

De la mécanique galiléenne à la relativité restreinte

T.I.P.E. 2005 - Erreurs et progrès

Rapport ENS

Julien Baglio

20 juin 2005

Depuis l'avènement de la mécanique de Newton et suite à Galilée, les lois de la mécanique dite classique reposent essentiellement sur le principe fondamental de la dynamique, qui implique le principe d'inertie : une particule isolée est soit immobile, soit en translation rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Cette classe de référentiels, où ceux-ci sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, est une classe "où tout se passe bien" : les lois de la physique ont une expression relativement simple. A la base de ce principe se retrouve la simultanéité des actions, le découplage temps-espace, ainsi que l'invariance du temps par changement de référentiel.

Or le XIX^e siècle va introduire de nouvelles théories qui vont peu à peu remettre en cause la relativité galiléenne. L'une d'entre elles est la théorie de l'électromagnétisme, dont les équations d'évolution furent introduites par Maxwell en 1864. Or elles prédisent l'existence d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière $c = 300000 \text{ km.s}^{-1}$. Des expériences réalisées par la suite ont montré que cette vitesse est invariante par changement de référentiel, ce qui est en contradiction flagrante avec la mécanique newtonienne ! Il fut donc nécessaire d'introduire une nouvelle mécanique : la relativité restreinte, qui vit le jour en 1905 avec Einstein, suite aux avancées de Lorentz et Poincaré dans ce domaine. Le temps n'est plus une donnée absolue, ce qui fut une remise en cause radicale de notre vision du monde, et devint le point de départ de la physique du XX^e siècle.

Après un bref rappel de la transformation de Galilée, ainsi que d'une des quatre équations de Maxwell, nous décrirons l'expérience réalisée en laboratoire afin de mettre en évidence de manière expérimentale la nécessité d'une nouvelle physique. Enfin, nous verrons les concepts qualitatifs de la relativité restreinte, ainsi que la transformation de Lorentz et la formule de l'énergie.

1 Newton et Maxwell : un désaccord révolutionnaire

Lorsque Maxwell introduit ses équations en 1864 dans le but de décrire l'évolution du champ électromagnétique, il introduit dans le monde physique un doute concernant la validité de la mécanique de Newton. Pendant vingt années, les physiciens vont tenter de résoudre le problème de l'invariance de ces équations et de l'invariance de la vitesse de la lumière par de nombreux moyens théoriques, dont l'un d'eux était l'introduction d'un milieu appelé "éther" dans lequel se propageraient les ondes électromagnétiques. L'expérience de Michelson-Morley apporta la preuve expérimentale de la non-validité d'un tel raisonnement.

Nous allons maintenant voir rapidement quels éléments nous permettent d'affirmer que Maxwell et Newton sont "en désaccord".

1.1 La transformation de Galilée

Le postulat de Newton est le suivant : *il existe une classe de référentiels appelés "référentiels galiléens" en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres dans lesquels les lois de la physique ont même forme.* De plus, le temps est une donnée absolue, totalement découplée de l'espace.

Il y a simultanéité des actions : deux actions se déroulant en même temps dans un référentiel se dérouleront aussi en même temps dans un autre référentiel galiléen. Le temps s'écoule également sans relation avec quoi que ce soit qui lui soit extérieur ¹. Si on choisit deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, alors en prenant l'axe des x comme axe directeur de la translation (sans restreindre pour autant la généralité) on obtient la transformation de Galilée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

On a noté (x, y, z, t) et (x', y', z', t') les coordonnées d'un même événement respectivement dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' avec $\vec{V} = V\vec{e}_x = \vec{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. Il en découle la loi habituelle de composition des vitesses : $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$.

Cette transformation implique donc que toute vitesse peut devenir infinie par compositions successives.

1.2 L'équation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est la suivante : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (1.1). Elle relie le flux du champ électrique à travers une surface fermée à la charge contenue dans le volume créé par cette surface.

Or il apparaît que l'étude de sa transformation par changement de référentiel dans le cadre newtonien montre que la forme de l'équation n'est pas invariante.

¹NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687

Cela est en contradiction flagrante avec l'un des postulats de la mécanique classique newtonienne ! Il est donc nécessaire de se poser la question suivante : la théorie de Maxwell est-elle à revoir, ou faut-il inventer une nouvelle physique ?

En fait, derrière ce problème se cache l'invariance de la vitesse de la lumière, qui est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques. Il semble donc que le temps ne doit plus rester absolu, et que si la vitesse de la lumière le remplace comme invariant, on peut alors construire la théorie de la relativité restreinte qui résout le problème ; nous verrons dans la troisième partie les concepts de cette théorie.

2 La confirmation expérimentale de la relativité restreinte

Nous avons vu en première partie comment l'on pouvait mettre en défaut la mécanique de Newton à l'aide des équations de Maxwell. Nous allons maintenant aborder dans cette seconde partie une expérience proche de celle réalisée pour la première fois en 1964 par Bertozzi, afin de confirmer la théorie de la relativité restreinte. L'expérience de Bertozzi repose sur le principe suivant : si l'on abandonne les hypothèses essentielles de la mécanique de Newton et notamment celle du temps absolu, alors les lois de vitesses doivent aussi changer, et la formule de l'énergie cinétique d'une particule aussi ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$), du moins pour des particules évoluant à des vitesses proches de la lumière puisque le défaut se pose à cette échelle (on rappelle qu'une onde électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière, et c'est son invariance qui est caché derrière le problème soulevé en première partie). On doit donc pouvoir mesurer indépendamment vitesse et énergie cinétique pour une particule et montrer que le graphe obtenu de l'énergie en fonction du carré de la vitesse n'est pas une droite.

L'expérience ici réalisée utilise un accélérateur de particule de type Van de Graaff, au sein de l'UMR CNRS-CEA 7642 (Laboratoire des Solides Irradiés, École Polytechnique) avec l'aide de chercheurs de l'UMR CNRS 7488 (Institut des NanoSciences de Paris, Campus Jussieu).

Cette section est divisée en trois points : nous verrons d'abord le principe de fonctionnement d'un accélérateur de type Van de Graaff, puis nous aborderons dans un second temps l'expérience proprement dite, en décrivant le protocole expérimental. Enfin les résultats obtenus seront décrits et analysés et nous en proposerons une première interprétation, qui sera éclairée par la suite dans la troisième section de cet exposé.

2.1 Principe de l'accélérateur de Van de Graaff

2.1.1 Principe général d'un accélérateur de particules

Les électrons sont chargés électriquement, et vont donc subir l'action d'un champ électrique qui va les accélérer : classiquement ils subissent une force $\vec{F} = -e\vec{E}$ donc l'accélération de l'électron est $\vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m}$. Ils acquièrent ainsi une énergie eV où V est la différence de potentiel qui est source du champ électrique d'accélération (dans le cas de l'accélérateur électrostatique).

Afin de focaliser le faisceau constitué de particules de même charge électrique, on utilise un champ magnétique : en notant $(0, z)$ la direction de la trajectoire du faisceau, on combine un champ magnétique en x et un champ magnétique en y (dispositif appelé lentille quadripolaire), puis on lui superpose un deuxième dispositif identique à 90 degré de l'autre ce qui assure un effet focalisateur, car $F_x = ev_z B_y$ (effet attractif) et $F_y = -ev_z B_x$ (effet dispersif).

2.1.2 Description du Van de Graaff

L'accélérateur Van de Graaff est un accélérateur électrostatique linéaire. Il repose sur le principe suivant : si on approche une particule chargée d'une sphère métallique creuse conductrice non chargée, toute la charge se répartit en surface pour un conducteur parfait et il se crée un potentiel $V = \frac{q}{C}$ où C est la capacitance de la sphère. Cette capacitance se calcule aisément : pour une sphère conductrice homogène, le potentiel est $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ donc ayant $q = CV$ par définition, on a $C = 4\pi\epsilon_0 R$ avec R rayon de la sphère.

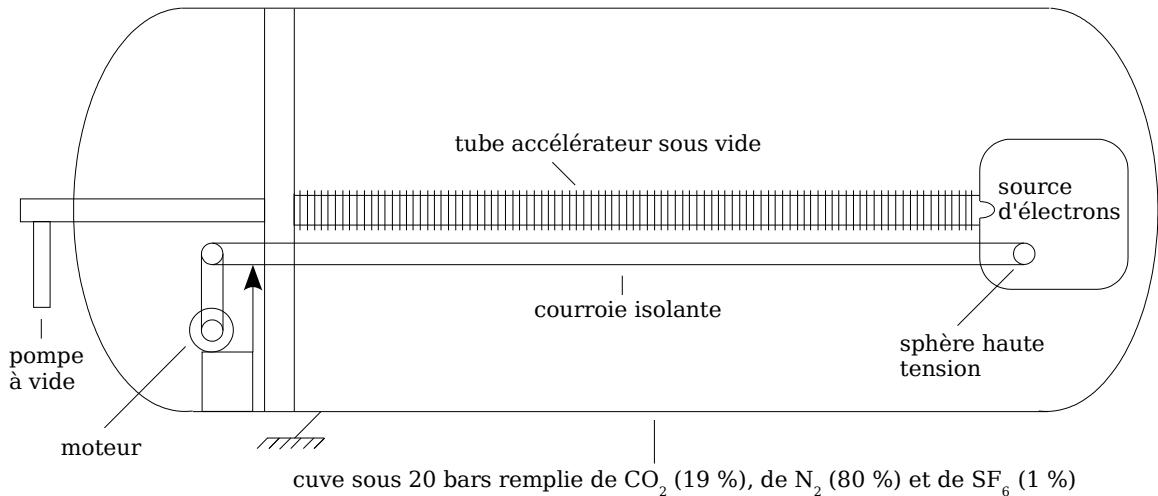


Fig. 1: Schéma de l'accélérateur Van de Graaff

On dispose donc d'un système permettant de créer une différence de potentiel entre cette sphère et une masse. Dans le Van de Graaff, on utilise un petit générateur qui fournit des particules chargées, qui à l'aide d'un balai en cuivre et par effet de pointe sont amenées sur une courroie isolante, elle-même amenant ces particules à la sphère (le terminal haute tension) qui se charge. Ainsi l'on crée une différence de potentiel entre la base et la sphère. L'ensemble est enfermé dans la cuve, mise au potentiel de la masse et remplie d'un gaz isolant (en général un mélange de SF_6 et de dioxyde d'azote, ce dernier jouant sur la tension de claquage du diélectrique et refroidissant le moteur) à 20 atm, ce qui permet d'augmenter la tension de claquage, donc de retarder les décharges entre le terminal et les parois de la cuve. On peut ainsi repousser la

limite en tension à 20 MV au lieu de 3 MV avec l'air sec.

On complète le dispositif avec une source d'électrons placée au terminal, puis un tube accélérateur sous vide dans lequel les électrons sont accélérés vers la masse car $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ pour un champ électrostatique. Pour assurer une accélération linéaire, on entoure le dispositif de la courroie isolante avec des gaines isolantes en verre, collées entre elles par des plans métalliques. Chacun d'eux est conducteur, et ils sont reliés par une résistance de plus de 5 M Ω . On impose une différence de potentielle égale entre chaque plan et la somme des résistances est pratiquement de 500 M Ω .

2.2 Principe de l'expérience

Le principe de l'expérience repose sur le mouvement d'une particule chargée placée dans un champ magnétique permanent : ce dernier ne communique pas d'énergie à une particule, mais permet d'incurver sa trajectoire. Ainsi, nous accélérons les électrons dans le tube du Van de Graaff, puis nous incurvons leur trajectoire grâce à un aimant ; puis les électrons percutent une plaque de verre fluorescente, laissant une trace sur cette dernière permettant de repérer le flux d'électrons dans le plan de la plaque. Au fur et à mesure que l'énergie souhaitée pour les électrons grandit, nous modifions le champ magnétique afin que le rayon de la trajectoire circulaire finale (dans le champ magnétique) reste constant, ce qui est possible en ajustant selon la trace sur la plaque de verre. Nous relevons donc l'énergie de la particule en fonction de l'intensité du champ magnétique.

En effet, classiquement on a, en notant \vec{B} le champ magnétique et B sa norme, e la charge élémentaire, m la masse de l'électron et R le rayon de la trajectoire circulaire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ et le rayon de la trajectoire est donc donné par } mv = eRB.$$

$$\text{Donc ayant } \mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ on a } \mathcal{E} = \frac{e^2 R^2}{2m} B^2.$$

Si le tracé de l'énergie en fonction du carré du champ magnétique ne donne pas une droite, nous aurons donc prouvé la déficience des lois newtoniennes pour les vitesses proches de c .

Principe de l'expérience

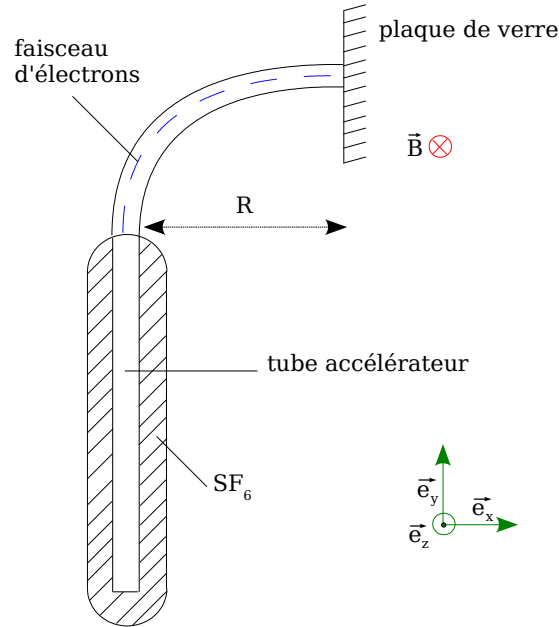


Fig. 2: Principe de l'expérience, déviation par le champ magnétique

Une étude préliminaire des erreurs possibles a été conduite, en utilisant pour cela des résultats relativistes (ceci afin d'être sûr que l'expérience était viable). Deux points essentiels ont été vérifiés : la différence entre champ magnétique appliqué dans un cas classique et dans un cas relativiste (il faut que la différence soit significative, sinon le cas relativiste n'est pas détectable) ainsi que les pertes énergétiques dues au rayonnement des électrons dans le champ magnétique. Un calcul donne pour le premier point, sur la plage d'énergie 500 keV - 2,5 MeV, en notant B_{cl} le champ dans le cas classique, et B_{rel} le champ dans la situation relativiste, $\frac{B_{rel}}{B_{cl}} = \gamma$ le facteur de Lorentz. En effet $B_{cl} = \frac{mv}{eR}$, $B_{rel} = \frac{\gamma mv}{eR}$, fournissant $1,978 \leq \gamma \leq 5,886$, parfaitement détectable. En ce qui concerne le second point, l'emploi de la formule de Lienard (dont la justification, reposant sur des calculs assez lourds, ne sera pas donnée - signalons juste qu'il s'agit de partir de la formule de Larmor et d'appliquer une transformation de Lorentz de l'accélération) nous donne une perte énergétique, par tour, de

$$\Delta E = \frac{ev^3}{3\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 \frac{1}{R}$$

Pour un électron de vitesse v dans une trajectoire circulaire de rayon R . Pour la plage d'énergie donnée, cela nous donne au maximum (pour $E=2,5$ MeV, rayon de 10 cm) une perte de $6,5 \cdot 10^{-5}$ eV, ce qui est totalement négligeable en regard des énergies employées ici.

2.3 Expérience et résultats

L'expérience a eu lieu le 17 juin 2005 à l'École Polytechnique, et a duré six heures. En effet, entre chaque mesure, il était nécessaire de refocaliser le faisceau et de s'assurer de la disparition des champs magnétiques rémanants.

La marge d'incertitude sur la mesure à l'écran de contrôle de la trace du faisceau est de 1 mm par rapport à la plaque qui fait 20 mm de diamètre. L'incidence sur les résultats est donc faible. En revanche, il existe une certaine incertitude sur l'indicateur de tension, de l'ordre de 60 keV.

La mesure a consisté en le relevé du courant appliqué à l'aimant d'analyse, sachant que la relation champ-courant est linéaire et qu'un champ de 236 Gs correspond à un courant de 4,649 A. Son rayon de courbure est de 420 mm (données techniques). Voici le tableau des données :

Énergie (keV)	Courant de recentrage (A)
500	1,31
750	1,70
1000	2,10
1250	2,47
1500	2,85
1700	3,13
1900	3,42
2100	3,72
2300	4,00
2500	4,30

Le premier graphe présenté dans l'annexe (s'y référer) compare le graphe expérimental obtenu avec ces données, et le graphe théorique newtonien.

Clairement, les graphes sont bien distincts : même en tenant compte d'une marge d'incertitude éventuellement plus importante sur la donnée de l'énergie, le graphe expérimental n'est certainement pas une droite, et tend plutôt à être une parabole. Ce résultat n'est pas explicable par la formule newtonienne $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$.

La prochaine section introduit donc la relativité, qui fournit la bonne interprétation du phénomène.

3 Une introduction à la relativité restreinte

Après avoir vu quels sont les éléments théoriques et expérimentaux qui impliquent une obligation de changement de cadre de la physique, nous allons nous pencher sur les concepts fondamentaux de la relativité restreinte, introduite par Einstein dans deux articles fondamentaux en 1905 (le premier le 30 juin, sur la relativité restreinte, le second le 17 septembre sur sa célèbre formule $E = mc^2$) pour pallier les défauts de la mécanique newtonienne mis en évidence aux parties I et II.

3.1 Les postulats relativistes

Le principe fondamental de la relativité restreinte reste le principe galiléen : *il existe une classe de référentiels dits galiléens, tous en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres et dans laquelle les lois de la physique ont même forme.*

Einstein y ajoute alors le postulat suivant, tout aussi fondamental, qui remplace celui de temps absolu : *la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel choisi.* Ce postulat est une conséquence de l'invariance que l'on souhaite imposer des équations de Maxwell par changement de référentiel, et donc que la vitesse de la lumière dans le vide c est alors invariante par changement de référentiel.

La notion de simultanéité est ainsi remise en cause, et des événements simultanés peuvent se dérouler en des temps différents suivant le référentiel choisi.

3.2 Transformation de Lorentz

Changement de référentiel

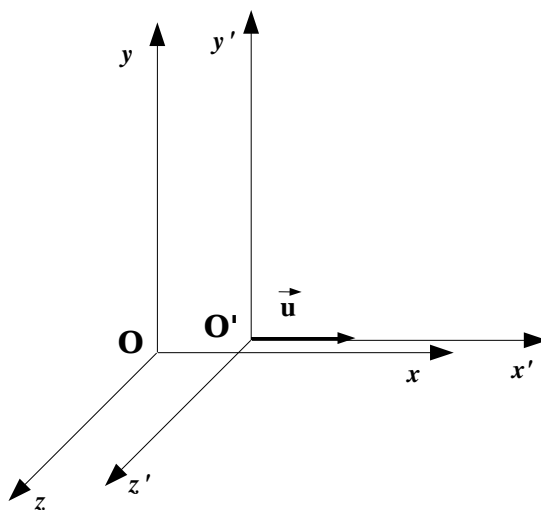


Fig. 3: A tout instant, Ox et Ox' coïncident et les axes des deux repères sont parallèles

On indique rapidement la forme explicite du changement de référentiel galiléen. On considère uniquement le cas d'une transformation spéciale, et on se place dans le cadre de la figure 3.2 . Cette transformation se doit d'être linéaire, par isotropie et homogénéité de l'espace-temps

(dans le cas contraire, cela dépasse le cadre de l'exposé).

On se contente ici de donner les résultats, mais nous pouvons quand même indiquer que la démonstration repose sur l'invariance de l'intervalle, défini par $ds^2 = c^2t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, et qui découle de l'étude de la vitesse de la lumière en relativité.

Voici la forme spéciale de la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases}$$

Avec le référentiel \mathcal{R}' en mouvement à vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} , avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

On retrouve bien les transformations classiques dans l'approximation $u \ll c$.

3.3 Énergie relativiste

Pour généraliser la notion de vecteur utile en mécanique classique, on introduit ce qu'on appelle un 4-vecteur : c'est un vecteur de l'espace vectoriel de dimension 4 de Minkowski (l'espace-temps muni de l'intervalle) dont le changement de base suit la loi matricielle de la transformation de Lorentz.

On définit aussi un 4-scalaire comme étant une quantité scalaire invariante par changement de référentiel (donc de base), par exemple la masse d'une particule, la vitesse de la lumière, l'intervalle ou le produit scalaire de deux 4-vecteurs.

On note un 4-vecteur dans une base donnée par (a, \vec{b}) où a désigne la coordonnée temporelle et \vec{b} les trois coordonnées spatiales.

3.3.1 4-vecteurs vitesse et énergie-impulsion

On part du 4-vecteur position d'une particule $R = (ct, \vec{r})$ dans un référentiel \mathcal{R} . Pour obtenir le 4-vecteur vitesse, on paramètre l'évolution de la particule par un 4-scalaire : le temps propre $d\tau$, défini comme étant le temps dans le référentiel où la particule est au repos (référentiel tangent), et donc par $dt = \gamma d\tau$. C'est un invariant relativiste, car intraséquement lié à la particule. On introduit donc $U = \frac{dR}{d\tau}$. Sachant que $dt = \gamma d\tau$ on a donc :

$$U = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

avec \vec{v} vitesse de la particule dans le référentiel \mathcal{R} et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. $\gamma \vec{v}$ est la célérité, c'est-à-dire une vitesse calculé dans l'espace du référentiel donné, et dans le temps propre de la particule.

On peut maintenant introduire le 4-vecteur énergie impulsion $P = mU$ c'est-à-dire $P = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$. On a alors $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ vecteur quantité de mouvement relativiste, que l'on nomme impulsion : on retrouve bien la quantité de mouvement classique pour $v \ll c$.

3.3.2 Une formule essentielle de relativité restreinte

Si on reprend le 4-vecteur énergie-impulsion, on constate que sa partie temporelle a la dimension d'une énergie sur une vitesse. D'où l'introduction de l'énergie de la particule : $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ et on écrit $P = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right)$.

Sachant que le carré scalaire d'un 4-vecteur est un invariant relativiste, on a $\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2 c^2$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Cette formule est très importante et elle est valable dans n'importe quel référentiel galiléen. On peut la représenter géométriquement ainsi :

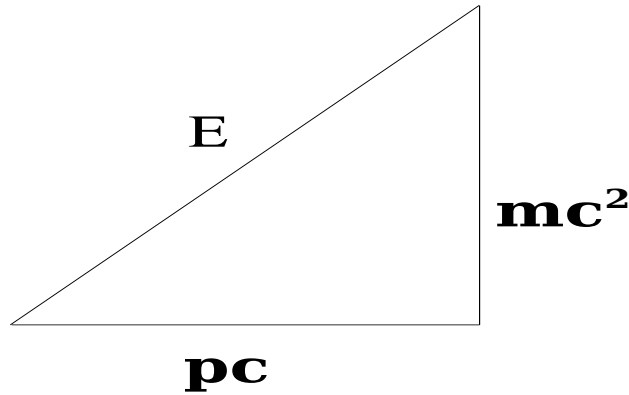


Fig. 4: Triangle relativiste de l'énergie : on applique le théorème de Pythagore, et on obtient la formule de l'énergie relativiste

Enfin, si l'on développe au premier ordre la formule $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ (vitesses faibles devant c), on a $\gamma = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ et donc $\mathcal{E} = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2$: on reconnaît l'énergie cinétique classique, avec une constante supplémentaire. Au repos, la particule a donc l'énergie $\mathcal{E} = mc^2$: physiquement, une particule possède de l'énergie du seul fait de sa masse, ce qui implique que la transformation masse-énergie est envisageable. Nous venons de démontrer une des formules les plus célèbres de la physique.

On note alors l'énergie cinétique de la particule $K = \mathcal{E} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$; cette formule explique de manière satisfaisante les résultats obtenus dans la partie II (voir le graphe obtenu

en appliquant cette formule dans l'annexe), et qui confirme expérimentalement la relativité restreinte.

Conclusion

L'examen théorique des équations de Maxwell, puis l'expérience réalisée en laboratoire à l'aide d'un accélérateur de particules nous ont permis de mettre en doute la théorie de Newton d'une part, et de poser et confirmer la théorie de la relativité restreinte introduite par Einstein en 1905 d'autre part. Cependant, cette théorie ne prend pas en compte les effets d'accélération d'un référentiel, et n'arrivera jamais à prendre en compte efficacement les effets de la gravitation ; il faudra attendre 1915 et la théorie de la relativité générale pour résoudre ce problème, où un saut conceptuel encore plus important est franchi avec l'hypothèse d'un espace-temps non plus plat mais courbé par la présence de matière.

Références

- [1] Approche expérimentale de la relativité restreinte. 2002.
URL: <http://physp6www.cicrp.jussieu.fr/enseignement/bobin/Rel-net-1.pdf>
- [2] C. COHEN-TANNOUJJI, A. ASPECT, J. DALIBARD, ET D'AUTRES. Conférence Einstein Aujourd'hui, Ecole Normale Supérieure, 08 février 2005.
- [3] M. CROZON ET F. VANNUCCI. *Les particules élémentaires*. PUF, 1993, pp. 44–53.
- [4] A. EINSTEIN. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik, 17, 1905, pp. 891–921.
- [5] A. EINSTEIN. *Lecture Notes for Course on Relativity at the University of Berlin*. Original conservé à l'Université de Jérusalem, hiver 1914-1915, pp. 44–68.
- [6] G. FAIVRE. *Importance des symétries et des groupes en physique*. 1998, pp. 71–74.
- [7] F. G. MOISAN ET L. BARRIAULT. Accélérateurs de particules. 2003.
URL: <http://feynman.phy.ulaval.ca/marleau/pp/04accelerateurs/AccelerateursdeParticules.htm>
- [8] I. NEWTON. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.
- [9] J-M. RAIMOND. *Électromagnétisme et relativité*. Laboratoire Kastler Brossel, 10 octobre 2000, ch. 2, pp. 73–119.
- [10] P. RAIMOND ET L. MARLEAU. *Mécanique classique I*. Université de Laval (Quebec), 1999, révision le 18 août 2004, ch. 2-3, pp. 23–26 et 35–43.
- [11] C. SAINT-BLANQUET. *Théorie de la relativité*. Université de Nantes, ch. 2-3, pp. 23–26 et 35–43.
URL: <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/synophys/51relat/51relat.htm>