[3] **1.** Combien de mots peut-on former avec les lettres MISSISSIPPI?

Solution: $\begin{pmatrix} & & 11 & \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650$

[3] **2.** Trouver le nombre de solutions en entiers de $y_1+y_2+y_3 = 20$, sujet au conditions que $y_1 \geq 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 2$.

Solution: On pose $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - 1$, $z_3 = y_3 - 3$, et on cherche le nombre de solutions en entiers non-négatifs de $z_1 + z_2 + z_3 = 20 - (1+3) = 16$. C'est $\dbinom{3-1+16}{16} = \dbinom{18}{16} = 143$.

[5] **3.** Utiliser l'induction mathématique pour prouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, pour $n \geq 1$.

Solution: On observe que pour $n = 1$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1 \qquad\qquad \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(1)^2(2)^2}{4} = 1$$

donc c'est valide pour le cas $n = 1$.

On présume que c'est vrai pour $n = k$ et on commence une investigation du cas $n = k+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= (k+1)^3 + \sum_{i=1}^{k} i^3 \\
&= (k+1)^3 + \frac{k^2(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{4(k+1)^3 + k^2(k+1)^2}{4} \\
&= (k+1)^2 \frac{4(k+1) + k^2}{4} \\
&= (k+1)^2 \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

(On a utilisé, à la deuxième ligne, l'hypothèse d'induction.) C'est exactement la formule désirée pour le cas $n = k+1$. Donc par induction c'est vrai pour tout $n \geq 1$.

[5] **4.** Un point intégral est un point dont les coordonnés sont tous des entiers. Supposons qu'on choisit neuf points intégrales dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Montrer que parmi ces neuf points, il existe deux tel que leur mi-point est aussi un point intégral.

Solution: Pour chaque point intégral on a trois coordonnées. Chaque coordonnée est soit pair ou impair, ce qui donne huit sortes de points.

$$\begin{array}{llll}
(pair, pair, pair) & (pair, pair, impair) & (pair, impair, pair) & (pair, impair, impair) \\
(impair, pair, pair) & (impair, pair, impair) & (impair, impair, pair) & (impair, impair, impair)
\end{array}$$

On a neuf points au total donc il existe au moins deux points de la même sorte, par le principe des pigeons (les points sont les pigeons, les sortes sont les nids). Étant deux point du même sorte, leur somme est un point de la sorte

$$(pair, pair, pair)$$

donc leur mi-point serait un point intégral.

[5] **5.** a) Combien des entiers n avec $1 \leq n \leq 600$ ne sont divisible par aucun de 2, 3, 6?

b) Combien des entiers n avec $1 \leq n \leq 600$ sont divisible par exactement un de 2, 3, 6?

Solution:

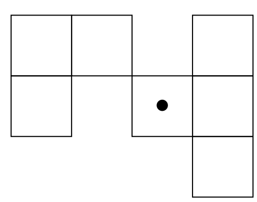
a) On observe que n n'est pas divisible par 6 si et seulement si n n'est divisible par ni 2 ni 3. Donc il suffit de compter le nombre de n qui ne sont divisible par ni 2 ni 3. Ce qui donne deux conditions. On cherche $E_0 = \overline{N}$ avec le principe d'inclusion-exclusion. Il y a alors deux conditions, disant "ne pas divisible par x" où x est 2, 3.

$$\overline{N} = N - S_1 + S_2 = 600 - \left(\left\lfloor \frac{600}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor \right) = 600 - (300 + 200) + (100) = 200$$

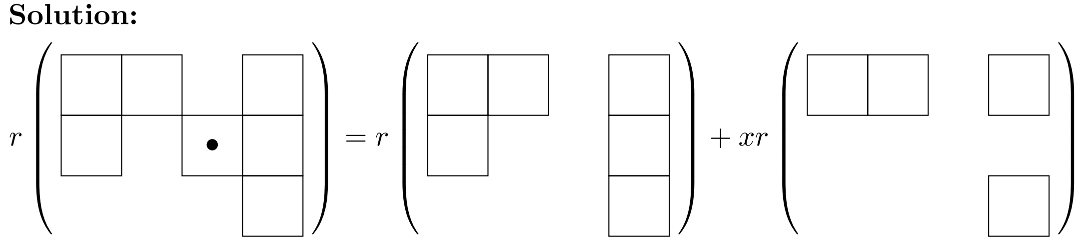
b) Si n est divisible par 6 alors n est divisible par 2, 3 et 6, donc pas divisible par exactement un de ces chiffres. Il suffit alors de compter le nombre de n qui sont divisible par exactement un de 2, 3. On cherche E_1 avec le principe d'inclusion-exclusion. Il y a alors deux conditions, disant "ne pas divisible par x" où x est 2, 3.

$$E_1 = \binom{1}{1} S_1 - \binom{2}{1} S_2 = 1 \times \left(\left\lfloor \frac{600}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor \right) - 2 \times \left(\left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor \right) = 1(300 + 200) - 2(100) = 300$$

[4] **6.** Utiliser une étape de la récursion $r(C; x) = r(C_e; x) + xr(C_s; x)$ pour l'échiquier donné, commençant avec le carré indiqué. Ce n'est pas nécessaire de calculer le polynôme $r(C; x)$ explicitement, seulement de faire une application de la récursion.



Solution:



[5] **7.** Soit les conditions $y_1 \geq 0$, $2 \leq y_2 \leq 10$, $y_3 > 0$, $y_4 > 5$, et y_3 un multiple de 2, y_4 un multiple de 5.

a) Soit a_r le nombre de solution non-négatives en entiers de pour $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = r$ sujet au conditions données. Donner une forme compacte pour la fonction génératrice $F(x) = \sum_{r \geq 0} a_r x^r$.

b) Soit b_r le nombre de solution non-négatives en entiers de pour $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq r$ sujet au conditions données. Donner une forme compacte pour la fonction génératrice $G(x) = \sum_{r \geq 0} b_r x^r$.

Solution:

a) On a un facteur pour chaque variable.

$$
\begin{aligned}
F &= (1 + x + x^2 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(x^{10} + x^{15} + x^{20} + \cdots) \\
&= \frac{1}{1-x} \times \frac{x^2 - x^{11}}{1-x} \times \frac{x^2}{1-x^2} \times \frac{x^{10}}{1-x^5} \\
&= \frac{x^{14}(1-x^9)}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^5)}
\end{aligned}
$$

b) On voit que $b_r = \sum_{k=0}^{r} a_k$, une somme partielle.

$$
G = \frac{1}{1-x} F = \frac{x^{14}(1-x^9)}{(1-x)^3(1-x^2)(1-x^5)}
$$

[4] **8.** Soit p_n le nombre de partitions de n tel que chaque partie est de la forme 2^k, $k \geq 0$. Donner une forme compacte pour la fonction génératrice $P = \sum_{n \geq 0} p_n x^n$.

Solution: On permet seulement les parties de la forme 2^k. Pour chaque valeur de k on obtient la contribution suivante.

$$
(1 + x^{2^k} + x^{2 \times 2^k} + x^{3 \times 2^k} + \cdots) = (1 + x^{2^k} + (x^2)^{2^k} + (x^3)^{2^k} + \cdots) = \frac{1}{1 - x^{2^k}}
$$

On prend le produit pour tout k.

$$
\prod_{k \geq 0} \frac{1}{1 - x^{2^k}}
$$

[4] **9.** Soit $a_n = n^2 + n$, $n \geq 0$, et $A = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Donner une forme compacte pour A.

Solution: On sait que

$$
x \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} x^n = \sum_{n \geq 0} n x^n \qquad x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} x^n \right) = x \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} n x^n = \sum_{n \geq 0} n^2 x^n
$$

On prend la somme.

$$\begin{aligned}
A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(n^2+n)x^n &= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right) + x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \\
&= x\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2x}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

[4] **10.** On sait que $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$. Utiliser cette identité et la méthode des fonctions génératrices pour prouver $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$, pour $m, n \geq 0$.

Solution: On voit que $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$. On extrait des coefficients de chaque côté, qui doivent être égal.

$$\begin{aligned}
[x^r]\,(1+x)^{m+n} &= \binom{m+n}{r} \\
[x^r]\,(1+x)^m(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{r}\left([x^{r-k}]\,(1+x)^m\right)\left([x^k]\,(1+x)^n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Donc $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$.

[6] **11.** Trouver la solution pour chacune des récurrences suivantes.

a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ avec $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ avec $a_0 = 3$, $a_1 = 8$

c) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 8 \times 3^n$ avec $a_0 = 5$, $a_1 = 8$

Solution:

a) On a le polynôme caractéristique $y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3)$. Donc la récurrence est de la forme $a_n = \alpha(2)^n + \beta(3)^n$. On calcul les coefficients à l'aide des conditions initiales.

$$\begin{aligned}
3 = a_0 = \alpha(2)^0 + \beta(3)^0 &= \alpha + \beta \\
7 = a_1 = \alpha(2)^1 + \beta(3)^1 &= 2\alpha + 3\beta
\end{aligned}$$

On résout ce système pour donner $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

$$a_n = 2(2)^n + (3)^n$$

b) On a le polynôme caractéristique $y^2 - 4y + 4 = (y-2)(y-2)$. La racine est répétée, donc on a une récurrence de la forma $a_n = \alpha(2)^n + \beta n(3)^n$

$$\begin{aligned} 3 = a_0 &= \alpha(2)^0 + 0\beta(2)^0 = \alpha \\ 8 = a_1 &= \alpha(2)^1 + 1\beta(2)^1 = 2\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

On résout ce système pour donner $\alpha = 3$ et $\beta = 1$.

$$a_n = 3(2)^n + n(2)^n = (3+n)(2)^n$$

c) C'est une récurrence non-homogène. On identifie le polynôme caractéristique $y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1)$. Le second membre est exponentielle mais la base n'est pas racine du polynôme. On a donc une solution particulière de $\gamma(3)^n$. On calcul γ directement, sans utiliser les condition initiales.

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n &= 8 \times 3^n \\ \gamma(3)^{n+2} - 3\gamma(3)^{n+1} + 2\gamma(3)^n &= 8(3)^n \\ (9\gamma - 9\gamma + 2\gamma)3^n &= 8(3)^n \\ 2\gamma &= 8 \\ \gamma &= 4 \end{aligned}$$

On a une solution générale de la forme $a_n = \alpha(2)^n + \beta(1)^n + 4(3)^n$.

$$\begin{aligned} 5 = a_0 &= \alpha(2)^0 + \beta(1)^0 + 4(3)^0 = \alpha + \beta + 4 \\ 8 = a_1 &= \alpha(2)^1 + \beta(1)^1 + 4(3)^1 = 2\alpha + \beta + 12 \end{aligned}$$

On résout ce système pour donner $\alpha = -5$ et $\beta = 6$.

$$a_n = -5(2)^n + 6(1)^n + 4(3)^n$$

[3] **12.** Soit $a_n = 2^n + 3^n + 4^n$. Trouver une récurrence homogène satisfait par a_n; donner aussi un nombre suffisant de conditions initiales pour déterminer la récurrence uniquement.

Solution: Évidemment le polynôme caractéristique est $(y-2)(y-3)(y-4) = y^3 - 9y^2 + 26y - 24$. Ceci donne la récurrence $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$. Il faut trois conditions initiales, car l'ordre est 3.

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^0 + 3^0 + 4^0 = 3 \\ a_1 &= 2^1 + 3^1 + 4^1 = 9 \\ a_2 &= 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29 \end{aligned}$$

[3] **13.** Soit d_n le déterminant de la matrice avec 3 sur le diagonale et 1 au sur-diagonale et sous-diagonale.

$$d_n = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Trouver une récurrence satisfait par d_n et donner aussi les conditions initiales.

Solution: On calcul le déterminant par expansion de la première rangée, et ensuite dans la première colonne.

$$
\begin{aligned}
d_n &= \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 3\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix} - 1\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 3d_{n-1} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 3d_{n-1} - \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 3d_{n-1} - d_{n-2}
\end{aligned}
$$

Donc on a $d_n = 3d_{n-1} + d_{n-2}$. C'est valide pour $n \geq 2$, car autrement on n'aurait pas pu enlever deux rangées et colonnes. On a besoin de 2 conditions initiales, car l'ordre est 2.

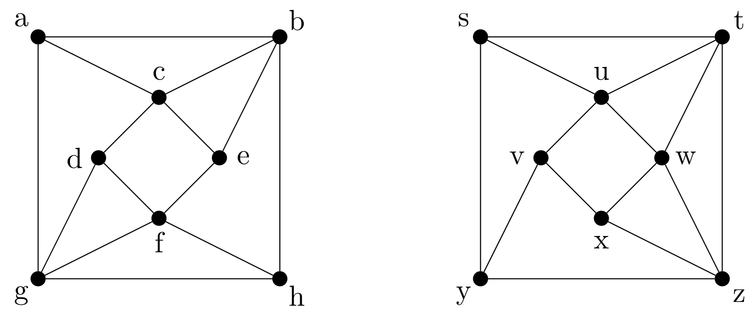
$$d_0 = \det \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = 1 \qquad\qquad d_1 = \det \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = 3$$

[6] **14.** Soit G_1 et G_2 les deux graphes suivants.

a) Donner les degrés de chaque sommet de G_1 et de G_2.

b) Trouver tous les sous-graphes de G_1 qui sont isomorphiques à K_3, le graphe complet sur 3 sommets (un triangle). Faire de même pour G_2.

c) Est-ce que les deux graphes sont isomorphiques? Justifier!



G_1 G_2

Solution:

a) Parmi G_1, les sommets $\{a, d, e, h\}$ sont de degré 3 et $\{b, c, f, g\}$ sont de degré 4. Parmi G_2, les sommets $\{s, v, x, y\}$ sont de degré 3 et $\{t, u, w, z\}$ sont de degré 4.

b) Parmi G_1 on a les triangles $\{abc, bce, hgf, gfd\}$. Parmi G_2 on a les triangles $\{stu, tuw, tzw, zwx\}$.

c) Non. Dans G_1 tout sommet est contenu dans au moins un triangle. Dans G_2 les sommets v et y ne sont contenu dans aucun triangle. Alternativement, dans G_1 aucun pair de sommets de degré 2 sont adjacents, mais dans G_2 on a $s \sim y$, chacun de degré 2. Alternativement ...