

# MAT 2742 — devoir #1

À rendre le lundi 28 septembre.

Donner les détails des calculs, pas seulement le résultat.

## A

1. On considère le système linéaire  $AX = Z$  avec  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0,5 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $X \in \mathbb{R}^4$ .

Démontrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ . Résoudre le système et donner une base de l'espace des solutions.

2. On pose  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0,5 \end{bmatrix}$ . Calculer  $\det(M)$  et l'inverse de  $M$ .

## B

On considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice et le factoriser.
2. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice et donner leur dimension.
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

## C

On pose le système dynamique suivant : on a une exploitation pétrolière et une raffinerie. Chaque mois, l'exploitation reçoit le carburant produit par la raffinerie pour faire fonctionner ses machines et extrait du pétrole ; la raffinerie reçoit le pétrole extrait par l'exploitation et le transforme en carburant.

- Avec 1L de carburant, l'exploitation extrait 2,1L de pétrole.
  - Avec 1L de pétrole, la raffinerie produit 0,4L de carburant.
  - Au départ on dispose de 100L de carburant et 250L de pétrole.
1. Reformuler le problème sous forme matricielle.
  2. Trouver les valeurs propres correspondantes.
  3. Sans faire de calculs, pouvez-vous dire ce qu'il se passe à long terme ? (quand  $n \rightarrow \infty$ )  
*Détailler le raisonnement.*