Moment magnétiques des hadrons et masse des quarks

Julien Baglio*
Département de physique, ENS Cachan
61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan, France

(Dated: July 12, 2007)

Le modèle actuel décrivant les hadrons en physique des particules s'appuie sur le modèle des quarks, décrit pour la première fois par Gell-Mann et Néman en 1964 [1]. Pour prendre un exemple, le proton est ainsi décrit comme constitué de deux quarks up et d'un quark down. Chaque quark est caractérisé par sa charge, son spin et une troisième charge : la charge de couleur nécessaire à la description des interactions fortes à l'origine de la stabilité nucléaire. Le but de cet article est de proposer un calcul très simple permettant de remonter à la masse dite constituante des quarks via les résultats expérimentaux sur les moments magnétiques des hadrons. Les limites - importantes - de ce calcul seront aussi abordées.

I. INTRODUCTION ET LIMITE DU MODÈLE UTILISÉ

A. Modèle des quarks

Les quarks sont des particules élémentaires fermioniques , de spin 1/2 et possédant une charge électrique, une saveur et une charge de couleur. Il existe 6 saveurs : up (u), down (d), étrange (s), beauté (b) et top (t), ainsi que trois couleurs : rouge (r), bleu (b) et vert (v).

Mathématiquement, les quarks sont issus de la représentation fondamentale **3** du groupe SU(3) de l'interaction forte qui est à l'origine de la stabilité nucléaire (les antiquarks étant décrits par la représentation $\bar{\mathbf{3}}$). Les baryons sont des états liés de trois quarks, les mésons sont des états liés de 2 quarks. Afin de respecter le principe de Pauli, un état de trois quarks est antisymétrique sous l'échange de la couleur, et symétrique sous l'échange de spin-saveur (pour s'en convaincre il suffit d'étudier le baryon Δ^{++}, d'isospin fort 3/2, de spin 3/2 et de charge 2e).

Dans toute la suite, seule la partie spin-saveur va nous intéresser pour obtenir les relations entre moments magnétiques des hadrons et moments magnétiques des quarks.

B. Méthode et limites du calcul présenté ici

Pour remonter à la masse des quarks via les moments magnétiques des hadrons, on se base sur l'idée suivante : le quark est une particule fondamentale de spin 1/2, donc en vertu de l'équation de Dirac on connaît la relation entre moment magnétique et masse :

$$\mu = \frac{q\hbar}{2m} \tag{1}$$

Ainsi, en reliant moment magnétique des hadrons (mesurés expérimentalement) et moment magnétique des quarks, on accède à la masse des quarks.

Quelles sont les limites de ce modèle apparamment très simple ? Elles sont nombreuses, liées à notre description très grossière. En effet on oublie dans un premier temps les corrections radiatives rencontrées en théorie quantique des champs ; mais surtout on oublie aussi toutes les contributions liées à la charge de couleur et aux échanges quarks-gluons. Finalement, ce calcul ne nous donne pas la masse des quarks libres, mais une masse corrigée que l'on appelle masse constituante, en oubliant les corrections radiatives.

II. CALCUL DE LA RELATION ENTRE MOMENT MAGNÉTIQUE DES BARYONS ET MOMENT MAGNÉTIQUE DES QUARKS

A. Expression des vecteurs d'état spin-saveur

Notons I le spin total d'un baryon, m sa troisième composante et $\wedge \equiv 1/2$, $\vee \equiv -1/2$. Nous allons établir une relation générale pour un baryon composé de deux quarks de saveurs différentes. Nous noterons de façon générique $|\aleph\rangle = |qqq', I = 1/2\rangle$ et $|\aleph^*\rangle = |qqq', I = 3/2\rangle$. Par exemple avec les quarks u/u/d, cela donne $|\aleph\rangle = |p\rangle$ et $|\aleph^*\rangle = |\Delta^+\rangle$.

---

*Aussi à Département de physique, ENS Paris; Electronic address: `julien.baglio@ens.fr`

On rappelle que deux états de spin opposés sont orthogonaux. De même $|\aleph, m=1/2\rangle$ et $|\aleph^*, m=1/2\rangle$ sont orthogonaux.

Comme rappelé en (I), il est nécessaire de respecter la symétrie de la partie spin-saveur des états $|\aleph\rangle$ et $|\aleph^*\rangle$. De manière évidente, cela impose

$$|\aleph^*, m=3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\hat{q}\hat{q}\hat{q}'\rangle + |\hat{q}\hat{q}'\hat{q}\rangle + |\hat{q}'\hat{q}\hat{q}\rangle\right)$$

Pour obtenir $|\aleph^*, m=1/2\rangle$ il suffit d'appliquer l'opérateur de descente de spin J^-, somme des trois opérateurs individuels sur chacun des trois quarks. On obtient alors

$$\begin{aligned}|\aleph^*, m=1/2\rangle &= \frac{1}{3}\left(|\hat{q}\hat{q}\check{q}'\rangle + |\hat{q}\check{q}\hat{q}'\rangle + |\check{q}\hat{q}\hat{q}'\rangle\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(|\hat{q}\hat{q}'\check{q}\rangle + |\hat{q}\check{q}'\hat{q}\rangle + |\check{q}\hat{q}'\hat{q}\rangle\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(|\hat{q}'\hat{q}\check{q}\rangle + |\hat{q}'\check{q}\hat{q}\rangle + |\check{q}'\hat{q}\hat{q}\rangle\right)\end{aligned}$$

Pour écrire l'état du baryon $|\aleph\rangle$ on exploite encore la symétrie de la partie spin-saveur du vecteur d'état. Le spin down doit être porté soit par le quark q, soit par un des deux quarks q'. On a donc

$$|\aleph\rangle = \alpha\left(|\hat{q}\hat{q}\check{q}'\rangle + \text{permutations}\right) + \beta\left(|\hat{q}\check{q}\hat{q}'\rangle + \text{permutations}\right)$$

Pour déterminer les coefficients α et β il suffit de normaliser le vecteur d'état, et d'exploiter l'orthogonalité entre $|\aleph^*, m=1/2\rangle$ et $|\aleph\rangle$. Le choix de la phase est arbitraire, on se place dans une phase où α (et donc β) sont réels. On obtient donc

$$|\aleph\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{3}\left(|\hat{q}\hat{q}\check{q}'\rangle + \text{permutations}\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(|\hat{q}\check{q}\hat{q}'\rangle + \text{permutations}\right) \tag{2}$$

B. Expression du moment magnétique

On note $\widehat{\mu}_i$ l'opérateur moment magnétique agissant sur le quark i et tel que

$$\widehat{\mu}_i|\hat{q}_i\rangle = \mu_{q_i}|\hat{q}_i\rangle \ , \ \widehat{\mu}_i|\check{q}_i\rangle = -\mu_{q_i}|\check{q}_i\rangle \tag{3}$$

où μ_{q_i} est le moment magnétique de spin du quark q_i.
On exploite alors (2) et les définitions ci-dessus, ce qui donne

$$\widehat{\mu}|\aleph\rangle = \alpha(2\mu_q - \mu_{q'})\left(|\hat{q}\hat{q}\check{q}'\rangle + \text{permutations}\right) + \beta\mu_{q'}\left(|\hat{q}\check{q}\hat{q}'\rangle + \text{permutations}\right)$$

On définit $\mu_\aleph = \langle\aleph|\widehat{\mu}|\aleph\rangle$. On a donc $\mu_\aleph = 3\alpha^2(2\mu_q - \mu_{q'}) + 6\beta^2\mu_{q'}$. On obtient alors

$$\mu_\aleph = \frac{4}{3}\mu_q - \frac{1}{3}\mu_{q'} \tag{4}$$

III. APPLICATION DE LA FORMULE (4) AUX QUARKS LÉGERS DU MODÈLE STANDARD

Nous allons nous servir de l'égalité (4) pour obtenir la masse constituante des quarks légers u,d,s. Dans l'état fondamental le moment magnétique des baryons provient uniquement des moments magnétiques de spin des quarks. Nous prenons les valeurs expérimentales dans [2], pour

$$|p\rangle = |uud\rangle \ , \ |n\rangle = |udd\rangle \ , \ |\Sigma^-\rangle = |dds\rangle \ , \ |\Xi^-\rangle = |dss\rangle$$

Vu notre modèle grossier, nous négligerons les incertitudes sur les valeurs expérimentales, et nous nous limiterons aux 3 premiers chiffres significatifs. La formule (4) nous donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mu_u &= \frac{4}{5}\mu_p + \frac{1}{5}\mu_n\\ \mu_d &= \frac{1}{5}\mu_p + \frac{4}{5}\mu_n\\ \mu_d &= \frac{4}{5}\mu_{\Sigma^-} + \frac{1}{5}\mu_{\Xi^-}\\ \mu_s &= \frac{1}{5}\mu_{\Sigma^-} + \frac{4}{5}\mu_{\Xi^-}\end{aligned}$$

On rappelle que le quark u a pour charge 2/3 e, les quarks d et s ont pour charge -1/3 e. On rappelle que $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$, et l'on a d'après [2] $\mu_p = 2.793\mu_N, \mu_n = -1.913\mu_N, \mu_{\Sigma^-} = -1.160\mu_N$ et $\mu_{\Xi^-} = -0.651\mu_N$.

On fait une moyenne des résultats obtenus via le couple proton/neutron et les baryons étrange pour la donnée du quark d. On obtient ainsi

$$\mu_u = 1.852\mu_N, \mu_d = -1.015\mu_N, \mu_s = -0.753\mu_N \tag{5}$$

On obtient finalement en utilisant (1)

$$M_u = 337 \text{ MeV}, \; M_d = 308\text{MeV}, \; M_s = 415\text{MeV} \tag{6}$$

IV. CONCLUSION ET RÉFÉRENCES

La méthode employée ici est très grossière, et le résultat (6) est une première approche de la masse dite constituante des quarks au sein d'un baryon, masse bien évidemment très supérieure à la masse d'un quark considéré libre. Cette masse ne tient pas compte des corrections radiatives, ni de l'interaction forte et du champ de gluon entre les quarks - dit autrement elle englobe l'interaction quark-gluon qui est à l'origine de la plus grande partie de la masse d'un hadron.

Si l'on veut raffiner bien plus, il faut s'intéresser à ce que l'on appelle le bag-model du hadron, ou modèle du MIT. Ce modèle phénoménologique a été développé afin de rendre compte de la masse des hadrons à partir des principes fondamentaux de la QCD. Il a été raffiné au cours du temps, et le lecteur intéressé aura tout interêt à consulter les références [4], [5] et [6].

---

[1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
[2] W.-M. et al., J. Phys. G **33** (2006).
[3] S. Ray, *Modèle des quarks* (2006), TD Structure fondamentale, FIP.
[4] D. Jurĕiukonis and E. Norvaišas, *Quantum SU(3) Skyrme model with noncanonical embedded SO(3) soliton*, hep-th/0702007v1.
[5] R. Auzzi and M. Shifman, *Low-Energy Limit of Yang-Mills with Massless Adjoint Quarks : Chiral Lagrangian and Skyrmions*, hep-th/0612211v1.
[6] M. Karliner and H. Lipkin, *New Quark Relations for Hadron Masses and Magnetic Moments, A Challenge for Explanation from QCD*, hep-ph/0608004.