Aimantation spontanée dans le modèle d'Ising à 1 dimension

Julien Baglio
Physique statistique

19 novembre 2007

1 Calcul de la fonction de partition

On part de l'hamiltonien du modèle d'Ising $\mathcal{H} = -J\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i+1} - h\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$ où les n spins σ_i sont tels que $\sigma_i = \pm 1$. On prendra $J > 0$ (modèle ferromagnétique).

On a donc l'expression suivante de la fonction de partition canonique :

$$Z = \sum_{\{\sigma\}}\exp(-\beta\mathcal{H}) = \sum_{\{\sigma\}}\exp\left(\beta J\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\sigma_{i-1} + \beta h\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\right)$$

Pour se simplifier le calcul, on prend des conditions limites périodiques : $\sigma_{n+1} = \sigma_1$. Ainsi on peut réécrire Z sous forme d'une somme de produit et réunir le terme ferromagnétique et le terme dû au champ externe :

$$Z = \sum_{\{\sigma\}}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{\beta h}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1}) + \beta J\sigma_i\sigma_{i+1}\right) \tag{1}$$

On introduit alors la matrice de transfert T suivante, écrite dans la base de départ $\sigma_i = (|+\rangle, |-\rangle)$, d'arrivée $\sigma_{i+1} = (|+\rangle, |-\rangle)$:

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

On a alors $Z(\sigma_n) = T^n Z(\sigma_0)$ (où $\sigma_0 = \sigma_n$ par convention pour respecter la condition limite périodique), où $Z(\sigma_n)$ désigne la fonction de partition à n spins telle que le spin σ_n est fixé. On en déduit aisément que $Z = (T^n Z(\sigma_0))_{\sigma_0=|+\rangle} + (T^n Z(\sigma_0))_{\sigma_0=|-\rangle} = \mathrm{Tr}(T^n)$.

Il s'agit maintenant de diagonaliser T pour calculer aisément la trace de T^n - sachant que T est bien diagonalisable car symétrique réelle.

On a $\chi(\lambda) = \left(e^{\beta(J+h)} - \lambda\right)\left(e^{\beta(J-h)} - \lambda\right) - e^{-2\beta J} = \lambda^2 - 2e^{\beta J}\cosh(\beta h) + 2\sinh(2\beta J)$.

On en déduit aisément (en utilisant $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$) que

$$\lambda_\pm = e^{\beta J}\cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J}\sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}$$

On a donc

$$Z = \lambda_+^n + \lambda_-^n \tag{3}$$

2 Aimantation spontanée du système infini

Pour n tendant vers l'infini, λ_+ est le terme dominant dans la fonction de partition Z. On a donc $\ln Z \sim n \ln \lambda_+$.

Or nous avons $\langle M \rangle = \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial h}$ donc

$$\frac{\langle M \rangle}{n} \sim \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln \lambda_+}{\partial h} \tag{4}$$

Ayant $\frac{\partial \ln \lambda_+}{\partial h} = \frac{\beta}{\lambda_+}\left(e^{\beta J}\sinh(\beta h) + \frac{e^{2\beta J}\sinh(2\beta h)}{2\sqrt{e^{2\beta J}\sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}\right)$ On a donc

$$\left\langle \frac{M}{n} \right\rangle \sim_{h\to 0} \beta h \frac{1 + e^{2\beta J}}{1 + e^{-2\beta J}} \tag{5}$$

Ceci démontre que **il n'y a pas d'aimantation spontanée du modèle d'Ising à 1 dimension** $\triangleleft$