

# ÉLECTROMAGNÉTISME

Notes de cours de L3 - École normale supérieure de Cachan

Julien Baglio

Étudiant au département de physique de l'ENS Cachan  
julien.baglio@ens-cachan.fr

14 septembre 2006  
révisé le 18 mars 2007



# Introduction

Ces notes de cours sont inspirées en partie du cours dispensé en L3 à l'ENS Cachan (cursus Phythem), ainsi que de la lecture du Jackson et du cours Électromagnétisme et Relativité dispensé en L3 à l'ENS Ulm (cursus MIP). Les vecteurs seront notés en caractères gras.

Le but de ce cours est de décrire les bases de l'interaction matière-rayonnement, et se terminera par la description des phénomènes électromagnétiques dans un milieu anisotrope.

Le point de vue dans toute la suite du cours sera classique : les particules seront uniquement newtoniennes, et le champ sera traité de manière maxwellienne. En appendice, nous verrons dans certains cas les résultats que donne un traitement semi-quantique des phénomènes (dans le cas de la première quantification, le champ restant classique), puis nous donnerons un modèle basique de traitement complètement quantique expliquant l'émission spontanée.

Pour plus de détails et de précisions, la lecture du cours de DEA de Claude Fabre est utile (5, partie 1 chapitre 4) (électrodynamique quantique).

Nous étudierons donc des systèmes de charges  $(m_\alpha, q_\alpha)$ , qui peuvent être aussi sources de champ, en interaction avec un champ  $(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$  (à degré de liberté infini : à  $t$  donné il est nécessaire de fixer une infinité de valeurs du champ car il existe une infinité de positions, le champ s'étendant dans tout l'espace ; au contraire, une particule n'a que trois degrés de liberté, correspondant aux trois dimensions spatiales).

Pour traiter de façon satisfaisante le cas de sources ponctuelles, nous utiliserons la distribution de Dirac, de dimension égale à l'inverse d'un volume du fait de la relation de normation

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1.$$

Ainsi, un champ scalaire et un champ vectoriel sont introduits :  $\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$ .

Nous rappelons les équations de Maxwell dans le vide :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (\text{Maxwell-Gauss}) \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Faraday}) \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 & (\text{Maxwell } n^\circ 3) \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & (\text{Maxwell-Ampère}) \end{array} \right.$$

Avec  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

Nous savons que le champ électromagnétique peut être décrit à l'aide des potentiels vecteur et scalaire :  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  et  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad } V$

Il y a un choix arbitraire du couple  $(\mathbf{A}, V)$  : en effet, avec les transformations

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \xi(\mathbf{r}, t) \\ V' = V - \frac{\partial \xi}{\partial t} \end{cases}$$

Le champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  reste inchangé (c'est l'invariance de jauge : une symétrie locale).

On a les équations d'évolution suivantes pour les potentiels vecteurs et scalaires (après quelques petites manipulations algébriques) :

$$\begin{cases} \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \text{div } \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \\ \Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Puisque l'on étudie le champ dynamique (et son rayonnement), on se place alors en jauge de Lorentz dans toute la suite de ces notes :

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>i</b>
<b>1 Sources atomiques du rayonnement</b>	<b>1</b>
1.1 Dipôle oscillant . . . . .	1
1.1.1 Potentiels retardés . . . . .	1
1.1.2 Approximation dipolaire et calculs des champs . . . . .	2
1.1.3 Une autre approche, plus directe . . . . .	4
1.1.4 Énergétique - formule de Larmor . . . . .	6
1.2 Modèle classique de diffusion du rayonnement . . . . .	8
1.2.1 Modèle de Thomson, électron élastiquement lié . . . . .	8
1.2.2 Émission spontanée . . . . .	8
1.2.3 Diffusion d'un rayonnement incident . . . . .	10
1.3 Susceptibilité d'une vapeur atomique . . . . .	13
1.3.1 Définition de la susceptibilité . . . . .	13
1.3.2 Un milieu dilué : le gaz atomique . . . . .	14
1.4 Diffusion par un milieu dense . . . . .	15
1.4.1 Champ diffusé par un diffuseur $i$ à la position $\mathbf{r}_i$ . . . . .	15
1.4.2 Champ total rayonné en statique . . . . .	17
1.4.3 Champ rayonné par un milieu désordonné . . . . .	17
<b>2 Électromagnétisme dans la matière</b>	<b>19</b>
2.1 Champs, charges microscopiques et macroscopiques . . . . .	19
2.1.1 Processus de moyennage . . . . .	20
2.1.2 Densité de charges liées, courant lié . . . . .	21
2.1.3 Champ au sein du milieu . . . . .	24
2.2 Équations de Maxwell dans la matière . . . . .	25
2.2.1 Équations de Maxwell . . . . .	25
2.2.2 Aspects énergétiques . . . . .	25
2.3 Réponse linéaire . . . . .	26
2.3.1 Définitions . . . . .	26
2.3.2 Énergétique liée aux susceptibilités . . . . .	27
2.3.3 Polarisabilité . . . . .	27
2.3.4 Calcul de la susceptibilité dans un diélectrique . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Propagation dans les milieux LHI</b>	<b>31</b>
3.1	Équations de propagation, relation de dispersion . . . . .	31
3.1.1	Équations de Maxwell . . . . .	31
3.1.2	Équation de propagation . . . . .	32
3.1.3	Relation de dispersion et propriétés de bases du champ . . . . .	32
3.2	Milieux diélectriques . . . . .	33
3.2.1	Vitesse de phase et absorption . . . . .	33
3.2.2	Vitesse de groupe . . . . .	33
3.2.3	Milieux dilués et milieux denses . . . . .	34
3.3	Milieux conducteurs . . . . .	35
3.3.1	Modèle de conductivité . . . . .	35
3.3.2	Comportement basses fréquences ( $\omega \ll \gamma \ll \omega_p$ ) . . . . .	36
3.3.3	Comportement hautes fréquences ( $\omega > \omega_p \gg \gamma$ ) . . . . .	36
3.3.4	Comportement à fréquences intermédiaires : $\omega < \omega_p, \omega \gg \gamma$ . . . . .	37
3.4	Relations de passage et coefficients de Fresnel . . . . .	38
3.4.1	Relations de passage lors de la traversée d'un dioptre séparant 2 LHI . . . . .	38
3.4.2	Coefficients de Fresnel . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Étude des milieux linéaires homogènes anisotropes</b>	<b>41</b>
4.1	Description générale des milieux anisotropes . . . . .	41
4.1.1	Position du problème . . . . .	41
4.1.2	Axes principaux du milieu . . . . .	42
4.2	Étude analytique de la propagation . . . . .	43
4.2.1	Structure d'une onde plane . . . . .	43
4.2.2	Relation de dispersion . . . . .	44
4.2.3	Relation de Fresnel aux indices . . . . .	44
4.3	Surface des indices . . . . .	44
4.3.1	Définition . . . . .	44
4.3.2	Cas du milieu uniaxe . . . . .	44
4.3.3	Construction géométrique . . . . .	44
4.4	Ellipsoïde des indices . . . . .	45
4.4.1	Direction propres ou neutres . . . . .	45
4.4.2	Ellipsoïde des indices . . . . .	45
4.4.3	Ellipsoïde dans un milieu uniaxe . . . . .	45
4.5	Lames minces . . . . .	45
4.5.1	Définition . . . . .	45
4.5.2	Propagation d'une onde dans la lame . . . . .	45
4.5.3	Effet sur la polarisation, lames demi-onde et quart-onde . . . . .	45
<b>A</b>	<b>Modèle semi-quantique de rayonnement</b>	<b>47</b>
<b>B</b>	<b>Un premier modèle quantique d'émission spontanée</b>	<b>49</b>
B.1	Quantification du champ . . . . .	49
B.2	Interaction atome-champ . . . . .	50

# Chapitre 1

## Sources atomiques du rayonnement

### 1.1 Dipôle oscillant

Afin de traiter de façon satisfaisante l'interaction matière-rayonnement, il est nécessaire de décrire le modèle le plus simple d'excitation : celui du dipôle oscillant. En effet, une particule excitée par un champ électromagnétique se met à osciller et va rayonner en conséquence.

Dans toute la suite de cette section, nous nous placerons dans le vide. Les résultats obtenus serviront de support aux prochaines sections, notamment en ce qui concerne le modèle de l'électron élastiquement lié.

#### 1.1.1 Potentiels retardés

On rappelle que dans le cadre de l'électrostatique, on obtient, à partir des équations de Poisson :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)d\tau}{\|\mathbf{PM}\|}, \quad \mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(P)d\tau}{\|\mathbf{PM}\|}$$

On utilise pour cela la théorie mathématique des distributions et la fonction de Green de l'opérateur laplacien ; pour un calcul complet et rigoureux, on peut se référer au cours de mathématiques de Laurent Desvillettes (4 , chapitre 4, distributions).

On ne présentera donc ici que les résultats, essentiels pour la suite. Dans le cadre de la jauge de Lorentz, on reprend alors la même forme du potentiel en y rajoutant un terme de propagation :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(t - \frac{r}{c})d\tau}{r} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}(t - \frac{r}{c})d\tau}{r} \quad (1.2)$$

Nous avons noté  $r = \|\mathbf{PM}\|$ . On appelle cette solution des équations de Maxwell la solution aux potentiels retardés : la propagation à vitesse finie retarde l'information.

### 1.1.2 Approximation dipolaire et calculs des champs

On va travailler ici de manière discrète, mais les résultats seront aussi valables dans le cas continu : on a l'équivalence entre  $\iiint \mathbf{j} d\tau / r$  et  $\sum q_i \mathbf{v}_i / r_i$ , et de plus on définit le moment dipolaire continu comme étant  $\mathbf{p}(t) = \iiint \mathbf{r} \rho(r, t) d\tau$ .

#### Potentiel vecteur

On a d'après la section précédente  $\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i \left( t - \frac{r_i}{c} \right)}{r_i}$ .

On fait l'approximation dipolaire : on a alors  $1/r_i \sim 1/r$ . Mais par contre, a priori, rien n'indique que l'on puisse faire de même dans l'expression des vitesses  $\mathbf{v}_i$  ; il faut donc faire l'approximation non-relativiste, qui consiste à dire que la vitesse caractéristique d'évolution du système est négligeable devant la vitesse de la lumière. Ainsi, au final, en exploitant ces deux approximations, on arrive à

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (1.3)$$

Dans toute la suite, on va fixer la direction de  $\mathbf{p}$  afin de simplifier les calculs :  $\mathbf{p} = p \left( t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{e}_z$ .

#### Potentiel scalaire

On exploite la jauge de Lorentz :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

En coordonnées cartésiennes,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)_{x,y \text{ fixés}}$ .

Ayant  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , on a  $2r dr = 2z dz$  à  $x, y$  fixés. Donc  $\left( \frac{\partial r}{\partial z} \right)_{x,y \text{ fixés}} = \frac{z}{r}$ . Si l'on exploite la notation polaire habituelle dans le cadre des dipôles électriques, on a  $\frac{z}{r} = \cos \theta$  (voir figure (1.1), l'axe des  $z$  étant la droite  $(O_-OO_+)$ ).

Finalement, en intégrant en  $t$  et en négligeant la constante numérique (non significative, car c'est un terme statique, c'est pourquoi nous l'oublions) et en utilisant  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$  on obtient

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \left( p \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right) \cos \theta \quad (1.4)$$

#### Champ électrique

Nous avons l'expression des potentiels scalaires et vecteurs dans une jauge particulière, ce qui nous permet de remonter au champ électrique dont l'expression sera valable dans n'importe quelle jauge.



On a  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . On utilise l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{grad} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

Ainsi que le fait que  $\mathbf{e}_z = \sin \theta \mathbf{e}_\theta - \cos \theta \mathbf{e}_r$ . On effectue toutes les dérivations (assez simples) et l'on obtient le résultat suivant :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \cos \theta \left( \frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) \mathbf{e}_r + \sin \theta \left( \frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{r c^2} \right) \mathbf{e}_\theta \right) \quad (1.5)$$

Il est sous-entendu que  $p$ ,  $\dot{p}$  et  $\ddot{p}$  dépendent de la variable  $t - r/c$ . On peut remarquer que le plan passant par le point courant  $M$  et contenant la droite  $(O, \mathbf{e}_z)$  est de symétrie du problème : on retrouve que  $\mathbf{E} \in (O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ .

On en déduit aussi que l'on a  $\mathbf{B} = B(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$ .

### Champ magnétique

On utilise le potentiel vecteur :  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ . Plutôt que de calculer le champ magnétique en exprimant en coordonnées sphérique le rotationnel, on va utiliser le théorème de Stokes :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

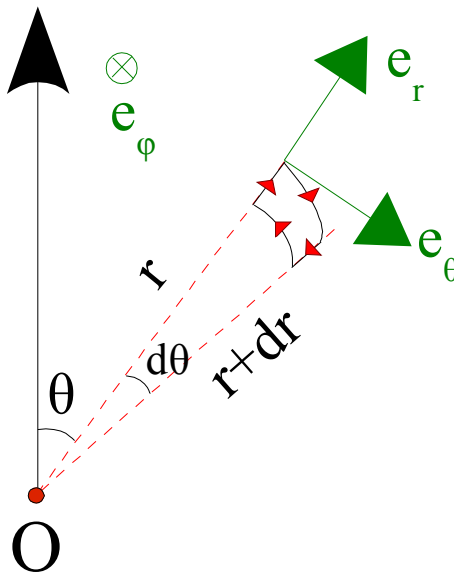


Fig. 1.1: Théorème de Stokes sur une surface infinitésimale

On a donc, en tenant compte de l'orientation :

$$B_\phi(r, \theta) r dr d\theta = A_\theta(r + dr, \theta)(r + dr)d\theta - A_r(r, \theta + d\theta)dr - A_\theta(r, \theta)r d\theta + A_r(r, \theta)dr.$$

En faisant tendre vers 0  $dr$  et  $d\theta$  on obtient donc l'expression de  $B_\phi$  :

$$B_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

Nous obtenons ainsi l'expression du champ magnétique rayonné par le dipôle oscillant, en reprenant l'expression du potentiel vecteur (1.1) :

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left( \frac{\ddot{p}}{rc} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (1.6)$$

### Comportement de l'onde

Nous avons finalement obtenu la structure du champ électromagnétique rayonné. Il est intéressant de regarder son comportement, en séparant deux zones : "petites distances", où le terme de plus haut degré l'emporte, et "grande distance", où le terme en  $1/r$  l'emporte. Si l'on étudie les ondes harmoniques, on voit que de manière rigoureuse être à grande distance signifie alors  $\frac{\omega}{r^2} \ll \frac{\omega^2}{rc}$ , donc on a  $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ .

A petite distance, compte tenu des approximations à faire, on a alors

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} p \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \theta$$

Donc le champ se comporte comme le champ rayonné par un dipôle électrostatique.

A grande distance, les termes en  $1/r$  l'emportent. On a donc

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 rc} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \theta, \quad \mathbf{E} = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta$$

De même, on a pour le champ magnétique  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} \ddot{p} \sin \theta \mathbf{e}_\phi = \frac{\ddot{p} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{rc} \mathbf{e}_\phi$ .

On a donc  $\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{E}\|}{c}$ ; localement, la structure de l'onde est plane, et globalement, la structure est en  $1/r$ , de phase  $t - r/c$ , donc c'est une onde sphérique divergente.

#### 1.1.3 Une autre approche, plus directe

On va ici obtenir de manière différente la forme du potentiel scalaire, en effectuant un calcul direct qui est identique, dans son principe, à celui réalisé en électrostatique.

On décrit le dipôle oscillant comme étant un système de deux charges oscillantes  $q = q_0 e^{i\omega t}$  séparées d'une distance  $s$ .

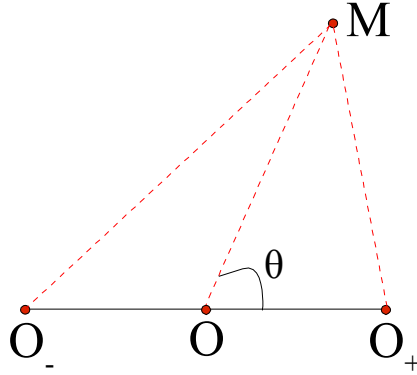


Fig. 1.2: Schéma d'étude

On utilise les coordonnées polaires, plus adaptées à la symétrie du problème. On remarque qu'en définitive, grâce à notre description en terme de charges oscillantes séparées par une distance fixe, le calcul sera formellement identique à celui effectué pour un dipôle statique. Nous allons redonner les étapes essentielles du raisonnement.

On écrit  $\mathbf{OM} = \mathbf{OO}_+ + \mathbf{O}_+\mathbf{M}$ , donc  $r_+^2 = \mathbf{O}_+\mathbf{M}^2 = (\mathbf{OM} - \mathbf{OO}_+)^2 = r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - rs \cos \theta$ .

Finalement, on a  $r_+ = r \sqrt{1 - \frac{s}{r} \cos \theta + \left(\frac{s}{2r}\right)^2}$ .

On utilise la formule des potentiels retardés, qui nous donne

$$\phi(M, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{e^{i\omega(t - \frac{r_+}{c})}}{r_+} - \frac{e^{i\omega(t - \frac{r_-}{c})}}{r_-} \right)$$

On se place maintenant dans l'approximation dipolaire : le point  $M$  est situé à une distance grande devant les distances caractéristiques du dipôle (ie  $r \gg s$ ). On peut alors effectuer un développement limité à l'ordre 1 en  $1/r$  :

$$r_+ = r \left( 1 - \frac{s}{2r} \cos \theta \right), \text{ et de même } r_- = r \left( 1 + \frac{s}{2r} \cos \theta \right).$$

On a finalement, en redéveloppant pour les termes en  $1/r_+$  et  $1/r_-$ , et en effectuant des mises en facteur :

$$\phi(M, t) = \frac{q_0 e^{i\omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \exp \left( i\omega \frac{s}{2c} \right) \left( 1 + \frac{s}{2r} \cos \theta \right) - \exp \left( -i\omega \frac{s}{2c} \right) \left( 1 - \frac{s}{2r} \cos \theta \right) \right)$$

On fait maintenant la deuxième approximation du problème, qui est l'approximation non-relativiste : la vitesse caractéristique du système (typiquement  $v = \omega s$ ) est bien plus petite que la vitesse de la lumière. En écrivant  $\omega = c \frac{2\pi}{\lambda}$ , cela revient à dire  $s \ll \lambda$ . On peut alors développer l'exponentielle à l'ordre 1, et l'on obtient

$$\phi(M, t) = \frac{q_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \left(1 + i\omega \frac{s}{2c}\right) \left(1 + \frac{s}{2r} \cos\theta\right) - \left(1 - i\omega \frac{s}{2c}\right) \left(1 - \frac{s}{2r} \cos\theta\right) \right)$$

On obtient donc la formule suivante donnant le potentiel scalaire du dipôle oscillant :

$$\phi(M, t) = \frac{q_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{s}{r} \cos\theta + i\omega \frac{s}{c} \cos\theta \right) \quad (1.7)$$

Si l'on note maintenant  $p(r, t) = qs = q_0 e^{i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)} s$  norme du vecteur dipôle électrique, on retrouve la formule (1.4)

$$\phi(M, t) = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( p + r \frac{\dot{p}}{c} \right) \quad (1.8)$$

### 1.1.4 Énergétique - formule de Larmor

Nous avons déterminé la structure du champ rayonné, ce qui va nous permettre de nous intéresser à l'énergie rayonnée, et obtenir la formule de Larmor qui va nous servir dans la suite de ce cours.

Tout d'abord, nous allons obtenir l'expression instantanée du vecteur de Poynting puis sa valeur moyenne, dans le cadre de l'approximation dipolaire à très longue distance. En effet, le but est d'obtenir la puissance totale rayonnée par le dipôle oscillant ; en notant  $\mathbf{\Pi}$  le vecteur de Poynting, on a  $P_{tot} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_r \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi$  (en sphérique). On voit donc que seuls les termes en  $1/r$  dans  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  comptent, les termes d'ordres supérieurs tendant vers zéro.

On a donc, en exploitant les formules (1.5) et (1.6) combinées avec  $\mathbf{P} \mathbf{i} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \sin^2 \theta \frac{\ddot{p}^2}{r^2 c^3} \mathbf{e}_r \quad (1.9)$$

On en déduit alors  $P_{tot} = \frac{2\pi}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \ddot{p}^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$ .

En posant  $p = qd$ , on a  $\ddot{p} = q\ddot{d} = qa$  on obtient alors la formule de Larmor qui donne la puissance rayonnée par une particule chargée qui accélère :

$$P_{tot} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (1.10)$$

où  $a$  est l'accélération de la particule de charge  $q$ .

Pour obtenir la valeur moyenne de la puissance rayonnée en régime harmonique, on peut faire la moyenne de la puissance instantanée trouvée ci-dessus, et l'on obtient alors

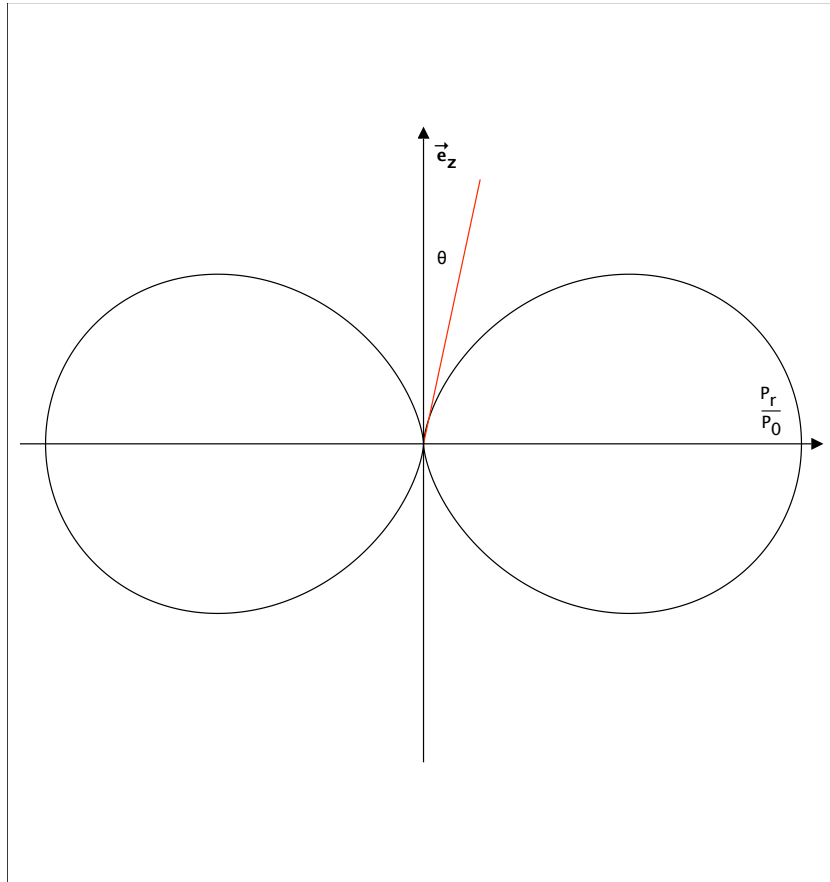
$$P_{moy} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (1.11)$$

Une autre approche serait de calculer directement la valeur moyenne du vecteur de Poynting, puis de calculer la puissance rayonnée. On peut faire le calcul en prenant en compte tous les termes, et l'on a par définition  $\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*)$ .

On vérifie que l'on trouve alors

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{p_0^2 \sin^2 \theta \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.12)$$

En calculant la puissance rayonnée, nous retrouvons bien la formule (1.11).



**Fig. 1.3:** Diagramme de rayonnement d'un dipôle oscillant

Physiquement, on a  $dP = P_r d\Omega$ ,  $P_r$  puissance rayonnée par unité d'angle solide. Ayant  $dP = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_r r^2 d\Omega$ , on en déduit  $P_r = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2(\theta)$ .

En posant  $P_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3}$ , on a  $\frac{P_r}{P_0} = \sin^2(\theta)$ , indépendant de  $\phi$ .

On obtient donc le diagramme de rayonnement ci-dessus. On voit donc que le rayonnement est maximal pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe du dipôle : le rayonnement du dipôle oscillant n'est pas isotrope.

## 1.2 Modèle classique de diffusion du rayonnement

### 1.2.1 Modèle de Thomson, électron élastiquement lié

Il s'agit de décrire la force de rappel que subit l'électron dans l'atome. Ce modèle fut développé par Lorentz au XIX<sup>e</sup> siècle, et il est dit "modèle de l'électron élastiquement lié". On suppose que l'électron se déplace dans une boule uniformément chargée de densité  $\rho$ , de rayon  $R$  et de charge totale  $q = Z|q_e|$ . C'est la modélisation de Thomson de l'atome, nous permettant d'écrire la force cherchée. On notera dans toute la suite du cours  $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ .

Pour  $r > R$ , il est connu que l'on obtient la force de Coulomb classique (le système étant à symétrie sphérique, on a  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ ). Pour  $r < R$ , on utilise le théorème de Gauss, nous fournissant  $E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ . Explicitant  $q_{int}$  à l'aide de  $\rho$ , on obtient finalement

$$\mathbf{E} = \frac{Z|q_e|}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathbf{e}_r \quad (1.13)$$

Ayant  $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$  on a alors une force de rappel  $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{mR^3}}$ .

L'ordre de grandeur de la longueur d'onde associée ( $R = 1 \text{ \AA}$ ) est  $\lambda = 1225 \text{ \AA}$  pour l'atome d'hydrogène (raie dite de Lyman, intervenant lors des excitations du niveau fondamental dans le modèle quantique de l'atome).

### 1.2.2 Émission spontanée

On sait qu'une charge en mouvement rayonne : d'où le phénomène d'émission spontanée, qui va être étudié ici. Avant de commencer, il faut bien prendre conscience des limites de la description classique du phénomène : la force de réaction que l'on obtiendra sera du troisième ordre, donc très éloignée des principes de la mécanique newtonienne (car cela signifie fixer aussi l'accélération initiale). De plus, dans le cadre plus large de l'électromagnétisme relativiste, nous n'obtiendrons pas un invariant relativiste, ce qui n'est pas sans poser des soucis. Seul un traitement complètement quantique (et des sources, et du champ) permet de résoudre les problèmes, mais cela dépasse de loin le cadre de cet exposé. Il n'est cependant pas inutile de connaître ce genre de limitations.

On a  $m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$  d'après les lois de Newton. Alors  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{i\omega_0 t}$ . On sait d'après la formule de Larmor que la puissance de rayonnement est

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (1.14)$$

On écrit alors  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . Si l'on étudie un mouvement suivant  $\mathbf{e}_z$ , on a  $z = z_0 e^{i\omega_0 t}$  et  $P_{moy} = \frac{q^2 \ddot{z}}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ .

Or  $\overline{\dot{z}\dot{z}} = \overline{\dot{z}^2}$  (il suffit de calculer). Donc l'on a en identifiant, ayant  $\mathbf{v} = \dot{z}\mathbf{e}_z$  :

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} = \frac{2mr_0}{3c} \ddot{z} \mathbf{e}_z \quad (1.15)$$

où  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  est le "rayon" classique de l'électron ( $\sim$  portée d'action de l'électron).

On introduit alors ce terme dans l'équation du mouvement (il s'agit donc ici d'une méthode perturbative) :

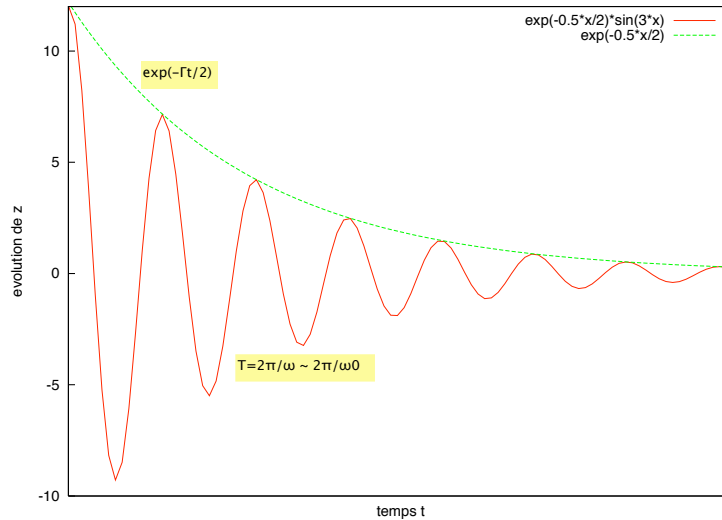
$$m\ddot{z} + m\omega_0^2 z - \frac{2mr_0}{3c} \ddot{z} = 0 \quad (1.16)$$

On a donc cette fois  $z = z_0 e^{i\omega t}$  et  $\omega \neq \omega_0$ . On a donc

$$\omega_0^2 - \omega^2 = -\frac{2r_0}{3c} i\omega^3 \quad (1.17)$$

L'effet perturbatif sera petit si  $\omega \ll \frac{c}{r_0}$ . Au premier ordre ( $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ), on a  $\omega_0^2 - \omega^2 = -2\omega_0\Delta\omega$  et donc  $\Delta\omega = i\frac{r_0}{3c}\omega_0^2$ .

On note  $\Gamma_{cl} = \frac{2r_0}{3c}\omega_0^2$ . On a alors  $z = e^{-\frac{\Gamma_{cl}t}{2}} z_0 e^{i\omega_0 t}$ .  $\Gamma_{cl}$  représente donc l'amortissement en énergie de l'atome :  $\tau = \Gamma_{cl}^{-1}$  est le temps de vie classique d'un atome.



**Fig. 1.4:** Variations de  $z$  en fonction du temps  $t$

On peut alors introduire le facteur de qualité  $Q = \omega_0 \frac{W}{\left| \frac{dW}{dt} \right|}$  où  $W$  est l'énergie stockée par l'atome, et sa différentielle l'énergie perdue par émission spontanée.

On a  $\frac{\omega_0}{\Gamma_{cl}} = \frac{3\lambda_0}{4\pi r_0} \sim 10^7$ . On peut montrer (cf le cours de Raimond (7, page 258)) que cela correspond, lorsque l'on utilise les valeurs de fréquence données par le modèle de Bohr, à  $\frac{\omega_0}{\Gamma_{cl}} \sim \frac{3}{\alpha^3}$ , où  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  est la constante de structure fine.

Si l'on désire connaître la répartition spectrale d'émission, il suffit alors de faire la transformée de Fourier de  $|z^2(t)|$ .

### 1.2.3 Diffusion d'un rayonnement incident

#### Polarisabilité

Lorsque un champ incident interagit avec la matière, il induit un dipôle oscillant. La diffusion redistribue alors le signal. On se place avec un champ électrique suivant l'axe  $(O, \mathbf{e}_z)$ , et dans le cadre de l'approximation non relativiste, ayant  $B = cE$  on néglige l'effet de la composante magnétique du champ électromagnétique.

On a donc l'équation suivante :

$$m\ddot{z} + m\Gamma_{cl}\dot{z} + m\omega_0^2 z = qE_0 e^{-i\omega t}$$

$\Gamma_{cl}$  rend compte de l'émission spontanée, comme vu ci-dessus. La solution de l'équation différentielle est une oscillation forcée  $z = z_0 e^{-i\omega t}$ . On a donc  $(-m\omega^2 - im\omega\Gamma_{cl} + m\omega_0^2) z_0 = qE_0$ .

On voit donc apparaître un moment dipolaire induit  $D_0 = qz_0$  c'est-à-dire

$$D_0 = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_{cl}\omega)} E_0 \quad (1.18)$$

On a donc  $D_0 = \varepsilon_0 \alpha(\omega) E_0$  où  $\alpha(\omega)$ , polarisabilité complexe à la pulsation  $\omega$ , a pour expression

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_{cl}\omega} \quad (1.19)$$

On peut commenter cette expression dans le cas où le champ est statique. On obtient alors une polarisabilité réelle  $\alpha(0) = \frac{q^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}$  avec  $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{mR^3}$ .

En remplaçant  $\omega_0^2$  par son expression, on obtient alors

$$\alpha(0) = \frac{4\pi R^3}{Z} \quad (1.20)$$

La polarisabilité est donc proportionnelle au volume de l'atome considéré.

#### Puissance rayonnée en moyenne - section efficace

On a en moyenne une puissance totale rayonnée  $P = \frac{|D_0|^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$  d'après la formule (1.11) car on se trouve ici en régime harmonique.



Donc on a

$$P = \frac{|\alpha(\omega)|^2 \varepsilon_0 E_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} \quad (1.21)$$

Il est intéressant de ramener cette puissance au flux surfacique incident. On sait que  $\Phi_0$ , flux surfacique incident, est le module du vecteur de Poynting incident. L'onde est une onde plane, donc on a  $\Phi_0 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$ . On remarque donc que l'on a  $P = \frac{|\alpha(\omega)|^2 \omega^4}{6\pi c^4} \Phi_0$ . Le coefficient de proportionnalité est homogène à une surface, il est appelé section efficace de diffusion totale. On a donc pour cette section efficace de diffusion

$$\sigma_T(\omega) = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\alpha(\omega)|^2 \quad (1.22)$$

On réécrit cette section efficace en tenant compte de l'expression de la polarisabilité et du rayon classique de l'électron :

$$\sigma_T(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\Gamma_{cl}}{\omega}\right)^2} \quad (1.23)$$

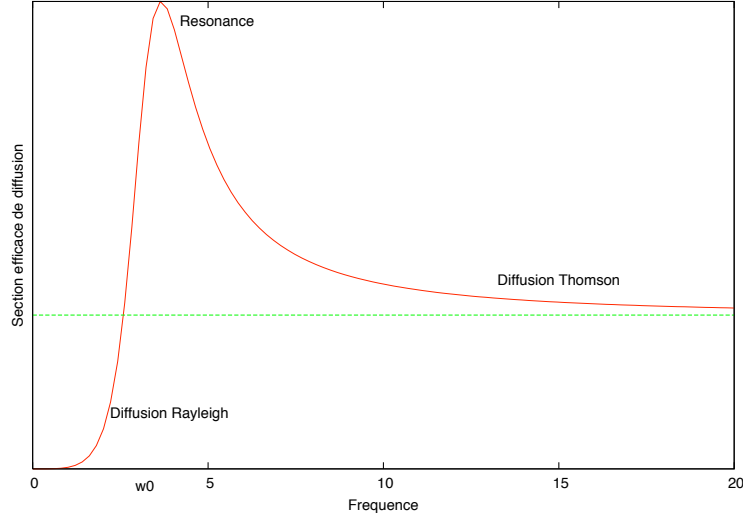
La section efficace de diffusion caractérise la probabilité d'occurrence du processus de diffusion. Géométriquement, elle s'interprète ainsi : pour une surface  $S$  contenant des électrons, ceux qui rediffusent efficacement sont contenus dans une surface  $\sigma_T$ . Cette notion de section efficace se retrouve souvent en physique, voir Vannucci (2 , page 10, ligne 25).

Si un électron rediffuse efficacement, le rayonnement incident s'atténue en conséquence. Soit  $L$  la longueur nécessaire pour une atténuation totale du faisceau incident. On note  $S$  la section droite du faisceau,  $N$  la densité de diffuseurs.

On a alors  $N S L \sigma_T = S$  puisque tous les diffuseurs au bout de  $L$  auront atténué le faisceau, et au mieux ils recourent entièrement  $S$ . Donc on a

$$L = \frac{1}{N \sigma_T(\omega)} \quad (1.24)$$

On va maintenant distinguer trois domaines d'étude, selon que  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega \gg \omega_0$  et  $\omega$  voisin de  $\omega_0$ .



**Fig. 1.5:** Section efficace en fonction de  $\omega$ ; l'asymptote horizontale est  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2$

### Diffusion Rayleigh

On se place dans le cas où  $\omega \ll \omega_0$ . C'est le cas pour les radiofréquences, l'infrarouge et la lumière visible, en particulier la lumière diffusée par l'atmosphère.

En effectuant un développement limité en  $\frac{\omega}{\omega_0}$  sur la formule (1.23), on obtient alors

$$\sigma_T(\omega) = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (1.25)$$

La dépendance en fréquence est très forte. On explique ainsi la couleur bleue du ciel : les courtes longueurs d'onde, plus proches de la résonance, sont beaucoup plus efficacement diffusées.

On peut aussi expliquer la couleur du coucher du soleil : la couche d'atmosphère traversée est beaucoup plus grande que dans la journée et s'approche de la longueur  $L$  d'atténuation totale (de l'ordre de 30 km); or les fréquences les plus élevées sont aussi les plus atténuées, donc le soleil est d'une luminosité moins intense, et rouge.

### Diffusion Thomson

On se place dans le domaines des très hautes fréquences (rayons X, rayons  $\gamma$ ). Alors dans ce cas, on a très simplement

$$\sigma_T(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \text{constante} \quad (1.26)$$

Dans ce cas, la force de rappel harmonique n'influe pas sur la diffusion, et l'on retrouve la section efficace de diffusion d'un électron libre.

### Diffusion résonante pour $\omega$ voisin de $\omega_0$

On se place à une fréquence proche de la fréquence atomique. En effectuant un développement limité autour de  $\omega_0$ , on obtient facilement

$$\sigma_T(\omega) = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega_0^2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma_{cl}^2} \quad (1.27)$$

On obtient donc un comportement lorentzien autour de la résonance. Pour avoir une idée des ordres de grandeur, étudions précisément la résonance. On a  $\sigma_T = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left(\frac{\omega_0}{\Gamma_{cl}}\right)^2$ . La polarisabilité est imaginaire pure, il y a donc échange d'énergie maximum avec le diffuseur.

On rappelle que  $\Gamma_{cl} = \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \omega_0^2$ . On a donc en remplaçant dans (1.27)

$$\sigma_T(\omega_0) = \frac{6\pi c^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2 \quad (1.28)$$

Il y a donc à peu près 18 ordres de grandeurs entre le haut de la lorentzienne et sa base, près des diffusions Thomson et Rayleigh. Si on fait un calcul sur  $L$  longueur totale d'atténuation, avec la raie de sodium sous une pression de  $10^{-3}$  Pa, à  $T = 100$  °C (ce qui donne  $n \simeq 10^{17}$  m $^{-3}$ ) on obtient  $L = 60\mu\text{m}$ . Cette valeur est trop faible, et cela vient du fait que notre modèle est linéaire, alors qu'en fait il y a une saturation qui apparaît :  $\Gamma_{cl}^{-1} \simeq 10$  ns, et pendant ce temps le diffuseur ne diffuse pas une seconde fois ; notre raisonnement linéaire n'est valable que pour la diffusion non résonnante, dans le cas de la diffusion résonnante il y a un phénomène quantique d'oscillation absorption/émission induite qui limite l'excitation. Il faut donc, pour appliquer notre raisonnement, diffuser un photon par temps radiatif donc  $\frac{\Phi_0}{\hbar\omega_0} \lambda_0^2 \Gamma_{cl}^{-1} \ll 1$ , c'est-à-dire l'intensité incidente doit être plus petite que l'intensité de saturation  $I_{sat} \simeq 10$  W.m $^{-2}$  (en prenant l'azote comme diffuseur,  $\lambda_0 \simeq 1\mu\text{m}$  et  $\hbar\omega_0 \simeq 1$  eV). En annexe, le calcul semi-quantique nous redonne exactement cet ordre de grandeur, ce qui montre que le modèle de Thomson donne des résultats assez réalistes.

## 1.3 Susceptibilité d'une vapeur atomique

### 1.3.1 Définition de la susceptibilité

Soit  $N$  électrons liés à des atomes identiques, et contenus dans un volume  $V$ . En notant  $\mathcal{N}$  la densité atomique, on a donc  $N = \mathcal{N}ZV$  et il y a alors  $\frac{N}{V} = \mathcal{N}Z$  dipôles oscillants par unité de volume.

En notant  $\alpha$  la polarisabilité microscopique, on rappelle que pour un champ incident  $\mathbf{E}(t)$  on a le dipôle induit  $\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E}$ . On introduit

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{N}{V} \mathbf{p} \quad (1.29)$$

le vecteur densité dipolaire, qui est indicateur de la polarisation macroscopique du milieu. On a donc  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathcal{N}Z \alpha(\omega) \mathbf{E}(t)$ . On introduit alors le complexe  $\chi(\omega) = \mathcal{N}Z \alpha(\omega)$  susceptibilité du milieu, et l'on a

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(t) \quad (1.30)$$

Il apparaît alors un courant de densité, que l'on nommera par la suite courant lié car non contrôlable par l'utilisateur et directement relié au comportement de la matière :

$$\mathbf{j} = \frac{N}{V} q \mathbf{v} = \frac{N}{V} q \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (1.31)$$

On a donc en appliquant l'équation de Maxwell-Ampère :  $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ .

En utilisant l'expression du vecteur densité de courant, on obtient finalement

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\chi(\omega) + 1) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.32)$$

On pose  $\varepsilon_r = 1 + \chi(\omega)$  constante diélectrique, et l'on introduit  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  permittivité diélectrique relative du milieu. On définit alors l'indice de réfraction  $n$  par

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \quad (1.33)$$

Dans notre modèle classique, connaissant la valeur de  $\alpha$  on connaît  $\chi(\omega)$  :

$$\chi(\omega) = \frac{N}{V} \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma_{cl}\omega} \quad (1.34)$$

### 1.3.2 Un milieu dilué : le gaz atomique

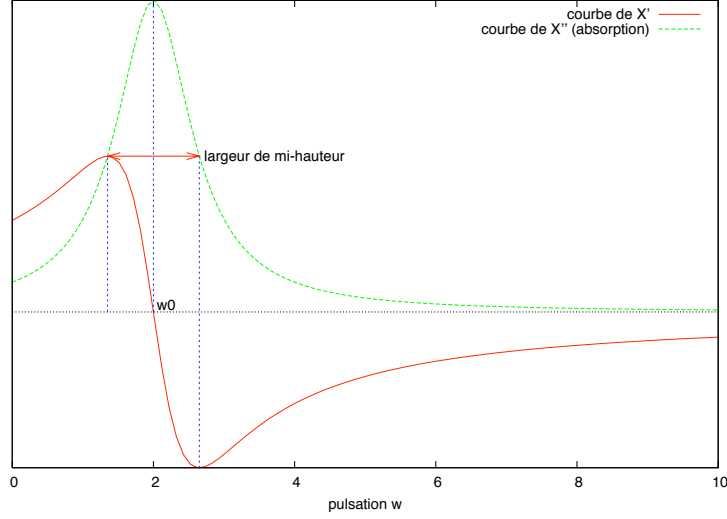
La polarisation est alors faible, et donc  $\chi \ll 1$ . En notant  $\chi = \chi' + i\chi''$  pour séparer parties réelle et imaginaire, on effectue un développement limité et l'on écrit alors  $n(\omega) = 1 + \frac{1}{2}\chi'(\omega) + \frac{i}{2}\chi''(\omega)$ . On se place au voisinage de la résonance, et l'on a  $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  donc

$$\chi(\omega) = \frac{N}{V} \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) - i\Gamma_{cl}\omega}$$

On a finalement

$$\chi'(\omega) = \frac{N}{V} \frac{q^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\Gamma_{cl}^2}{4}} \quad (1.35)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{N}{V} \frac{q^2}{2m\varepsilon_0} \frac{\frac{\Gamma_{cl}}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\Gamma_{cl}^2}{4}} \quad (1.36)$$



**Fig. 1.6:** Courbes d'évolution de  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$ ; la largeur à mi-hauteur est  $\Gamma_{cl} = \tau_{cl}^{-1} \ll |\omega - \omega_0|$

Si on écrit  $n = n' + in''$  on remarque que  $n' = 1$  à la résonance. Le calcul de la largeur à mi-hauteur donne  $L = \Gamma_{cl}$ . Ainsi,  $\chi'$  traduit la propagation de l'onde à une vitesse plus réduite (lié à  $n'$ ) tandis que  $\chi''$  traduit l'absorption par le milieu. En effet, en reprenant (1.32) pour une onde plane  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{i(ky - \omega t)}$  se propageant le long de  $(O, \mathbf{e}_y)$  on  $k = \frac{\omega}{c'} = \frac{\omega n}{c}$ , donc en séparant parties et imaginaires :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-\kappa y} e^{i(n' \frac{\omega}{c} y - \omega t)} \quad (1.37)$$

avec  $\kappa = \frac{n'' \omega}{c} = \frac{\chi'' \omega}{2c} = \frac{N}{2V} \sigma_T(\omega)$  près de la résonance (on utilise la formule (1.27), l'expression de  $\Gamma_{cl}$  ainsi que celle du rayon classique de l'électron).

## 1.4 Diffusion par un milieu dense

On regarde une seule composante spectrale du champ électromagnétique pour plus de simplifications.

### 1.4.1 Champ diffusé par un diffuseur $i$ à la position $\mathbf{r}_i$

Soit  $\mathbf{r}_i$ ,  $\alpha_i(\omega)$  et  $\mathbf{n}(\theta, \phi)$  les caractéristiques du diffuseur. On se place dans les conditions d'études décrites sur le schéma suivant :

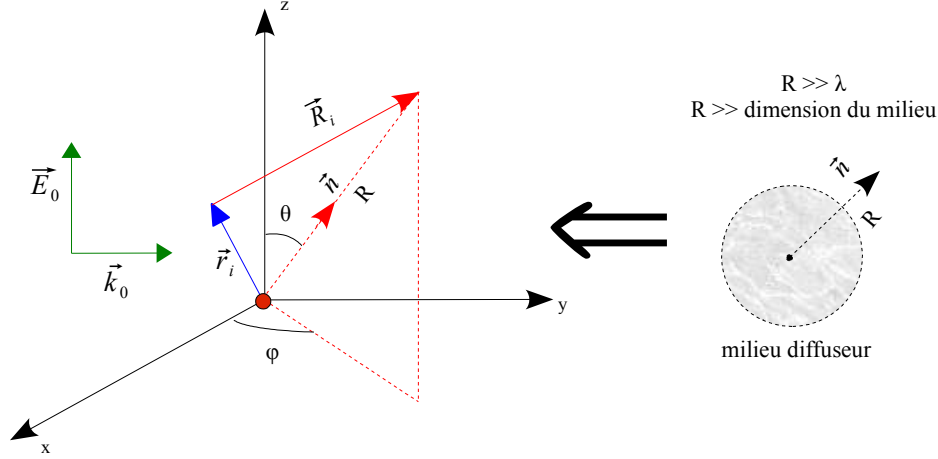


Fig. 1.7: Notations pour la diffusion par un milieu dense

On a  $\mathbf{E}_d \in (\mathbf{e}_z, \mathbf{n})$  si  $R$  très grand devant les dimensions caractéristiques (approximation dipolaire). D'après la section 1.2, un moment dipolaire induit apparaît au point  $\mathbf{r}_i$  si  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)}$  :

$$\mathbf{p}_i = \varepsilon_0 \alpha_i(\omega) \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} \quad (1.38)$$

Avec les notations du schéma il rayonne au point d'observation en  $\left(t - \frac{R_i}{c}\right)$ . D'après la section 1.1, on a l'expression suivante du champ rayonné par ce dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire :

$$\mathbf{E}_i^d = \frac{e^{i(kR_i)} \omega^2}{4\pi \varepsilon_0 R_i c^2} p_i \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

On pose  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ . On a  $\|\mathbf{R}_i\| = \|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i\| = \sqrt{R^2 + r_i^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i} \simeq R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i$  au premier ordre en  $1/R$ . En dehors de l'exponentielle, on utilise comme d'habitude l'ordre zéro, et l'on obtient

$$\mathbf{E}_i^d = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR} \omega^2}{R c^2} \alpha_i(\omega) e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.39)$$

On pose alors  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$  qui est, à un facteur  $\hbar$  près, le transfert d'impulsion d'un photon. Ce vecteur n'est pas sans rappeler le vecteur du réseau réciproque vu en cristallographie. On pose aussi

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i(kR - \omega t)} \omega^2}{R c^2} E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.40)$$

indépendant du diffuseur ; il contient toute l'information sur la diffusion par un dipôle, et s'annule selon la direction de polarisation des dipôles oscillants suivant le diagramme de rayonnement vu en partie 1. On a donc l'expression finale suivante du champ diffusé :

$$\mathbf{E}_d^i = \mathcal{E}_d \alpha_i(\omega) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} \quad (1.41)$$

Nous allons utiliser cette expression pour la suite.

### 1.4.2 Champ total rayonné en statique

Si le milieu est supposé statique, on écrit le champ total rayonné comme addition cohérente des champs diffusés :

$$\mathbf{E}_d = \mathcal{E}_d \sum_j \alpha_j(\omega) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j} \quad (1.42)$$

Cette expression appelle quelques commentaires. Tout d'abord, il est intéressant de voir que l'on retrouve le facteur de structure vu dans le cours de cristallographie. En effet, on a isolé l'effet géométrique du milieu (vecteur  $\mathcal{E}_d$ ) de l'effet spécifique à chaque diffuseur, contenu dans le facteur de forme qui est ici la polarisabilité microscopique  $\alpha_j$ . On peut donc appliquer cette formule pour un cristal par exemple, et l'on retrouve tous les résultats de cristallographie, en particulier la diffusion de Bragg.

De plus, si l'on se place dans un volume continu, on étend le résultat vu à l'aide d'une intégrale. On introduit alors

$$\delta n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j(\omega) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (1.43)$$

distribution d'indice dans le milieu (pour des milieux suffisamment peu denses) et l'on a finalement

$$\mathbf{E}_d = 2\mathcal{E}_d \int \delta n(\mathbf{r}) e^{-\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (1.44)$$

Le champ diffusé est donc la transformée de Fourier de la distribution d'indice du milieu, ce qui est le résultat à retenir. Ce n'est pas non plus sans rappeler la diffraction de Fraunhofer.

Si on regarde l'intensité diffusée "vers l'avant" c'est-à-dire à  $q = 0$  on se retrouve avec une addition cohérente des intensités, et donc  $I = \mathcal{N}^2 I_0$  où  $\mathcal{N}$  désigne le nombre d'atomes.

### 1.4.3 Champ rayonné par un milieu désordonné

On suppose maintenant que le milieu est non-statique. Le champ diffusé à l'instant  $t$  par chaque centre diffuseur dépend donc de la situation à  $t_0 = t - \frac{R_j}{c}$ .

On suppose que ce déplacement des diffuseurs est négligeable en regard de la durée de traversée du milieu par l'onde. Si  $L$  est la dimension typique du milieu, on a  $\Delta t = \frac{L}{c}$ ; on note  $v$  la vitesse caractéristique d'un diffuseur, on suppose donc que  $v\Delta t \ll \lambda$ . Ainsi notre condition d'étude se résume à

$$L \ll \frac{c\lambda}{v} \quad (1.45)$$

Ainsi, on peut réemployer l'expression vue dans le cas statique à  $t = t_0$  :

$$\mathbf{E}_d(t) = \mathcal{E}_d(\theta, \phi) \sum_j \alpha_j(\omega, t_0) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_j(t_0)} \quad (1.46)$$

En écrivant encore une fois  $n = \delta n + 1$ , on a  $n = 1 + \frac{1}{2}\chi$  donc on a  $\delta n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j(\omega, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$  densité de polarisabilité microscopique. On retrouve le résultat du cas statique.

Cependant, si l'on s'intéresse à l'intensité diffusée, on se rend compte que si l'on se rapproche de  $\lambda$ , le terme  $\mathcal{E}_d$  devient prépondérant et la transformée de Fourier isotrope : la somme des intensités devient incohérente : l'intensité est alors proportionnelle à  $\mathcal{N}$ , nombre d'atomes.



## Chapitre 2

# Électromagnétisme dans la matière

Le chapitre précédent nous a permis principalement de comprendre les phénomènes de diffusion de la lumière par interaction matière-rayonnement. Nous avons pu, à la fin de cette partie, débiter la description de l'électromagnétisme dans la matière en introduisant la notion de susceptibilité, et décrire certains phénomènes intéressants. C'est ce travail que nous allons poursuivre dans ce chapitre, en parvenant à une écriture des équations de Maxwell dans la matière, et en introduisant la théorie de la réponse linéaire qui nous permet de les résoudre.

Nous avons pu voir que le traitement exact des interactions du rayonnement avec la matière était extrêmement fastidieux. En fait, il est totalement impossible à effectuer, car il y a beaucoup trop de paramètres à prendre en compte, et la complexité du problème est extrême puisque il faut tenir compte de toutes les interactions, sans compter que la répartition de matière peut être aléatoire au sein d'un volume. Nous allons donc nous attacher dans un premier temps à la réduction du problème, en introduisant des grandeurs moyennées.

### 2.1 Champs, charges microscopiques et macroscopiques

La structure microscopique du champ dépend de la position des particules (variations de l'ordre de l'angström). Si on se place à un niveau mésoscopique, typiquement de l'ordre de la longueur d'onde du champ, la dépendance temporelle est plus lente. On va donc effectuer un processus de moyennage pour des longueurs caractéristiques encadrées par la taille atomique et la longueur d'onde, ce qui nous donnera les champs et densités macroscopiques ; petit par rapport à la longueur d'onde, afin de pouvoir traiter des problèmes ondulatoires bien entendu.

Dans toute la suite, on va donc distinguer les sources libres, c'est-à-dire contrôlables par un expérimentateur (c'est par exemple le cas des électrons de conduction) et les sources liées, qui sont reliées à la structure même de la matière et à sa réponse à un champ extérieur (polarisation par dipôles instantanés par exemple), ces dernières étant très localisées.

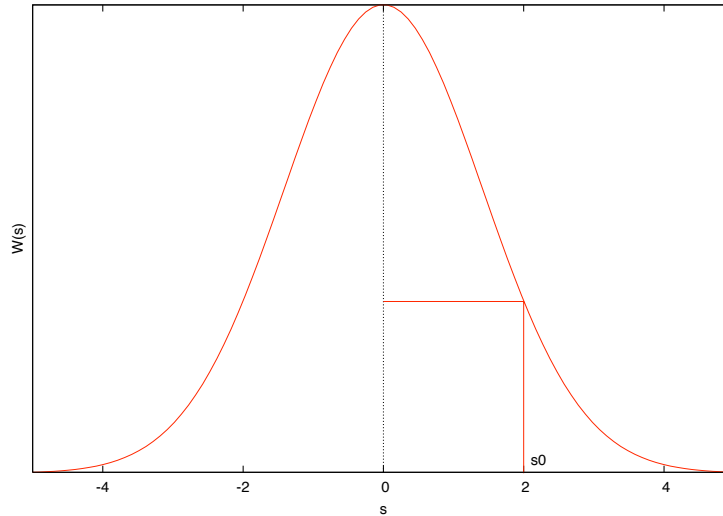
Pour donner une idée des ordres de grandeurs de la fluctuation de la densité de molécules au sein d'un milieu : on se donne un volume  $\tau$ , une densité  $N$  de molécules. Alors on a  $N\tau$  le nombre total de molécules au sein du volume, et dans le cadre d'une distribution de Poisson ses fluctuations sont de l'ordre de  $\sqrt{N\tau}$ . Ainsi, on a  $\Delta N = \frac{\sqrt{N\tau}}{\tau}$ , c'est-à-dire  $\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N\tau}}$ .

Dans un milieu condensé,  $N = 3.10^{28} \text{ m}^{-3}$  et pour  $\tau = 10^{-24} \text{ m}^3$  cela donne  $\frac{\Delta N}{N} \simeq 0,5\%$ . Il faut donc faire attention aux moyennes, car dans un milieu dilué la dispersion est plus grande, de l'ordre de 10%, et l'on s'interdira l'étude des milieux dilués dans le cadre du processus de moyennage (de toute manière, on peut approximer de manière très satisfaisante ce type de milieu par le vide)

Dans toute la suite, le champ microscopique  $(\mathbf{e}, \mathbf{b})$  vérifie toujours les équations de Maxwell dans le vide avec sources totales (libres + liées) puisque à son échelle la répartition de la matière est considérée discrète. C'est en moyennant que l'on va trouver les équations de Maxwell dans les milieux matériels.

### 2.1.1 Processus de moyennage

On effectue l'étude du champ sur une longueur caractéristique  $s_0 \simeq 1 \text{ nm}$ ; par exemple un volume sphérique dont le rayon vaut  $s_0$ , et contenant un grand nombre d'atomes. On s'interdit l'étude des rayons X ( $\lambda$  de l'ordre de  $a_0$  rayon de Bohr), qui de toute manière sont bien mieux décrits par les lois de la diffraction. On utilise alors une fonction de lissage  $W(s)$  afin de moyenner le champ pour en donner une description macroscopique, et donc éviter les problèmes de la description microscopique très complexe. Cette fonction se doit d'être à symétrie sphérique, les équations de Maxwell étant invariantes par rotation dans l'espace, et elle vérifie  $\iiint W(s) d^3s = 1$ . On pourra prendre, par exemple, une distribution gaussienne.



**Fig. 2.1:** Fonction de moyennage typique

On introduit alors les champs macroscopiques suivants :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \iiint \mathbf{e}(\mathbf{r} - \mathbf{st}) W(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \iiint \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{st}) W(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (2.2)$$

De même, on introduit les sources macroscopiques moyennées :

$$\rho_T(\mathbf{r}, t) = \langle \rho \rangle = \iiint \rho(\mathbf{r} - \mathbf{s}t)W(\mathbf{s})d\mathbf{s} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{j}_T(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{j} \rangle = \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r} - \mathbf{s}t)W(\mathbf{s})d\mathbf{s} \quad (2.4)$$

Par linéarité, ces quatre quantités vérifient alors les équations suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_T}{\varepsilon_0} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_T + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Avec  $\rho_T = \rho_{\text{lié}} + \rho$  et  $\mathbf{j}_T = \mathbf{j}_{\text{lié}} + \mathbf{j}$  où  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  sont maintenant les sources libres.

Si on veut tenter de décrire une charge isolée, on peut écrire  $\rho_T = qW(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ .

### 2.1.2 Densité de charges liées, courant lié

Les charges libres sont identiques à celle traitée dans le vide (à ceci près qu'elles sont une moyenne macroscopique, on ne pourra pas à proprement parler traiter le cas des particules ponctuelles, sauf comme on a vu ci-dessus par une densité délocalisée). Il nous faut maintenant décrire les charges et courants liés au sein de la matière.

#### Densité de charges

On rappelle la définition du vecteur de polarisation (ou densité dipolaire) :  $\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}$ . On utilise les notations du schéma suivant :

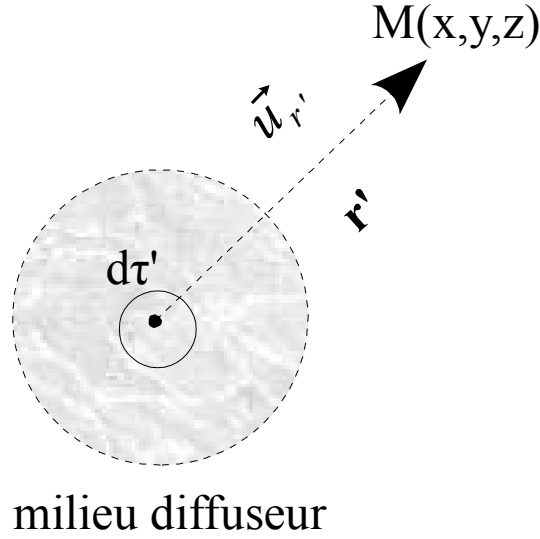


Fig. 2.2: Schéma d'étude

On a  $dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{r}'}}{r'^2}$ . Or l'on intègre sur  $M'$  et  $r' = \mathbf{M}'\mathbf{M}$  donc l'on a  $\mathbf{grad}_{M'} \left( \frac{1}{r'} \right) = \frac{\mathbf{u}_{\mathbf{r}'}}{r'^2}$ .

En exploitant le vecteur densité de polarisation, on obtient donc

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r'} \right) d\tau'$$

Une formule d'analyse vectorielle nous donne  $\text{div}(f\mathbf{A}) = f \text{div} \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{A}$ . Donc l'on a finalement, après utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky :

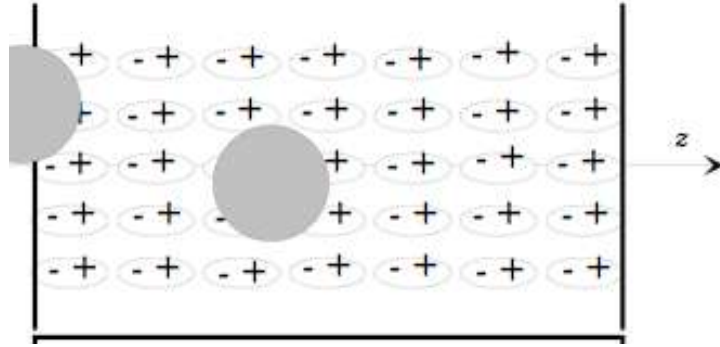
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S'} \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{r'} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\text{div} \mathbf{P}}{r'} d\tau' \quad (2.9)$$

Ainsi, il y a deux contributions au potentiel, d'une part l'une liée à l'extension finie du milieu (les effet de bords),  $\sigma_{\text{lié}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n}$  vecteur normal à la surface, variant avec chaque point ; d'autre part la seconde contribution liée à la densité volumique de charge liée  $\rho_{\text{lié}} = -\text{div} \mathbf{P}$ .

La signification physique de ces deux termes peut apparaître de la façon suivante. Imaginons un milieu de densité dipolaire uniforme. C'est le cas par exemple si l'on prend des molécules polaires alignées de telle sorte que chaque pôle positif d'une molécule soit compensé par le pôle

négatif de sa voisine, et vice-versa.

Ainsi, on assure bien  $\rho = 0$ , ce que l'on souhaitait puisque l'on a  $\text{div } \mathbf{P} = 0$ . Par contre, ces charges ne se compensent plus à la surface du milieu, il reste donc des charges de surface.



**Fig. 2.3:** Milieu modélisé par des molécules alignées - extrait du cours de J.M Raimond

Si on prend selon l'horizontale une extension  $da$  en surface, on a  $dQ = \sigma da$ . Or  $dQdz = P_n dadz$  où  $P_n$  est la composante de  $\mathbf{P}$  selon la normale à la surface, ayant  $P_n dadz$  moment dipolaire selon cette normale. On a donc  $P_n dadz = \sigma dadz$  : on retrouve  $\sigma_{\text{lié}} = P_n$ .

### Courant lié

Il y a deux contributions à l'existence du courant lié : l'une est liée à l'existence d'une polarisation électrique éventuellement variable au sein du milieu ; l'autre provient des propriétés magnétiques de la matière.

On exploite la conservation de la charge dans un premier temps la loi de conservation de la charge :

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Nous venons juste d'établir  $\rho_{\text{lié}} = -\text{div } \mathbf{P}$  ; on a donc  $\text{div } \mathbf{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \text{div } \mathbf{P}}{\partial t} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ . Ainsi,  $\mathbf{j}_{\text{lié}}$  et  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  sont égaux à un rotationnel près d'après un théorème d'analyse vectorielle (cf le cours de Desvillettes). On note  $\text{rot } \mathbf{C}$  ce rotationnel. Il ne dépend pas des effets électriques du milieu : c'est donc un courant lié aux effets magnétiques.

Si la polarisation n'est pas constante, elle induit un courant ; il y a alors création de dipôles magnétiques dans le milieu. On introduit alors  $\mathbf{M} = \frac{d\mu}{d\tau}$  vecteur aimantation (polarisation magnétique). On a par définition  $d^2\mu = di dS$ , donc  $di = \frac{d^2\mu}{dS} = \frac{\mathbf{M} d\tau \mathbf{n}}{dS} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{dl}$ .

Ainsi,  $i_{\text{induit}} = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{rot} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{j}_{\text{induit}} \cdot d\mathbf{S}$ . Cela doit être vrai pour toute surface  $S$ , donc on a  $\mathbf{j}_{\text{induit}} = \mathbf{rot} \mathbf{M}$ . Or on a vu que  $\mathbf{j}_{\text{magnétique}} = \mathbf{rot} \mathbf{C}$ , donc on a identifié le rotationnel  $\mathbf{rot} \mathbf{C}$ . Au final, on a donc

$$\mathbf{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{M} \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Champ au sein du milieu

Le but de cette petite partie est d'établir l'expression du champ local autour d'une molécule au sein d'un milieu dense. Cette expression nous sera utile lors de la théorie de la réponse linéaire. On considère la molécule au sein du milieu, et l'on découpe les contributions en deux parties : la première est liée aux charges "éloignées" et constitue  $\mathbf{E}_{\text{loin}}$ , que nous laissons de côté ici, et la seconde liée à l'environnement immédiat de la molécule, contenue dans une petite sphère dont on prend le rayon de telle sorte que la polarisation soit uniforme à l'intérieur. Nous nous concentrons ici sur cette contribution qui est celle nous intéressant.

Ayant une polarisation uniforme, le champ est uniquement surfacique. On a une densité surfacique  $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  en normale sortante pour  $\mathbf{n}$  d'après ce qu'on a vu ci-dessus. Il y a deux manières de faire le calcul.

Soit on effectue le calcul à l'aide de l'intégrale  $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sigma 2\pi r^2 \sin \theta}{r^2} d\theta \mathbf{u}_r$ , qui pour une raison de symétrie liée à l'orientation du vecteur  $\mathbf{P}$  (on place l'axe des  $z$  suivant  $\mathbf{P}$  pour le calcul) se réécrit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma 2\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \mathbf{u}_z$$

En remplaçant  $\sigma$  par son expression  $\sigma = P \cos \theta$ , et en intégrant, on obtient alors  $\mathbf{E} = \frac{-P}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_z$ .

L'autre méthode consiste à utiliser directement la définition générale de la densité surfacique de charge comme limite de  $\rho\epsilon$  quand  $\epsilon$  tend vers zéro. On modélise la sphère comme deux boules de rayon  $r_0$  uniformément chargées décalées de  $\epsilon$  et de charge  $Q$  et  $-Q$ . On prend  $\epsilon \ll r_0$ .

Il apparaît un dipôle électrique  $\mathbf{p} = Q\epsilon \mathbf{u}_z$ . Or l'on a  $Q = \rho\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho$ . Ayant  $\epsilon \ll r_0$  on a donc  $\rho\epsilon = \sigma$  donc  $\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \sigma \mathbf{u}_z = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \mathbf{P}$  car  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$  ici.

On écrit alors  $V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$  car  $r_0 \cos \theta = z$ . En appliquant  $\mathbf{E} = \frac{-\partial V}{\partial z}$ , on retrouve  $\mathbf{E} = \frac{-P}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_z$  (on considère ici l'échelle suffisamment petite pour que les variations du champs soient négligeables dans le calcul).

Nous retiendrons donc que le champ créé par la sphère s'écrit finalement

$$\mathbf{E}_{\text{sphère}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (2.11)$$

Nous nous servirons de ce résultat à la fin de la partie sur la réponse linéaire.

## 2.2 Équations de Maxwell dans la matière

Nous avons pu déterminer au 2.1 l'expression des sources liées dans la matière, nous avons donc tout ce qu'il faut pour écrire les équations de Maxwell décrivant l'évolution des champs macroscopiques en fonction des sources libres.

### 2.2.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell-Faraday et du flux du champ magnétique ne dépendent pas des sources : elles sont donc inchangées. En revanche, il faut réécrire celles reliant les champs aux sources.

On a  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{\text{lié}}}{\varepsilon_0}$ . Or  $\rho_{\text{lié}} = -\text{div } \mathbf{P}$ , donc en introduisant

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.12)$$

vecteur déplacement électrique, on a  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ .

De même, on a  $\mathbf{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{M}$ , donc  $\text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{j} + \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  en utilisant l'identité  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

On introduit alors

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (2.13)$$

vecteur excitation magnétique, on obtient  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ . Les équations de Maxwell dans la matière se présentent donc ainsi :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.14)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (2.16)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.17)$$

Ces équations décrivent le comportement du champ électromagnétique dans un milieu matériel. Cependant, elles sont pour l'instant insolubles, puisque les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  dépendent de la réponse du milieu au champ, réponse qui n'est pas *a priori* inscrite dans ces équations. La réponse linéaire permettra de donner une première manière de résoudre le problème.

### 2.2.2 Aspects énergétiques

Nous allons procéder de la même manière que pour le champ électromagnétique dans le vide, et obtenir à partir des équations de Maxwell macroscopiques une équation de conservation de l'énergie dans les milieux matériels.

Nous partons de l'équation de Maxwell-Ampère :  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ . On a alors

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Or une formule d'analyse vectorielle nous donne  $\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$ ; en utilisant de plus l'équation de Maxwell-Faraday sur  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ , on obtient finalement l'équation de conservation :

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.18)$$

Précisons la signification physique des termes. Tout d'abord, le terme à gauche de l'équation est évidemment la dissipation du courant libre dans le milieu, tout à fait analogue à ce qu'on observait dans le vide (c'est un terme de création).

En notant  $\mathbf{\Pi}_m = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ , nous obtenons l'expression du vecteur de Poynting dans la matière.

Enfin, nous pouvons interpréter le dernier terme de cette équation comme la variation de la densité d'énergie au sein du milieu. À ce stade de l'étude, ne connaissant pas le lien entre polarisation et champ, nous ne pouvons pas préciser plus l'expression de cette densité d'énergie. Cependant, nous pouvons préciser un tout petit peu plus la signification, en exploitant la définition des vecteurs excitation magnétique et déplacement électrique. En effet :

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} \right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.19)$$

On retrouve alors la variation d'énergie électromagnétique dans le vide; le second terme traduit les pertes diélectriques (en effet en l'absence d'effets magnétiques, on retrouve la puissance dissipée à cause du courant lié), et le dernier terme traduit les échanges magnétiques de polarisation magnétique.

## 2.3 Réponse linéaire

### 2.3.1 Définitions

Afin de résoudre les équations de Maxwell dans les milieux matériels, il est nécessaire de préciser la dépendance des induction magnétique et déplacement électrique en fonction des champs macroscopiques. Une des possibilités est d'utiliser la théorie de la réponse linéaire : la matière répond linéairement au champ électromagnétique qui lui est appliqué. Dans toute la suite, nous nous placerons dans le cas d'une onde monochromatique pour simplifier les calculs et les notations. Pour passer au cas général, il faut utiliser une transformée de Fourier et les produits de convolution, ce qui ne pose aucune difficulté de principe.

La réponse est définie par  $\mathbf{j}(\omega)$ ,  $\mathbf{P}(\omega)$  et  $\mathbf{M}(\omega)$ . Elle est dite linéaire s'il y a proportionnalité au champ incident, avec des coefficients de proportionnalité qui ne dépendent pas du champ appliqué. On introduit, dans le cas général, trois tenseurs d'ordre 2 (qui, en projection sur une base de l'espace, sont des matrices  $3 \times 3$ )  $[\sigma(\omega, \mathbf{r})]$ ,  $[\chi_e(\omega, \mathbf{r})]$  et  $[\chi_m(\omega, \mathbf{r})]$  vérifiant :

$$\mathbf{j}(\omega) = [\sigma(\omega, \mathbf{r})] \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{P}(\omega) = [\chi_e(\omega, \mathbf{r})] \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{M}(\omega) = [\chi_m(\omega, \mathbf{r})] \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \quad (2.22)$$

$[\sigma(\omega, \mathbf{r})]$ ,  $[\chi_e(\omega, \mathbf{r})]$  et  $[\chi_m(\omega, \mathbf{r})]$  sont appelés respectivement tenseur de conductivité, tenseur de susceptibilité électrique et tenseur de susceptibilité magnétique.



Si le milieu est isotrope, ces tenseurs deviennent des scalaires. On introduit alors  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ , et  $\mu_r = \frac{1}{1 - \chi_m}$  respectivement perméabilité diélectrique relative et permittivité magnétique relative. On a donc

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad \mu_r = \frac{1}{1 - \chi_m} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e \quad (2.24)$$

On étudiera en détail ce cas dans le chapitre suivant, qui concerne les milieux linéaires, homogènes et isotropes.

### 2.3.2 Énergétique liée aux susceptibilités

Il est intéressant de voir ici l'importance du caractères complexes des susceptibilités dans le cas isotrope. On pose alors

$$\begin{cases} \sigma = \sigma' + i\sigma'' \\ \chi_e = \chi_e' + i\chi_e'' \\ \chi_m = \chi_m' + i\chi_m'' \end{cases}$$

On rappelle que les pertes diélectriques et magnétiques s'expriment comme  $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  (formule 2.19). Ainsi on a

$$\frac{dW_{\text{dissipé}}}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

En utilisant  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$  et  $\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}$ , et en se plaçant dans le cas des ondes planes monochromatiques, on obtient ainsi

$$\left\langle \frac{dW_{\text{dissipé}}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \sigma' E^2 + \varepsilon_0 \omega \chi_e'' E^2 - \frac{\omega}{\mu_0} \chi_m'' B^2 \right) \quad (2.25)$$

Ainsi la partie imaginaire des susceptibilités traduit la dissipation d'énergie au sein du milieu.

### 2.3.3 Polarisabilité

Nous avons déjà vu l'expression de la polarisabilité induite, à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié (se référer à la section 1.2.3), on rappelle son expression  $\alpha_i = \frac{4\pi}{Z} r_0^3$  en statique. Or lorsque l'on s'intéresse à un milieu composé de molécules polaires, il y a compétition entre l'agitation thermique et l'orientation induite par le champ électrique local. Sans champ électrique, les orientations sont aléatoires et conduisent à une polarisation résultante nulle. Par contre, dès qu'il y a présence d'un champ électrique local, il y a un état d'équilibre statistique qui se crée et dépendant de cette compétition thermique/électrique. On parle alors de polarisabilité d'orientation, que nous n'explicitons que pour des champs faibles, au-delà il y a perte de linéarité. Nous verrons aussi que cette polarisation est bien plus importante que la polarisation induite, qui de fait ne joue réellement un rôle que dans certaines situations telles un milieu atomique, un milieu composé de molécules non polaires, ou les milieux dans lesquels le champ imposé est à très hautes fréquences (les molécules n'ont donc pas le temps de réagir au champ).

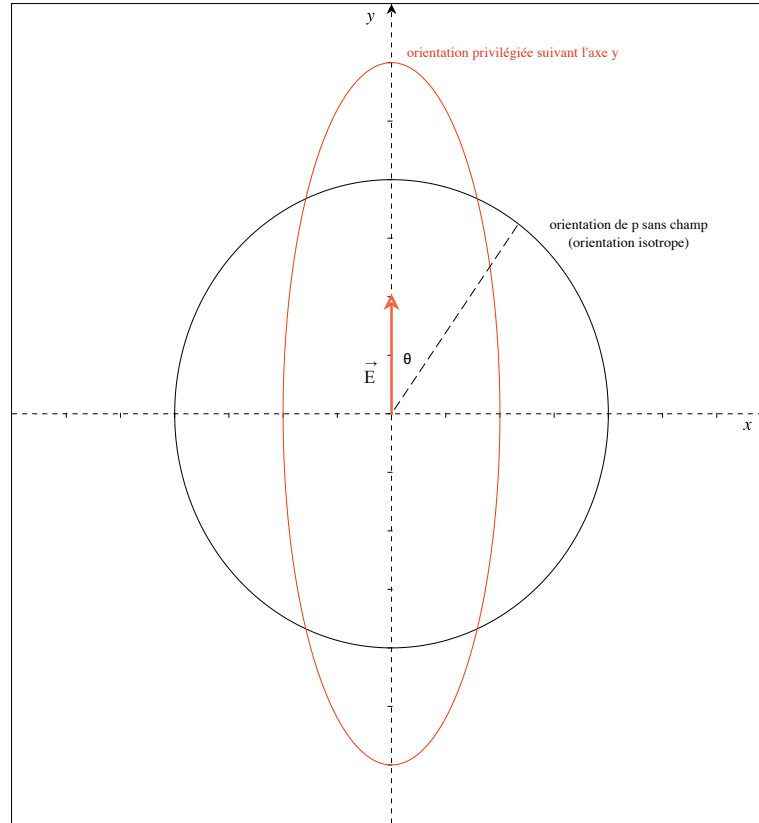
### Modèle de Langevin

On se place dans le cadre d'un champ statique, et on choisit le système d'axe pour que  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ . Dans le modèle de Langevin, seules les interactions champ-dipôle sont prises en compte, et la répartition des dipôles suit une statistique de Maxwell-Boltzmann. Il y a symétrie cylindrique dans tout le problème, et l'on a donc  $W_{int}(\theta, \phi) = -pE \cos \theta$ . On a donc

$$\langle \mathbf{p} \rangle = A \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathbf{p}(\theta, \phi) \exp\left(\frac{pE \cos \theta}{kT}\right) \sin \theta d\theta d\phi$$

En moyenne, les dipôle moléculaires vont s'orienter suivant le champ pour respecter la symétrie du problème, et  $p_z = p \cos \theta$ . Sachant que  $A$  est une constante de normalisation de la probabilité, et en notant  $a = \frac{pE}{kT}$  on obtient

$$\langle \mathbf{p} \rangle = p \left( \coth a - \frac{1}{a} \right) \mathbf{e}_z \quad (2.26)$$



**Fig. 2.4:** Diagramme d'orientation d'un dipôle électrique  $\mathbf{p}$  selon la présence ou non d'un champ  $E\mathbf{e}_y$

### Approximation en champ faible, polarisabilité d'orientation

On va développer l'expression de  $\langle \mathbf{p} \rangle$  pour  $a \ll 1$ , c'est-à-dire pour  $E \ll \frac{kT}{p}$ . Un développement limité en puissance de  $a$  nous donne  $\coth a - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{a}{3} - \frac{1}{a} + o(a) = \frac{a}{3} + o(a)$ , donc au premier ordre en  $E$  (ie au premier ordre en  $a$ ) on obtient  $\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{p^2}{3kT} \mathbf{E}$ . Or par définition on a  $\langle \mathbf{p} \rangle = \varepsilon_0 \alpha_{or} \mathbf{E}$  donc

$$\alpha_{or} = \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT} \quad (2.27)$$

La restriction aux champs faible est en fait peu contraignante : si on prend des ordres de grandeurs, par exemple  $T = 300$  K, et  $p = 3$  D =  $10^{-29}$  C.m, la limite en champ faible signifie  $E \ll 4,2 \cdot 10^{-8}$  V.m $^{-1}$ , sachant que les tensions de claquage dans la plupart des diélectriques sont de cet ordre de grandeur !

Si on compare  $\alpha_i$  et  $\alpha_{or}$ , on a  $\frac{\alpha_{or}}{\alpha_i} \simeq 10^3$  en prenant comme ordre de grandeur de  $r_0$  l'angström. On voit donc que pour des températures réalistes, la polarisabilité dominante dans les milieux moléculaires est la polarisabilité d'orientation.

### 2.3.4 Calcul de la susceptibilité dans un diélectrique

Cette partie est l'occasion de compléter ce qui a été vu au chapitre précédent, lorsque l'on a calculé la susceptibilité d'une vapeur atomique (c'est à cette occasion que nous avons rencontré pour la première fois la notion de susceptibilité). Nous allons voir notamment comment l'on peut écrire la susceptibilité d'un milieu dense, et utiliser pour cela l'expression du champ électrique au sein de la matière, obtenue en 2.1.3 .

On rappelle donc que la susceptibilité électrique dans un milieu dilué est  $\chi_e = N\alpha_e$  où  $\alpha_e$  est la polarisabilité d'un atome (ou molécule),  $N$  est le nombre de particules considéré par unité de volume, ces molécules constituant le milieu.

Dans le cas d'un milieu dense, chaque molécule interagit avec ses voisines, dans des interactions type dipôle-dipôle, Van der Waals, etc... (voir le cours d'*Etats de la matière*, premier chapitre). La réponse de la molécule considérée dépend donc du champ local vu par cette molécule :  $\mathbf{e}_{\text{macro}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{\text{loin}}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{\text{voisins}}(\mathbf{r})$  où le dernier champ de l'égalité est créé par les molécules à l'intérieur d'une sphère mésoscopique entourant la molécule étudiée. On effectue ainsi une moyenne sur ces grandeurs :

$$\mathbf{E}_{\text{local}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{loin}} + \langle \mathbf{e}_{\text{voisins}} \rangle (\mathbf{r})$$

Il faut bien noter ici que  $\mathbf{E}_{\text{sphère}} \neq \langle \mathbf{e}_{\text{voisins}} \rangle$  : en effet l'on rappelle que  $\mathbf{E}_{\text{sphère}}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{e}(\mathbf{p})P(\mathbf{p})d\mathbf{p}$  où  $P(\mathbf{p})$  désigne la probabilité de trouver une molécule en  $\mathbf{r} + \mathbf{p}$ . Or lorsque l'on regarde  $\langle \mathbf{e}_{\text{voisins}} \rangle$  on exclut la molécule au centre de la sphère mésoscopique puisque l'on s'intéresse à l'action de son environnement sur elle-même. La probabilité va donc changer. Ceci dit, dès que l'on s'éloigne suffisamment de la molécule, les deux quantités sont égales au premier ordre. Mais ici on est proche puisque l'on s'intéresse aux interactions entre molécules.

On va relier ces champs au champ macroscopique :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{loin}} + \mathbf{E}_{\text{sphère}}$  (cf 2.1.3). On a donc  $\mathbf{E}_{\text{local}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\text{sphère}} + \langle \mathbf{e}_{\text{voisins}} \rangle(\mathbf{r})$ .

Pour des raisons de symétries, la moyenne sur les voisins disparaît. On utilise ensuite l'égalité (2.11), et l'on obtient

$$\mathbf{E}_{\text{local}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad (2.28)$$

Ce champ permet alors de relier le moment dipolaire à la polarisabilité microscopique, et l'on va pouvoir conclure :  $\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha_e \mathbf{E}_{\text{local}}$ .

On a donc  $\mathbf{p} = \varepsilon_0 \alpha_e (\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0})$ . On introduit maintenant  $N$  la densité volumique de molécules dans le milieu, ce qui permet d'écrire  $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ .

On rappelle que la définition de la susceptibilité est  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ . On a donc  $\mathbf{P}(1 - \frac{N\alpha_e}{3}) = N\varepsilon_0 \alpha_e \mathbf{E} = \frac{N\alpha_e}{\chi_e} \mathbf{P}$ . Comme  $\mathbf{P}$  est non-nul, on obtient l'égalité dite de Clausius-Mossotti :

$$\chi_e(\omega) = \frac{N\alpha_e(\omega)}{1 - \frac{N\alpha_e(\omega)}{3}} \quad (2.29)$$

## Chapitre 3

# Propagation dans les milieux LHI

Nous allons étudier dans ce chapitre la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu linéaire, homogène et isotrope. Ces trois propriétés indiquent qu'il existe  $\sigma$ ,  $\chi_e$  et  $\chi_m$  scalaires, a priori éléments de  $\mathbb{C}$  (possibilité d'absorption par le milieu). Nous supposons le milieu neutre :  $\rho_{libre} = 0$ .

### 3.1 Équations de propagation, relation de dispersion

#### 3.1.1 Équations de Maxwell

On écrit le champ comme superposition d'ondes planes :  $\mathbf{E} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \iiint \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d\mathbf{k}$

On a  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0} \mathbf{B}$  et  $\mathbf{j}_{libre} = \sigma \mathbf{E}$

Ayant  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , ainsi que  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ , on peut introduire deux scalaires  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ ,  $\mu_r = \frac{1}{1 - \chi_m}$ , ce qui permet d'écrire les relations suivantes entre les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  d'une part,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  d'autre part :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (3.1)$$

On nomme  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  respectivement permittivité diélectrique relative et perméabilité magnétique relative du milieu.

En reprenant les équations de Maxwell dans les milieux matériels, ces dernières se réécrivent ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

On se placera dans l'espace réciproque, c'est-à-dire celui des ondes planes (ce qui est suffisant pour notre étude, puisqu'il y a décomposition du champ sur la base des ondes planes par transformée de Fourier). Nous avons donc  $\partial_t = -i\omega$ ,  $\mathbf{rot} = i\mathbf{k} \times$  et  $\text{div} = i\mathbf{k} \cdot$ .

On rappelle la conservation de la charge :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ . Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit qu'elle le soit dans l'espace réciproque pour tout vecteur  $\mathbf{k}$ .

$$\text{On a donc } -i\omega\rho + \sigma \text{div } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\rho - i\omega\rho = 0.$$

Ainsi,  $\rho_{\text{libre}} = 0$  sauf si  $\sigma = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$ ; on supposera donc dans toute la suite  $\sigma \neq i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r$ .

### 3.1.2 Équation de propagation

On utilise l'identité suivante :  $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{grad} \text{div}(\mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$  pour tout vecteur  $\mathbf{A}$ .

Ayant  $\rho_{\text{libre}} = 0$  on a  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  donc l'on a  $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$ . En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, on a  $-\mathbf{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \mathbf{E}$ .

On utilise alors l'équation de Maxwell-Ampère dans les LHI (groupe d'équations (3.2)) ainsi que  $\mathbf{j}_{\text{libre}} = \sigma \mathbf{E}$ , et l'on obtient, sachant que les opérateurs vectoriels sont indépendants du temps :

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu_0\mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En exploitant l'identité  $\mu_0\varepsilon_0c^2 = 1$ , on peut réécrire l'équation de propagation sous la forme suivante :

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\mu_r\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu_0\mu_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.3)$$

### 3.1.3 Relation de dispersion et propriétés de bases du champ

$\mathbf{E}$  est maintenant une onde plane. Exploitant les identités vues en 3.1.1, on a tout de suite

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.4)$$

Donc  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont transversaux.

On utilise maintenant l'équation (3.3) et les égalites sur les opérateurs, ce qui nous donne l'équation dite d'Helmutz :

$$\Delta \mathbf{E} = - \left( \omega^2 \frac{\mu_r\varepsilon_r}{c^2} + i\omega\mu_0\mu_r\sigma \right) \mathbf{E} \quad (3.5)$$

On en déduit la relation de dispersion suivante  $k^2 = \frac{\Omega^2(\omega)}{c^2}$ , avec

$$\frac{\Omega^2}{c^2} = \omega^2 \frac{\mu_r\varepsilon_r}{c^2} + i\omega\mu_0\mu_r \quad (3.6)$$

## 3.2 Milieux diélectriques

Dans cette section, on prend  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon_0 \neq 1$  et  $\mu_r = 1$  (milieu non-magnétique).

Exploitant l'égalité (3.6), on a  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r$ . On note  $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ , nommé indice de réfraction.

L'indice  $n$  peut être éventuellement complexe ; sa partie réelle est liée à la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu, sa partie imaginaire est liée à l'absorption par le milieu.

### 3.2.1 Vitesse de phase et absorption

On sépare partie réelle et partie imaginaire :  $n = n' - in''$  ( $n' \geq 0$ ,  $n'' \leq 0$  pour raisons physiques),  $\varepsilon_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$ . Ayant  $\varepsilon_r = 1 + \chi(\omega)$ , on a  $\varepsilon'_r = 1 + \Re(\chi)$  et  $\varepsilon''_r = \Im(\chi)$ .

On a  $n^2 = \varepsilon_r = n'^2 - n''^2 - 2in'n''$  donc par identification  $\varepsilon'_r = n'^2 - n''^2$  et  $\varepsilon''_r = -2n'n''$ .

On en déduit  $\varepsilon_r''^2 = 4n'^2 n''^2 = 4n'^2 (n'^2 - \varepsilon'_r)$ , ce qui nous fournit une équation bicarrée en  $n'$ , dont la résolution donne, en gardant les solutions physiquement acceptables :

$$n' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \varepsilon'_r + \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2} \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

$$n'' = \frac{-\varepsilon_r''}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left[ \varepsilon'_r + \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2} \right]^{1/2}} \quad (3.8)$$

En notant  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  (module du vecteur d'onde dans le vide) on a ici  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(nk_0 z - \omega t)}$  (on note  $\mathbf{e}_z$  la direction de propagation).

Ainsi, en remplaçant, on a  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(n'k_0 z - \omega t)} e^{n''k_0 z}$ . Il y a propagation à  $v_\phi = \frac{\omega}{n'k_0} = \frac{c}{n'}$ , et absorption avec épaisseur de peau  $\delta = \frac{1}{n''k_0}$ .

On voit donc la justification a posteriori du signe de  $n'$  (vitesse de phase positive) et de  $n''$  (pour éviter des divergences). On voit aussi que  $n'$  est l'indice de réfraction géométrique, celui utilisé dans l'optique géométrique.

Souvent,  $n' \sim |n|$  et  $n'' \ll n'$ , donc on aura  $v_\phi \simeq \frac{c}{|n|}$ .

### 3.2.2 Vitesse de groupe

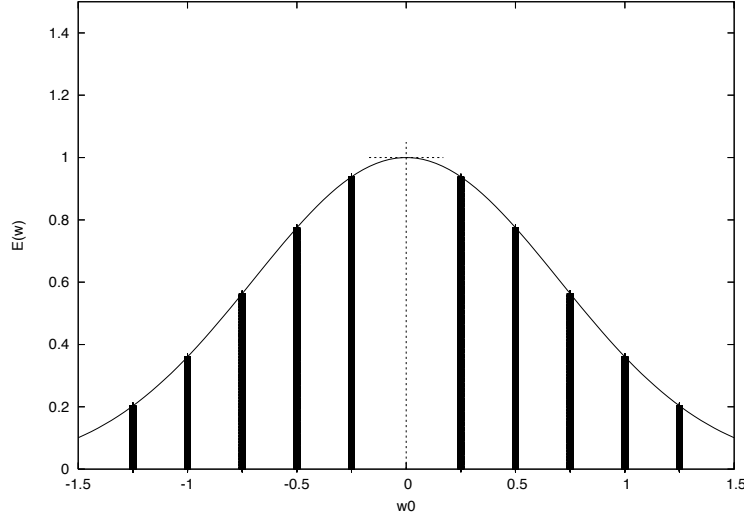
Soit un paquet d'onde donné. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'onde, ou encore du maximum du paquet.

On peut démontrer rigoureusement, à partir de cette définition (et par un calcul), que  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  ; nous nous contenterons ici de donner un raisonnement "avec les mains" permettant de le retrouver.

À  $\omega = \omega_0$ , au premier ordre, la phase est constante. Ainsi, ayant  $\phi(\omega) = k(\omega)z - \omega t$ , on a

$$\left( \frac{d\phi}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{dk}{d\omega} z - t = 0.$$

On a donc  $v_g = \frac{t}{z} = \frac{d\omega}{dk}$ .



**Fig. 3.1:** Paquet d'onde gaussien centré sur  $\omega_0$

Ici,  $k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\omega)$ . On différencie cette égalité, et l'on obtient alors

$$v_g = \frac{2k(\omega)}{\frac{2\omega\varepsilon_r(\omega)}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\varepsilon_r}{d\omega}} \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Milieux dilués et milieux denses

On donne très rapidement les expressions de  $n$ ,  $n'$  et  $n''$  pour ces deux types de milieux.

#### Milieux dilués

On a alors  $N\alpha \ll 1$  où  $N$  est la densité volumique de particules,  $\alpha$  la polarisabilité microscopique. Ayant  $\chi_e = N\alpha$  dans ce cas, on a avec un développement limité  $n = 1 + \frac{N\alpha}{2}$ . D'où

$$n'(\omega) = 1 + \frac{N\alpha'}{2} \quad (3.10)$$

$$n''(\omega) = -\frac{N\alpha''}{2} \quad (3.11)$$

avec  $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ .

#### Milieux denses



On utilise l'équation de Clausius-Mossotti (équation (2. ?)), nous donnant l'expression de  $\chi_e$  en fonction de  $\alpha$ . Nous ne donnons ici que  $n(\omega)$  :

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1 + \frac{2N\alpha}{3}}{1 - \frac{N\alpha}{3}}} \quad (3.12)$$

### 3.3 Milieux conducteurs

Dans cette section, on prend maintenant  $\sigma \neq 0$ , et l'on a toujours  $\varepsilon_r \neq 1$  ainsi que  $\mu_r = 1$ . On suppose de plus que la polarisation est négligeable :  $\varepsilon_r$  ne dépend plus de la fréquence.

Il existe dans ces milieux des électrons libres, de conduction : ils induisent un courant  $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ . On se place dans un plasma : milieu où cohabitent ions et électrons libres. On rappelle que  $M_{\text{ions}} \gg m_e$  : on néglige donc l'effet des ions dans le courant libre, ces derniers ne jouant un rôle qu'en ce qui concerne les propriétés diélectriques. Ainsi, le traitement des plasmas, dans cette approximation, est identique au traitement des métaux, ce qui explique pourquoi l'on ne s'intéresse qu'aux plasmas dans cette partie.

#### 3.3.1 Modèle de conductivité

On modélise le freinage d'un électron par une force de frottement visqueuse  $\mathbf{f}_v = -m\gamma\mathbf{v}$ . On rappelle que l'on se place dans un cadre classique, donc  $v \ll c$ ; comme  $\|\mathbf{E}\| = \|\mathbf{B}\|c$  (cf équations (3.2)), on peut négliger la force de Lorentz. De plus, pour se simplifier un peu les calculs, on néglige les vitesses thermique (dans les plasmas) ou quantique (dans les métaux)<sup>1</sup>. On a donc

$$q\mathbf{E} - m\gamma\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{v}}$$

Comme la réponse est ici linéaire, si  $\mathbf{E}$  est de pulsation  $\omega$ ,  $\mathbf{v}$  aussi. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{q}{m\gamma - i\omega m} \mathbf{E} \\ &= \frac{q}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} \mathbf{E} \end{aligned}$$

En notant  $N$  la densité volumique d'électrons de conduction, on a  $\mathbf{j}_{\text{libre}} = Nq\mathbf{v} = \sigma\mathbf{E}$ .

On note  $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\varepsilon_r}$  la pulsation plasma. On a alors, dans ce modèle,

$$\sigma = \frac{\omega_p^2\varepsilon_0\varepsilon_r}{\gamma - i\omega} \quad (3.13)$$

La conductivité est donc généralement complexe. On distinguera trois régimes suivant la position de  $\omega$  vis-à-vis de  $\omega_p$  et  $\gamma$ .

On peut aussi écrire la relation de dispersion, en exploitant l'égalité (3.6) :

$$k^2 = k_0^2\varepsilon_r \left( 1 + \frac{i\omega_p^2}{\omega(\gamma - i\omega)} \right) \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>La vitesse thermique est de l'ordre de 100 m.s<sup>-1</sup> dans un plasma

Pour avoir en tête quelques ordres de grandeur, on peut s'intéresser au cas du cuivre Cu à très basse fréquence : on a  $\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\varepsilon_r \simeq 1$  et une densité de  $N \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$  (chaque atome fournit un électron de conduction (cf cours de *Semi-Conducteurs* de Emmanuelle Deleporte), et le calcul de la densité atomique se fait avec par exemple un réseau cubique centré de paramètre de maille de 2-3 Å). On a alors un temps de relaxation  $\gamma \sim 10^{13} \text{ s}^{-1}$  et  $\omega_p \sim 10^{16} \text{ s}^{-1}$ . Ces ordres de grandeurs sont relativement réalistes (voir par exemple Jackson (6) ou Raimond (6, partie VI, page 41))

### 3.3.2 Comportement basses fréquences ( $\omega \ll \gamma \ll \omega_p$ )

On reprend l'équation (3.14), où l'on applique les approximations requises ; on obtient facilement

$$k^2 = k_0^2 \varepsilon_r \frac{i\omega_p^2}{\omega\gamma} \quad (3.15)$$

Ce domaine de fréquence correspond à un domaine où la conductivité est réelle (on retrouve le modèle de Drude) :

$$\sigma = \frac{\omega_p \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\gamma} = \frac{Nq^2}{m\gamma} \quad (3.16)$$

On peut prendre la racine carrée de l'équation (3.15), et l'on obtient

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta} \quad (3.17)$$

avec  $\delta = \sqrt{\frac{2\gamma\omega}{\varepsilon_r \omega_p^2}} \frac{1}{k_0}$  épaisseur de peau. On a ici  $|k_{\text{réel}}| = |k_{\text{imaginaire}}|$ , et  $\mathbf{E} = \mathbf{E}' e^{\frac{-z}{\delta}}$  : le champ s'amortit sur la distance  $\delta$ , qui est de l'ordre de la longueur d'onde dans le milieu. L'onde ne pénètre que très peu dans le milieu.

Pour avoir une idée des ordres de grandeurs, on peut encore s'intéresser au cuivre Cu (bon métal) : avec les mêmes données qu'en 3.3.1, et une fréquence de  $\omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$ , on a  $\delta \simeq 3 \text{ cm}$ . Cet effet est donc négligé dans les lignes haute puissance, où le diamètre de ligne est généralement grand. Par contre, on se rend compte que pour les circuits électroniques, cet effet n'est plus négligeable ; on doit donc se placer à des fréquences plus élevées, où l'on peut obtenir  $\delta = 30 \mu\text{m}$ .

### 3.3.3 Comportement hautes fréquences ( $\omega > \omega_p \gg \gamma$ )

On a une conductivité  $\sigma$  imaginaire pure :  $\sigma = \frac{i\omega_p \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\omega}$ . On a la relation de dispersion

$$k^2 = k_0^2 \varepsilon_r \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) > 0 \quad (3.18)$$

( $\varepsilon_r$  réel ici), en faisant les approximations requises dans l'équation (3.14) et  $n > 0$  (pas d'absorption), donc

$$v_\phi = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)}} > c \quad (3.19)$$

pour  $\varepsilon_r = 1$  par exemple : la phase peut se propager à des vitesses supraluminiques, mais elle ne transporte pas l'information qui se trouve contenue, quant à elle, dans la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (3.20)$$

qui est bien inférieure à  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} < c$  comme il se doit. On remarque que  $\omega_p$  est une fréquence de coupure : pour  $\omega > \omega_p$  le milieu est d'une parfaite transparence, et l'on verra dans la section (3.3.4) que pour  $\omega < \omega_p$  l'onde est évanescente avec une très forte absorption.

### 3.3.4 Comportement à fréquences intermédiaires : $\omega < \omega_p, \omega \gg \gamma$

La relation de dispersion est identique à l'équation (3.18), avec cette fois-ci  $k^2 < 0$ .  $k$  est donc imaginaire pur :

$$k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\varepsilon_r(\omega_p^2 - \omega^2)} \quad (3.21)$$

On introduit de nouveau  $\delta = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega_p^2 - \omega^2)}}$  l'épaisseur de peau, et  $k = \pm \frac{i}{\delta}$ . On a donc (si l'on choisit, par commodité d'écriture,  $(O, \mathbf{e}_x)$  comme direction de propagation)

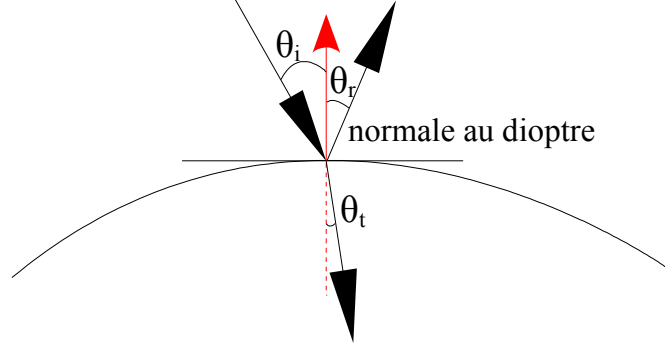
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

en ne gardant que le signe physiquement cohérent (pas de divergence du champ en l'infini). On a bien une onde stationnaire absorbée par le milieu, c'est-à-dire une onde évanescente. Si on utilise l'équation de Maxwell-Faraday, on constate que le champ  $\mathbf{B}$  est en quadrature avec le champ  $\mathbf{E}$ .

L'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau est du micron dans un conducteur par exemple : l'onde est très fortement absorbée, ce que l'on avait prédit dans la partie 3.3.3, et qui confirme que  $\omega_p$  est une fréquence de coupure du problème étudié.

### 3.4 Relations de passage et coefficients de Fresnel

#### 3.4.1 Relations de passage lors de la traversée d'un dioptré séparant 2 LHI



**Fig. 3.2:** Schéma de principe

Nous envisageons ici la propagation d'une onde entre deux milieux LHI d'indices différents. Il apparaît alors une discontinuité des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à la traversée du dioptré séparant les deux milieux.

On rappelle que dans le vide, les équations de Maxwell (Maxwell-Gauss pour le champ  $\mathbf{E}$ , Maxwell-Ampère pour champ  $\mathbf{B}$ ) imposent les relations suivantes (en appliquant les théorèmes d'Ampère et de Gauss aux bons contours et bonnes surfaces) :

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_S \times \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.24)$$

où  $\rho_S$  et  $\mathbf{j}_S$  désignent respectivement les densité surfacique de charge et courant surfacique présents sur la surface du dioptré (conducteur fin infini dans le vide par exemple).

Or dans un LHI, on a formellement identité entre les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère avec leurs analogues dans le vide, en remplaçant  $\mathbf{E}$  par  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  par  $\mathbf{H}$ , et  $\mu_0 \mathbf{j}_S$ ,  $\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}$  par  $\mathbf{j}_{S, libre}$ ,  $\rho_{S, libre}$ . On en déduit les relations de passage suivantes :

$$\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 = \rho_{S, libre} \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{j}_{S, libre} \times \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.26)$$

**3.4.2 Coefficients de Fresnel**

(à compléter). Rapidement : soit  $t = \frac{E_t}{E_i}$  coefficient de transmission,  $r = \frac{E_r}{E_i}$  coefficient de réflexion. On peut montrer (ce sera fait prochainement) que l'on a en incidence normale :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (3.27)$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (3.28)$$

Pour l'énergie, il y a proportionnalité avec  $n_j \|\mathbf{E}_k\|^2$  où  $j = 1, 2$ ,  $k = i, t, r$ .  
On trouve alors

$$R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (3.29)$$

$$T = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (3.30)$$

et l'on a bien  $R+T=1$  (conservation de l'énergie).



## Chapitre 4

# Étude des milieux linéaires homogènes anisotropes

### 4.1 Description générale des milieux anisotropes

#### 4.1.1 Position du problème

Lors du chapitre précédent, nous avons supposé que la relation entre le champ électrique et polarisation électrique était linéaire avec un coefficient scalaire. Cela traduit le fait que le milieu est isotrope.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au cas du milieu diélectrique anisotrope, mais qui reste linéaire et homogène. Ainsi, de manière générale champ  $\mathbf{E}$  et polarisation  $\mathbf{P}$  ne sont plus nécessairement colinéaires et les propriétés du milieu varient selon la direction de propagation choisie, contrairement au cas du milieu isotrope. Cependant, il y a toujours une relation linéaire entre les composantes des deux vecteurs, via en fait une relation tensorielle

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0[\chi]\mathbf{E} \quad (4.1)$$

où  $[\chi]$  est le tenseur de polarisabilité diélectrique, qui est représenté par une matrice  $3 \times 3$  dans une base de l'espace.

Dans toute la suite du problème, on prendra  $\sigma = 0$  et  $\mu_r = 1$ , ce qui signifie que le milieu est non conducteur et non magnétique. Le milieu sera homogène et transparent, donc sans absorption, ce qui signifie que le tenseur de polarisabilité est réel :  $[\chi] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Sans charges ni courants libres, les équations de Maxwell sont

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

La loi de conservation de l'énergie reste valable :

$$\text{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) = 0 \quad (4.2)$$

avec ici  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{\text{vide}}$  car le milieu est non magnétique. On écrit  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \mathbf{E}$  avec  $[\varepsilon_r] = \mathbb{I} + [\chi]$  tenseur diélectrique.

On peut donner quelques exemples de milieux anisotropes : les cristaux non cubiques, qui ont donc une anisotropie naturelle, ou bien encore les cristaux soumis à une contrainte mécanique qui provoque l'anisotropie du milieu (photoélasticité). On peut aussi penser à certains liquides placés dans un champ magnétique ou électrique intense, et qui deviennent anisotropes par biréfringence.

#### 4.1.2 Axes principaux du milieu

On va tout d'abord établir une propriété essentielle, à savoir la symétrie du tenseur diélectrique. On utilise la convention d'Einstein dans la démonstration, à savoir qu'un indice répété est sommé (on omet le signe somme devant l'expression). On a  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = E_k \varepsilon_0 \varepsilon_r^{kl} E_l$  donc

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = - \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r^{kl} (\dot{E}_k E_l + E_k \dot{E}_l) + \frac{1}{2\mu_0} \dot{B}^2 \right)$$

où  $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}$ . Mais l'on a aussi  $\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$ , donc en égalant on a :

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r^{kl} (\dot{E}_k E_l + E_k \dot{E}_l) + \frac{1}{2\mu_0} \dot{B}^2 = E_k \varepsilon_0 \varepsilon_r^{kl} \dot{E}_l + \frac{1}{2\mu_0} \dot{B}^2$$

On a donc  $\varepsilon_r^{kl} (\dot{E}_k E_l - E_k \dot{E}_l) = 0$ . Les indices  $k$  et  $l$  sont muets, donc on peut les interchanger dans le deuxième terme afin de mettre en facteur le champ, ce qui donne pour toute valeur du champ

$$\dot{E}_k E_l (\varepsilon_r^{kl} - \varepsilon_r^{lk}) = 0$$

Ceci devant être vrai pour n'importe quelle configuration du champ, on en déduit alors que  $\varepsilon_r^{kl} = \varepsilon_r^{lk}$  et donc le tenseur diélectrique est ici symétrique réel.

Un tenseur symétrique réel est diagonalisable : on peut donc trouver une base de l'espace telle que ses coefficients soient uniquement diagonaux. On en déduit la définition suivante :

**Définition 1** Soit  $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$  une base de diagonalisation du tenseur diélectrique, les trois vecteurs de la base sont les vecteurs directeurs des axes principaux du milieu.

On peut réécrire  $\mathbf{D}$  selon ce nouveau repère, et l'on a  $\mathbf{D} = D_X \mathbf{e}_X + D_Y \mathbf{e}_Y + D_Z \mathbf{e}_Z$  avec  $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_r^{ii} E_i$ ,  $i = X, Y, Z$ .

On  $\varepsilon_r^{ii} \geq 0$  car il n'y a pas d'absorption, ce qui permet d'introduire  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_r^{XX}}$ , de même pour  $n_2$  et  $n_3$  : ce sont les indices principaux du milieu, auxquels l'on peut associer une vitesse de propagation propre de la lumière. Il y a alors trois cas de figures possibles :

1.  $n_1 = n_2 = n_3$  : le milieu est alors **isotrope**, c'est un milieu LHI transparent étudié dans le chapitre III.
2. **Milieux uniaxes** : 2 indices sont égaux, par exemple  $n_2 = n_3$ . On définit un axe optique, qui est ici l'axe  $(O, \mathbf{e}_X)$ , et l'indice  $n_1$  est appelé indice extraordinaire, l'indice  $n_o = n_2 = n_3$  est appelé indice ordinaire.
3. **Milieu biaxes** : les trois indices optiques sont distincts. La dénomination biaxe se comprend en étudiant par exemple une onde se propageant selon  $(O, \mathbf{e}_Z)$  : par transversalité,  $\mathbf{D} \in (O, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Z)$  et ses deux composantes se propagent à des vitesses différentes.



## 4.2 Étude analytique de la propagation

### 4.2.1 Structure d'une onde plane

On se place en notation complexe :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \mu_0 \mathbf{H}$  car le milieu est non-magnétique. En appliquant les équations de Maxwell rappelées en 4.4.1, on a  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$  :  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  sont transversaux. On a aussi

$$\mathbf{D} = -\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{B}}{\mu_0 \omega} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega} \quad (4.4)$$

On en déduit que  $(\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{B})$  forme un trièdre direct, et l'on en déduit

**Définition 2** Le plan  $(\mathbf{B}, \mathbf{D})$  forme le plan d'onde, perpendiculaire à la direction de propagation.

Le plan  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$  forme le plan de vibration,  $\mathbf{D}$  n'étant pas colinéaire à  $\mathbf{E}$  ce dernier n'est pas transversal.

On notera que  $\mathbf{\Pi}$  n'est pas non plus dans la direction de propagation : la direction de transport de l'énergie ne se confond pas avec la direction du rayon lumineux. On notera aussi que le milieu étant transparent, les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  sont en phase, les susceptibilités étant réelles.

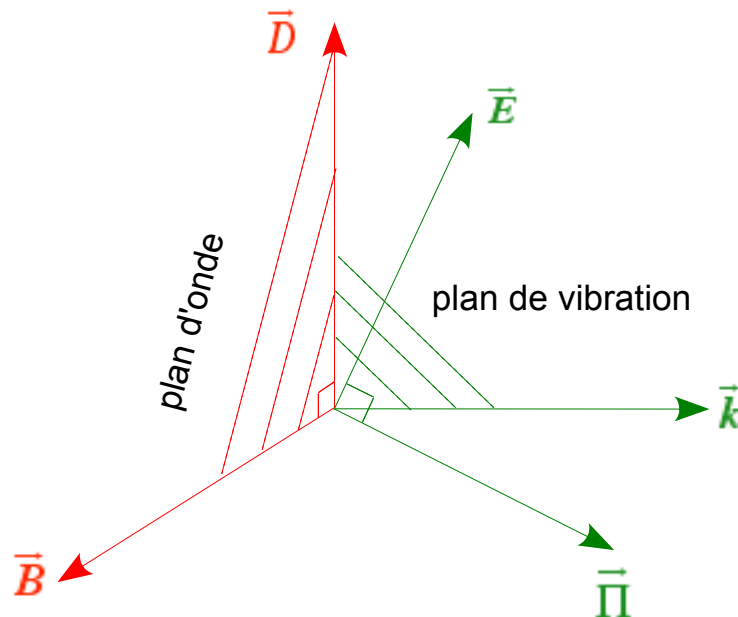


Fig. 4.1: Schéma des plans d'étude dans un milieu anisotrope

#### 4.2.2 Relation de dispersion

#### 4.2.3 Relation de Fresnel aux indices

### 4.3 Surface des indices

#### 4.3.1 Définition

#### 4.3.2 Cas du milieu uniaxe

#### 4.3.3 Construction géométrique

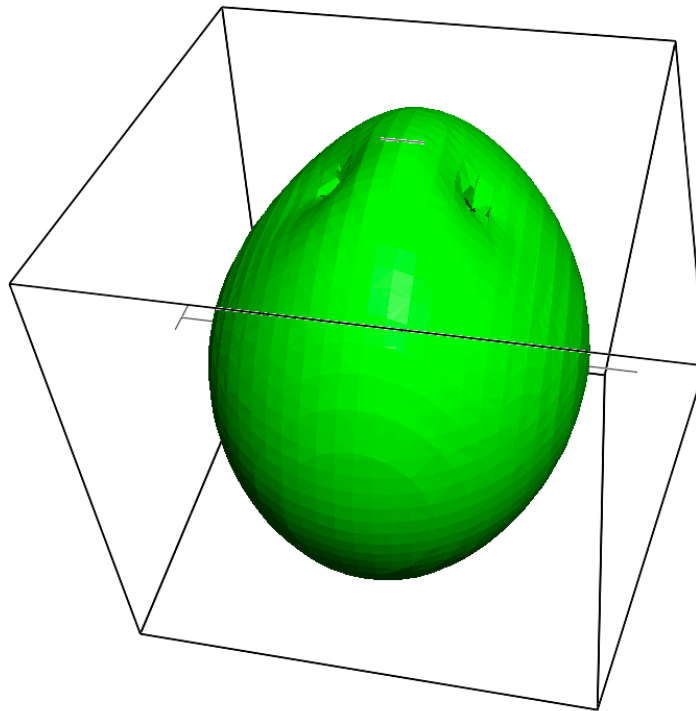


Fig. 4.2: Surface des indices, cas général

#### 4.4 Ellipsoïde des indices

4.4.1 Direction propres ou neutres

4.4.2 Ellipsoïde des indices

4.4.3 Ellipsoïde dans un milieu uniaxe

#### 4.5 Lames minces

4.5.1 Définition

4.5.2 Propagation d'une onde dans la lame

4.5.3 Effet sur la polarisation, lames demi-onde et quart-onde



## **Annexe A**

# **Modèle semi-quantique de rayonnement**

### **Introduction aux appendices**

Les deux appendices qui suivent ont pour objectif d'introduire les outils quantiques de l'étude de l'électromagnétisme. Elles sont, bien entendu, purement facultatives.

La première appendice donne un modèle semi-quantique de rayonnement, très largement inspiré des quelques passages traitant de la quantification de l'atome dans l'interaction matière-rayonnement du cours de J-M Raimond (7, pages 264-274, partie V). On y verra que les résultats obtenus de manière totalement classique sont assez réalistes.

La deuxième appendice sera l'occasion de donner un premier modèle, très basique, d'électrodynamique quantique. Le champ sera quantifié selon un de ses modes propres, et l'atome sera traité de façon simple comme un système quantique à deux niveaux. Nous verrons que ce modèle, pourtant très "pédestre", expliquera de façon satisfaisante le processus d'émission spontanée de l'atome, à partir de l'énergie du vide. Cette appendice est basée sur la lecture du cours de DEA de Claude Fabre (5, partie 4) et sur le sujet d'examen 2006 de Mécanique Quantique de la licence Phytem.

### **Traitement semi-quantique**

On va ici considérer l'atome comme un objet quantique tout en modélisant le rayonnement incident dans le cadre des équations de Maxwell.



## Annexe B

# Un premier modèle quantique d'émission spontanée

Historiquement, le développement de l'électrodynamique quantique démarra dans les années 1930, sous l'impulsion de physiciens comme Dirac et Pauli. Cependant, malgré d'indéniables succès, il faut attendre 1950 et la théorie de la renormalisabilité développée par Schwinger, Tomonaga et Feynman pour que l'électrodynamique quantique (plus simplement dénommée QED en abrégé selon la terminologie anglo-saxonne) triomphe définitivement, en rendant finies des quantités qui jusque-là divergeaient dans les calculs. Le succès de la théorie s'exprime par exemple dans la prédiction de l'anomalie du moment gyromagnétique de l'électron (ce que l'équation de Dirac ne contenait pas).

Les résultats rigoureux s'appuient sur des considérations de théorie quantique des champs, qui est l'outil moderne pour décrire les interactions en physique quantique. Cependant, cela dépasse de loin le cadre de l'exposé, même dans le contexte de cette annexe. Pour en savoir plus, on peut se référer au cours de DEA de Claude Fabre (qui détaille tous les opérateurs mis en jeu) (5, pages 36-40) ou encore aux cours complets de théorie quantique des champs que l'on trouve en bibliothèque universitaire. Nous pouvons néanmoins mentionner que la quantification s'appuie sur une procédure dite canonique, à partir du lagrangien du champ électromagnétique.

### B.1 Quantification du champ

On se place dans un mode propre du champ électromagnétique. Classiquement, cela correspond à une plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$  (l'axe de propagation est choisi arbitrairement, mais cela ne change rien à notre propos). On peut alors montrer en théorie des champs que formellement, la situation est analogue à celle d'un oscillateur harmonique. On introduit donc l'opérateur hermitien champ électrique  $\hat{E}(z) = E_0 (\hat{a}e^{ikz} + \hat{a}^\dagger e^{-ikz})$  où  $\hat{a}$  et son conjugué hermitique sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de l'oscillateur harmonique à une dimension. On note  $|n\rangle$  les états propres du champ, appelés états à  $n$  photons ou encore états de Fock. Dans ce contexte, l'hamiltonien du champ électromagnétique est  $H_\omega^{e.m} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$ .

Par définition, on a alors

$$H_{\omega}^{e.m}|n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.1})$$

On rappelle les égalités suivantes sur les opérateurs de création et d'annihilation de photons :

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (\text{B.4})$$

L'état fondamental du champ est le vide, correspondant à l'état  $|0\rangle$ .

On a  $\langle E(z) \rangle = \langle 0|\hat{E}(z)|0\rangle = 0$  du fait des égalités ci-dessus. Nous retrouvons donc un résultat classique, à savoir que dans une région vide, il n'y a pas de champ qui y règne.

Cependant, si l'on calcule la variance du champ, on obtient  $\sigma^2 = E_0^2$ , en utilisant la relation de commutation  $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$ . Ainsi, le vide quantique n'est pas "vide", ce qui est l'origine fondamentale de deux phénomènes : la force de Casimir (que l'on mentionne ici sans plus de détails) et l'émission spontanée des atomes.

## B.2 Interaction atome-champ

On modélise l'atome de manière simplifiée comme un système à deux niveaux  $|a\rangle$  (le fondamental, d'énergie prise égale à zéro par souci de simplification) et  $|b\rangle$  le premier état excité. L'interaction est résonnante, c'est-à-dire que l'énergie du niveau  $|b\rangle$  est égale à  $\hbar\omega$  (ou plus exactement, la fréquence du champ est prise égale à la fréquence de la transition entre les deux niveaux).

On se place dans l'espace de Hilbert des états du système, c'est-à-dire l'espace produit tensoriel  $\mathcal{E}_{at-em} = \mathcal{E}_{at} \otimes \mathcal{E}_{em}$  dont une base est  $\{|a\rangle \otimes |n\rangle; |b\rangle \otimes |m\rangle\}_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ . On notera dans la suite  $|a\rangle \otimes |n\rangle = |a, n\rangle$  pour plus de commodités.

L'hamiltonien du système est la somme de trois hamiltoniens : ceux des sous-systèmes atome et champ séparés, ainsi que l'hamiltonien de couplage atome-champ (ou encore appelé hamiltonien d'interaction). On a donc

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega|b\rangle\langle b| + \hbar\omega \left( \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.6})$$

et

$$\hat{H}_{int} = \hbar\Omega \left( \hat{a}|b\rangle\langle a| + \hat{a}^{\dagger}|a\rangle\langle b| \right) \quad (\text{B.7})$$

L'interprétation du terme  $\hat{H}_0$  est transparente : on voit apparaître la somme de l'hamiltonien du champ électromagnétique (vu en première partie de cette annexe) et d'un hamiltonien atomique, qui est la projection avec valeur propre associée sur l'état excité  $|b\rangle$ , et qui est bien nul quand on se trouve dans l'état fondamental (on rappelle que ces états sont orthogonaux).

En revanche, le terme d'interaction nécessite quelques explications. Si le système est initialement dans l'état  $|a, n\rangle$  avec  $n > 0$ , il y a possibilité par interaction électromagnétique de faire



passer l'atome dans un état excité. La conservation de l'énergie impose alors que soit détruit un photon, donc l'état final du système doit être  $|b, n-1\rangle$ . On réalise cela grâce à l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  et à l'opérateur d'excitation  $|b\rangle\langle a|$  (qui fait "monter" en niveau d'énergie). Le second terme de l'hamiltonien d'interaction a une interprétation similaire, pour la désexcitation de l'atome et la création d'un photon. Le processus oscille à la fréquence  $\Omega$ .

Pour effectuer les calculs, il est utile de diagonaliser  $\hat{H}$ . Or il se trouve que l'on a sur la base de départ

$$\begin{aligned}\hat{H}|a, 0\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}|a, 0\rangle, \quad \hat{H}|a, n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|a, n\rangle + \hbar\Omega\sqrt{n}|b, n-1\rangle \\ \hat{H}|b, n-1\rangle &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|b, n-1\rangle + \hbar\Omega\sqrt{n}|a, n\rangle\end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer les égalités (B.2), (B.3) et (B.4). On en déduit que  $|a, 0\rangle$  est vecteur propre, et que les sous-espaces  $\mathcal{E}_n$  de base  $\{|b, n-1\rangle; |a, n\rangle\}$  pour  $n > 0$  sont stables par  $\hat{H}$ . Sur chacun des ces sous-espaces, la matrice de l'hamiltonien s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) & \hbar\Omega\sqrt{n} \\ \hbar\Omega\sqrt{n} & \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

La diagonaliser est aisé, et nous permet de trouver les valeurs propres et vecteurs propres de l'hamiltonien. La base propre de  $\hat{H}$  est  $\{|a, 0\rangle; |\phi_n\rangle_1; |\phi_n\rangle_2\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec valeurs propres respectives  $0, \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \hbar\Omega\sqrt{n}, \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega\sqrt{n}$ .

Les vecteurs de la base sont définis ainsi :

$$|\phi_n\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b, n-1\rangle + |a, n\rangle) \quad (\text{B.9})$$

$$|\phi_n\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|b, n-1\rangle - |a, n\rangle) \quad (\text{B.10})$$

L'atome est maintenant pris dans son état excité, dans le vide (le champ électromagnétique est donc à son état fondamental, sans photons). On a donc  $|\psi\rangle(t=0) = |b, 0\rangle$ . Le système obéit à l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$ .

On décompose sur la base des vecteurs propres de l'hamiltonien, et l'on obtient alors très facilement  $|\psi\rangle(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \exp\left(-i\left(\frac{3\omega}{2} - \Omega\right)t\right) |\phi\rangle_1 + \exp\left(-i\left(\frac{3\omega}{2} + \Omega\right)t\right) |\phi\rangle_2 \right)$ .

En réécrivant sur la base de départ en exploitant les identités (B.9) et (B.10), on obtient l'expression suivante après simplifications :

$$|\psi\rangle(t) = e^{-i\frac{3}{2}\omega t} (\cos \Omega t |b, 0\rangle - i \sin \Omega t |a, 1\rangle) \quad (\text{B.11})$$

Nous sommes parvenus à nos fins. En effet, l'égalité (B.11) met en évidence un phénomène d'oscillation de l'atome entre les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ ; on appelle ces oscillations "oscillations de Rabi", et la fréquence d'oscillation qui est ici quantifiée est reliée au dipôle électrique de l'atome. Cela signifie, entre autres, que l'atome se retrouve à certains instants dans son état fondamental

alors que le champ a gagné un photon : il y a donc eu émission d'un photon par l'atome sans stimulation extérieure, par simple couplage avec le vide. C'est exactement ce que l'on appelle l'émission spontanée.

# Références

- [1] BORN, M. ET WOLF, E. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction*. Cambridge University Press, 1951, ch. 14, pp. 662–663.
- [2] CROZON, M., ET VANNUCCI, F. *Les particules élémentaires*. PUF, 1993, pp. 44–53.
- [3] DELEPORTE, E. *Semi-conducteurs*. Cours de L3 Phytem, 2005-2006, ch. partie 2 du module IETI.
- [4] DESVILLETES, L. *Mathématiques*. Cours de L3 Phytem, 2005-2006, ch. Distributions.
- [5] FABRE, C. *Interaction matière-rayonnement*. Cours de DEA de Physique Quantique de Paris, 2000, pp. 01–59.  
**URL** : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/Fabre/fabre-cours.ps>
- [6] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. Wiley ; third edition, August 10, 1998.
- [7] RAIMOND, J-M. *Électromagnétisme et relativité*. Laboratoire Kastler Brossel, Cours du MIP, 10 octobre 2000, ch. 4-5-6.
- [8] TCHANG-BRILLET, L. *Cours d'électromagnétisme*. Cours de L3 Phytem, 2005-2006, ch. 1-4.