule $\chi_A = x^2 - 2,1.0,4 = x^2 - 0,84 = (x - \sqrt{0,84})(x + \sqrt{0,84})$ donc les valeurs propres de A sont $\sqrt{0,84}$ et -$\sqrt{0,84}$.
3. On a vu en cours que la dimension d'un espace propre est comprise entre 1 et l'ordre de la valeur propre et en particulier, pour une racine d'ordre 1 l'espace est de dimension 1. La matrice A est donc diagonalisable : il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{bmatrix} \sqrt{0,84} & 0 \\ 0 & -\sqrt{0,84} \end{bmatrix}$.

   Mais alors $X_n = A^n = PD^nP^{-1}X_0 = P \begin{bmatrix} \sqrt{0,84}^n & 0 \\ 0 & (-\sqrt{0,84})^n \end{bmatrix} P^{-1}X_0$. Quand $n \to \infty$ on voit que D tend vers la matrice nulle et donc X_n va tendre vers le vecteur nul : à long terme, plus de pétrole ni de carburant.