Formulation hamiltonienne des équations d'Einstein

Julien Baglio
Master 2 de physique théorique de Paris
Cours de relativité générale - Sujet à développer

(Dated: 15 mai 2008)

La théorie de la relativité générale décrit la gravitation comme un effet de courbure de l'espace-temps, et donne les équations d'évolution de la métrique en fonction du tenseur énergie-impulsion de la matière. La formulation classique repose sur une formulation lagrangienne qui permet d'aboutir aux équations d'Einstein.

Le but de ce sujet à développer est de présenter une formulation canonique des équations d'Einstein, qui permet de mettre l'accent sur les variables dynamiques du champ et qui est un premier pas vers une quantification possible, cette dernière étant canoniquement effectuée dans une formulation hamiltonienne.

I. INTRODUCTION, FORME PARAMÉTRÉE DE L'ACTION EN MÉCANIQUE ANALYTIQUE

A. Introduction

La théorie relativiste actuelle de la gravitation, c'est-à-dire la relativité générale, repose sur l'interprétation géométrique de la gravitation en tant que courbure de l'espace-temps. Ainsi, l'objet essentiel de la théorie est la métrique et l'équation maîtresse est

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{1}$$

dans le cas d'un tenseur énergie-impulsion de la matière nul, et où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R étant le scalaire de Ricci. Or, tout comme dans les théories de jauges classiques, il existe une certaine redondance dans la description de la théorie afin de conserver la symétrie sous-jacente : on peut ainsi redéfinir le tenseur métrique par un simple changement de coordonnées. Il faut donc pouvoir séparer la partie dynamique de la théorie, liée à l'interaction avec le tenseur énergie-impulsion de la matière, et la partie "de jauge" liée à cette relabellisation.

C'est un des buts d'une formulation canonique, ou hamiltonienne, de la relativité générale. Pour cela, on va d'abord réécrire l'action lagrangienne sous une forme qui permet d'en venir à des équations du premier ordre, c'est le but de la réécriture de Palatini ; puis l'on va explicitement résoudre le problème en temps en séparant ce dernier des composantes spatiales, dans le cadre d'une décomposition 3+1. On verra alors ressortir les variables dynamiques et les variables de jauge. On pourra terminer par la formulation canonique.

B. Forme paramétrée d'une action lagrangienne

Dans les différentes étapes menant à la formulation canonique, l'une d'elle consiste en la forme paramétrée de l'action. Nous allons donc voir en quoi cela consiste précisément, et comment passer de la forme canonique à la forme paramétrée en mécanique lagrangienne, la généralisation à un champ ne posant pas de problème particulier.

L'action d'un ensemble de N particules peut s'écrire, de façon canonique, comme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - H(p,q) \right) dt \tag{2}$$

Où p_i et q_i sont les divers moments conjugués. La forme paramétrée consiste à voir le temps comme une variable dépendant d'un paramètre τ, et à le redéfinir comme $t = q_{N+1}(\tau)$. Ainsi, en introduisant son "moment" conjugué $p_{N+1} = -H(p,q)$, on a avec $dt = \dfrac{dq_{N+1}}{d\tau} d\tau$:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sum_{i=1}^{N+1} p_i q'_i \tag{3}$$

où $q'_i = \frac{dq_i}{d\tau}$. En remplaçant la contrainte sur p_{N+1} par un multiplicateur de Lagrange, on obtient

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sum_{i=1}^{N+1} p_i q'_i - N(\tau) R(p_{N+1}, p, q) \tag{4}$$

qui est une forme covariante sous les transformations du paramètre τ. On a un hamiltonien fictif $H' = N(\tau)R$, qui n'a pas de signification dynamique puisque ce n'est qu'une contrainte de coordonnées.

Il faudra donc passer de cette forme à la forme canonique (2), pour cela on inverse les étapes : on impose la condition de coordonnées $q_{N+1} = t$ et on rajoute la solution du multiplicateur de Lagrange $p_{N+1} = -H(p, q)$, on retrouve alors la forme canonique.

II. DÉCOMPOSITION 3+1 DE L'ACTION D'EINSTEIN-PALATINI

Avant de pouvoir utiliser l'idée développée plus haut dans l'introduction, il va être nécessaire de réécrire l'action gravitationnelle afin non seulement d'obtenir des termes donnant des équations du premier ordre, mais aussi des termes où le temps est clairement séparé des coordonnées spatiales comme c'est le cas dans le formalisme canonique (ceci ne remet pas en cause la covariance de Lorentz bien sûr).

A. Forme de Palatini de l'action gravitationnelle

La forme de Palatini de l'action gravitationnelle est le premier pas vers une formulation 3+1, et consiste en fait à considérer les coefficients de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ comme variant indépendamment de la métrique. Ceci est possible car le tenseur de Ricci s'écrit uniquement à l'aide de ces coefficients, sans multiplication supplémentaire par la métrique :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\nu\alpha} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{5}$$

On aboutit alors aux équations d'Einstein en variant l'action $S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ par rapport à la métrique uniquement, et c'est la variation de l'action par rapport aux Christoffels uniquements qui donne le lien entre les Christoffels et la métrique

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{6}$$

Vu ainsi, le lagrangien est linéaire en les premières dérivées de ses variables indépendantes, ce qui était le premier objectif vers la formulation canonique.

B. Décomposition 3+1

Dans la référence [1] on voit l'analogie entre la décomposition 3+1 de l'électromagnétisme et celle de la relativité, via la forme de Palatini ci-dessus. On aboutit alors aux quantités 3+1 utiles pour notre travail :

$$g_{i,j} =^4 g_{i,j}, \; N = (-^4 g_{00})^{-1/2}, \; N_i =^4 g_{0i}, \; \pi^{ij} = N\sqrt{g}(^4\Gamma^0_{p,q} - g^4_{pq}\Gamma^0_{rs} g^{rs}) g^{ip} g^{jq} \tag{7}$$

où la notation ^{4} signifie que l'on prend une quantité 4-dimensionnelle, et où les indices latins sont tridimensionnels. On utilise g_{ij} pour monter et descendre les indices, avec sa matrice inverse g^{ij}, et g est ici le déterminant de la matrice g_{ij}. On a alors le lagrangien réécrit comme

$$\mathcal{L} = -g_{ij}\partial_t \pi^{ij} - NR^0 - N_i R^i \tag{8}$$

une fois enlevées une dérivée totale et une divergence. Ici

$$R^0 = -\sqrt{g}\left(^3R + g^{-1}(\frac{1}{2}\left(\pi_{ij} g^{ij}\right)^2 - \pi^{ij}\pi_{ij}) \right) \tag{9}$$

et l'on reconnaît immédiatement une forme paramétrisée vue dans (4) : les variables dynamiques du champ gravitationnel sont donc π_{ij} et g_{ij} et les variables N et R jouent le rôle de multiplicateurs de Lagrange qui vont fixer la contrainte de coordonnées. On a donc séparé la dynamique du champ et ses variables de jauge liées aux changements globaux de coordonnées.

Géométriquement, la variable g_{ij} joue le rôle d'une variable de position du champ, qui est 3-covariante sous un changement de coordonnées sur les 3-surfaces $\Sigma_t\{t = \text{cste}\}$; la variable π_{ij} est le moment conjugué, qui dit comment le mouvement s'effectue entre ces différentes 3-surfaces. On a bien une description 3+1 de l'espace-temps par le biais de cette interprétation. N et R sont ce qui permet de décrire comment le système de coordonnées est prolongé en dehors de la surface Σ_t choisie et donc de faire le lien entre feuillets au sein de ce feuilletage de l'espace-temps.

III. FORME CANONIQUE DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN

A. Lagrangien canonique, introduction de la courbure extrinsèque

Nous avons avec (9) une forme paramétrée de l'action gravitationnelle, il nous faut une forme canonique pour obtenir l'hamiltonien. On introduit alors la courbure extrinsèque K_{ij} qui décrit la courbure des feuillets Σ_t vu dans l'espace-temps complet et qui est naturellement reliée au moment π_{ij} d'après notre interprétation géométrique :

$$K_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}g_{kl}\pi^{kl}g_{ij} - \pi_{ij}\right) \tag{10}$$

On peut ainsi réécrire la densité lagrangienne comme ([2], page 67) :

$$\mathcal{L} = N\sqrt{g}({}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2) \tag{11}$$

avec $\pi_{ij} = \sqrt{g}(K^{ij} - Kg^{ij})$. On montre bien que l'on a $\pi^{ij} = \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_t g_{ij}}$ ce qui confirme le lien canonique entre la variable position g_{ij} et la variable moment conjugué π_{ij}.

B. Formulation hamiltonienne de la théorie complète

On est arrivé maintenant au dernier stade qui donne les équations d'Hamilton de la relativité générale. On introduit le 4-vecteur $\beta_i = (\partial_t)_i - Nn_i$ qui est l'écart entre la dérivation temporelle et le vecteur normal à la surface Σ_t. Ce 4-vecteur va intervenir dans la densité hamiltonienne de la relativité générale.

La densité hamiltonienne est reliée à la densité lagrangienne (11) par la transformation de Legendre $\mathcal{H} = \pi_{ij}\partial_t g^{ij} - \mathcal{L}$. On aboutit alors à

Théorème 1 *L'hamiltonien de la relativité générale est*

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}d^3x = -\int_{\Sigma_t}\Big(N({}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 2\beta^i(\nabla_j K_i^j - \partial_i K)\Big)\sqrt{g}d^3x \tag{12}$$

On peut alors écrire les équations d'Hamilton de la relativité générale :

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} = \partial_t g_{ij} \tag{13}$$

$$\frac{\delta H}{\delta g^{ij}} = -\partial_t \pi_{ij} \tag{14}$$

Les variations de H avec N et β_i (ou encore avec R_o, R_i) sont des équations de contraintes sur les coordonnées, et ne sont donc pas des équations dynamiques.

IV. CONCLUSION ET RÉFÉRENCES

Nous avons donc obtenu dans les équations (13) et (14) une formulation hamiltonienne des équations d'Einstein dans le vide. A partir de là, il est alors possible d'étudier la radiation du champ gravitationnel de façon générale, en ne se limitant pas à la théorie linéarisée qui ne traite que les situations en champ faible, et d'effectuer toutes les manipulations classiques que l'on peut effectuer sur des champs formulés de manière hamiltonienne.

Cette formulation canonique est aussi la première étape pour une étude d'une éventuelle quantification de la gravité, puisque l'une des procédures de quantification est basée sur une formulation canonique avec l'introduction des opérateurs de création et d'annihilation ; mais ceci nous entraînerait trop loin et n'est pas l'objet de ce sujet à développer.

On trouvera dans les références utilisées pour ce rapport de quoi approfondir le sujet.

[1] R. Arnowitt, S. Dezer, and C. Misner, arXiv :gr-qc/0405109v1 pp. 1–15 (2004).
[2] E. Gourgoulhon, arXiV :gr-qc/0703035 pp. 67–70 (2007).