



Master 1 Phytem

Devoir en temps libre
Physique non-linéaire

Julien Baglio

9 janvier 2007

1 Description

1. Tout d'abord, les vitesses avant le choc et après le choc sont en sens contraire. Cela impose $\mu \geq 0$. On a donc

$$\mu = \left| \frac{v_n^i - \dot{A}(t_n)}{v_n^f - \dot{A}(t_n)} \right|$$

μ est donc un coefficient de restitution sur la vitesse, il ne peut donc dépasser 1. On a donc bien $0 \leq \mu \leq 1$.

Les cas extrêmes correspondent à un choc élastique ($\mu = 1$) et à un choc profondément inélastique ($\mu = 0$) où toute l'énergie cinétique de la bille est absorbée par le plateau.

2. On a trois paramètres caractéristiques : l'amplitude A de dimension $[L]$, la pulsation Ω de dimension $[T]^{-1}$ et l'accélération de la pesanteur g de dimension $[L][T]^{-2}$. On construit donc

$$Y = \frac{A\Omega^2}{g}$$

paramètre sans dimension du problème.

3. L'espace des phases est un plan bidimensionnel paramétré en $(z, v = \dot{z})$. Il se contracte au cours du temps si le vibreur est immobile car $\mu < 1$.

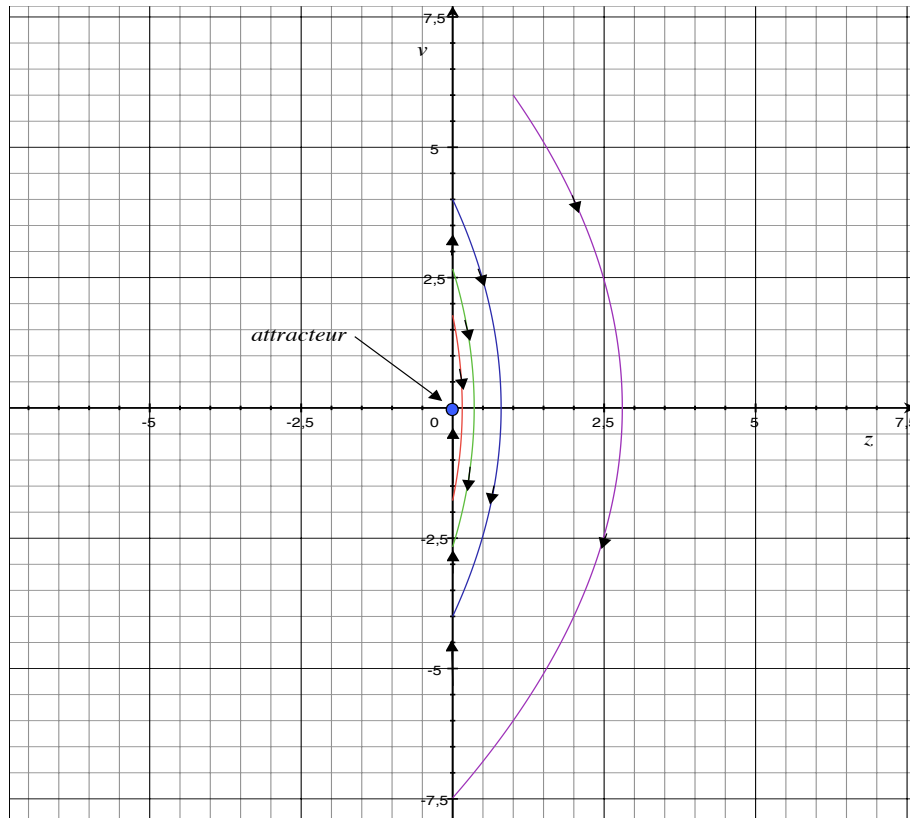


FIG. 1 – Une trajectoire dans l'espace des phases pour un plateau immobile, l'origine est l'altitude du plateau par un changement de repère

4. On suppose le vibreur immobile. On lance la bille du plateau, d'altitude prise égale à A . On utilise la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{z} = -mg$$

puisque la bille entre deux chocs n'est soumise qu'à son poids. On en déduit la loi horaire suivante :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v^i t + A \text{ pour } 0 \leq t \leq t_1 \quad (1)$$

On en déduit que le temps de montée est $t_{\text{montée}} = \frac{v^i}{g}$, le temps de vol est $t_{\text{vol}} = 2\frac{v^i}{g}$ et

l'altitude maximale atteinte est $z_{\text{max}}^1 = A + \frac{v^{i2}}{2g}$

5. Le vibreur étant supposé immobile, on a lors de chaque choc $v_n^i = -\mu v_n^f$. Ainsi, ayant $\mu = 0.25$, $|v_n^i| < |v_n^f|$ et en reprenant l'équation (1) valable entre les temps t_n et t_{n+1} en prenant $v^i = v_n^i$, on constate que $z_{\text{max}}^n = A + \frac{v^{i2}}{2g}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{\text{max}}^n = A$

Si au lieu de prendre l'altitude A comme altitude initiale on avait pris n'importe quelle altitude $z \geq A$, on aurait abouti au même résultat final car après le premier choc sur le plateau (donc en $z = A$) on est ramené au cas précédent.

Ainsi on en conclut que le point $(z = A, v = 0)$ de l'espace des phases est un point attracteur, et son bassin d'attraction est $\{(z, v) / z \geq A\}$

2 Régime périodique

2.1 Approche analytique

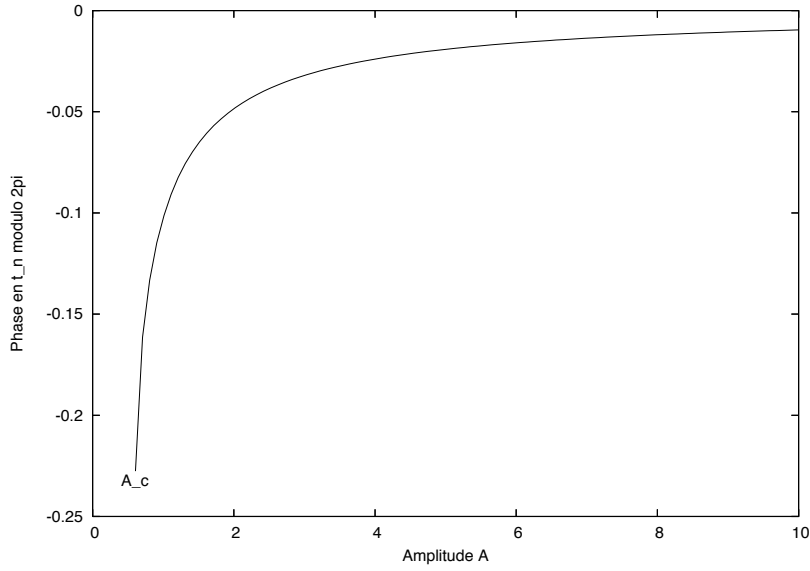
1. Soit A' l'altitude du plateau lors du choc. On veut que le mouvement soit de même période que le mouvement du vibreur donc il faut qu'au bout de T la bille se retrouve à l'altitude A' . Si $v_n^i \neq -v_n^f$, le temps de vol sera différent jusqu'au prochain choc, qui n'aura donc plus lieu en A' : le mouvement n'a plus la même période que le mouvement du vibreur.

Il faut donc bien que $v_n^i = -v_n^f$ pour que bille et vibreur aient un mouvement périodique de même période T . On a $v^i = \frac{gT}{2}$ (on reprend la question 4 de la partie 1, et le temps de vol est exactement la période du mouvement de la bille) d'où lors du choc on a $v^f = -v^i$ car $t_{\text{vol}} = \frac{2v^i}{g}$

2. ϕ_n représente la phase du mouvement lors du choc.
 3. On reprend l'égalité décrivant le choc, et on y injecte $v_n^i = -v_n^f$. On obtient $v_i^n(1 - \mu) = \dot{A}(t_n)(1 + \mu)$. Ayant $\dot{A}(t_n) = -\Omega A \sin \phi_n$, on obtient

$$A = -\frac{A_c}{\sin(\phi_n)}, A_c = \frac{gT^2}{4\pi} \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \quad (2)$$

4. Le point d'amplitude minimale est pour $|\sin(\phi_n)| = 1$ donc pour $A = A_c$. Voici le tracé de $\phi_n/(2\pi)$ en fonction de A :



5. On suppose que le mouvement de la bille est de période $T' = mT$. Le même raisonnement appliqué en 1 donne $v_n^i = -v_n^f$, afin que le mouvement garde toujours le même écart de période par rapport au mouvement du plateau. Par contre la vitesse initiale va changer : $v^i = \frac{gmT}{2}$. On a donc

$$A = -\frac{A_c^m}{\sin(\phi_n)}, A_c^m = \frac{mgT^2}{4\pi} \frac{1-\mu}{1+\mu} = mA_c^1 \quad (3)$$

6. ϕ_n est la phase associée au choc. Le mouvement étant périodique, il n'y a pas de pertes d'information entre ϕ_n et z_n
7. Une trajectoire périodique est représentée par une suite de points alignés, puisque $v_n^i = -v_n^f = +v_{n-1}^i$ et il y a autant de ϕ_n différents qu'il y a de rebonds à des endroits différents du vibreur, ce qui voudra dire que le nombre de points dans cette section de Poincaré donne le multiple m introduit ci-dessus.
8. On ne suppose plus le mouvement nécessairement périodique. Le principe fondamental de la dynamique nous donne pour la bille, avec $t \in [t_n; t_{n+1}]$: $v(t) = v_n^i - g(t - t_n)$. On a donc

$$t_n^d = t_{n+1} - t_n - \frac{v_n^i}{g} \quad (4)$$

On réécrit cela différemment, pour relier t_n^d et t_{n-1}^d . On sait que $v_n^f = v(t_n)$ avec v décrit avec condition initiale v_{n-1}^i sur $[t_{n-1}; t_n]$. En reprenant la même structure de formule pour

v on aboutit à $v(t_n) = -gt_d^{n-1}$. En exploitant la formule de la partie 1, on a donc

$$t_d^n = -\mu t_d^{n-1} + t_{n+1} - t_n - \frac{\dot{\mathcal{A}}(t_n)}{g}(1 + \mu) \quad (5)$$

2.2 Approche numérique

1. (t_n, v_n^i) vérifie

$$\begin{aligned} A \cos(\Omega t_n) &= A \cos(\Omega t_{n-1}) + v_{n-1}^i(t_n - t_{n-1}) - \frac{1}{2}g(t_n - t_{n-1})^2 \\ v_n^i &= -\Omega A(1 + \mu) \sin(\Omega t_n) - \mu v_{n-1}^i + \mu g(t_n - t_{n-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

Si l'on suppose que l'étape précédente nous a fournit (t_{n-1}, v_{n-1}^i) alors l'on a (t_n, v_n) en résolvant le système ci-dessus. Pour résoudre la première de ces équations, on va donc procéder par dichotomie. Voici le code du programme de dichotomie (en OCaml) :

```
let dichot f t_0 t_1 precision =
  let x = ref t_0 and y = ref t_1 in
  (* t_0 et t_1 sont les limites de l'intervalle *)
  let x_int = ref 0. in
  (* x_int variable du milieu de l'intervalle *)
  while ( absfloat (!x-. !y) > precision) do
    x_int := (!x+. !y)/. 2.;
    if ((f !x)*(f !x_int) > 0.) then x:=!x_int
    else
      y:=!x_int;
  done;
  !x;;

let pi = acos(-1.);;

let absfloat = fonction
  | x when x > 0. -> x
  | x -> -1. *. x;;

let f t t_1 v_1 a= a*. (cos(2. *. pi *. 30. *. t_1) -. cos(2. *. 30. *. t)) +.
v_1 *. (t -. t_1 ) -. 5. *. (t -. t_1 )**2. ;;
```

De manière pratique, pour trouver le temps t_1 dans le programme de dichotomie on fait d'abord une boucle while pour trouver un temps t tel que $f(t) < 0$ en partant de t_0 (car l'on sait que $f(t) > 0$ tout juste après t_0 puisque la bille monte).

2. On fait évoluer le temps à partir du t_n calculé, et on impose le redécollage quand

$$\frac{v_n^f - \dot{\mathcal{A}}(t)}{\dot{\mathcal{A}}(t)} > 0.1$$

(on se retrouve au dessus du seuil).

3. On rappelle que sur $[t_n : t_{n+1}[$ on a $z(t) = A \cos(\phi_n) + v_n^i(t - t_n) - \frac{1}{2}g(t - t_n)^2$. On est parti avec $v(0) = 2A\Omega$ et sur le plateau.

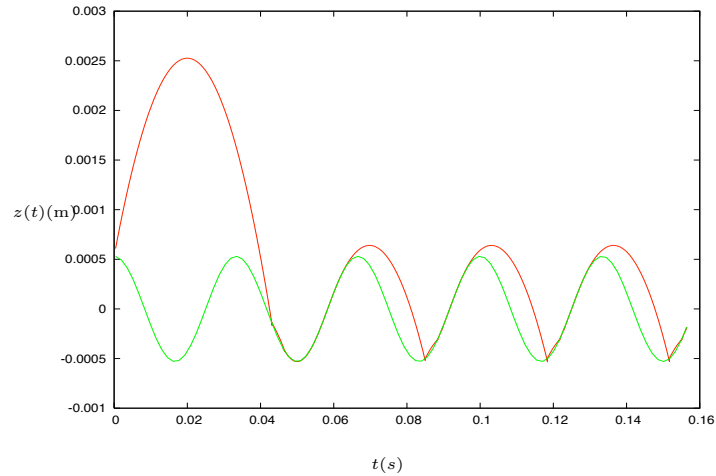


FIG. 2 – En rouge la trajectoire de la bille, en vert la trajectoire du plateau

On voit donc que le mouvement est périodique pour $A = 0.00053$, de même période que le plateau.

4. *Bonus*
5. En traçant le diagramme de bifurcation, je me rend compte que le programme a quelques difficultés à l'approche de la zone chaotique puisque le tracé n'y est pas dense :

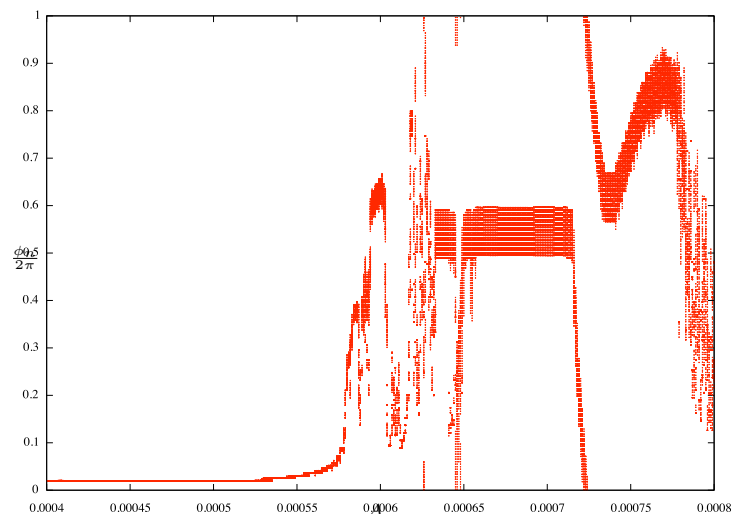


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation de la bille en fonction de A

A comparer avec le diagramme de bifurcation de l'application logistique, tracé sur le même

ordinateur :

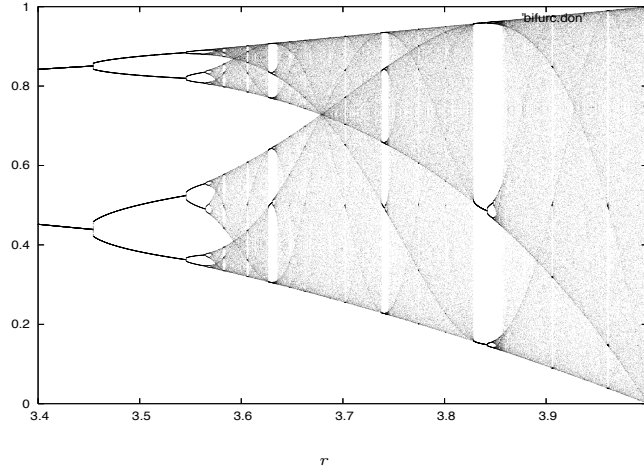


FIG. 4 – Diagramme de bifurcation de l'application logistique

6. En passant à la limite, puisque nous avons un scénario de transition vers le chaos par doublement de périodes, on trouve

$$\delta = \frac{A_{q+1} - A_q}{A_q - A_{q-1}} = 0,214169377\dots$$

Ce qui est l'inverse d'un des nombres de Feigenbaum, qui est un nombre universel qui intervient dans toute transition vers le chaos.

2.3 Etude de stabilité pour un mouvement de période T (*Optionnel*)

1. On développe autour de $(v_T^i = \frac{gT}{2}, \phi_T)$ dans le système d'équations (6) page 4. Après calculs on aboutit à

$$\delta v_{n+1}^i = -\mu \delta v_n^i - \frac{\mu g}{\Omega} \delta \phi_n + \frac{g}{\Omega} \delta \phi_{n+1} (\mu + \pi(1 - \mu) \tan^{-1} \phi_T)$$

$$\delta \phi_{n+1} = \delta \phi_n + \frac{\Omega}{g} (1 + \mu) \delta v_n^i$$

On a donc le système linéaire de monodromie suivant :

$$\begin{pmatrix} \delta \phi_{n+1} \\ \delta v_{n+1}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Omega}{g} (1 + \mu) \\ \frac{g}{\Omega} \pi (1 - \mu) \tan^{-1} \phi_T & \mu^2 + \pi (1 - \mu^2) \tan^{-1} \phi_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \phi_n \\ \delta v_n^i \end{pmatrix}$$

2. On a $\det M = \mu^2$. Les deux valeurs propres sont donc de même signe.
3. L'équation aux valeurs propres est

$$x^2 - x(1 + \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \tan^{-1} \phi_T) + \mu^2 = 0 \quad (7)$$

Si $\tan^{-1} \phi_T > 0$ on a automatiquement

$$1 + \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \tan^{-1} \phi_T + \sqrt{(1 + \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \tan^{-1} \phi_T)^2 - 4\mu^2} > 2$$

donc l'une des valeurs propres de M est supérieure à 1, ce qui correspond à une branche instable du diagramme de bifurcation (on rappelle que ϕ_T et A sont reliés par l'équation (2)).

4. On a

$$(-3 - \mu^2 - \pi(1 - \mu^2) \tan^{-1} \phi_T)^2 = (1 + \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \tan^{-1} \phi_T)^2 - 4\mu^2$$

Le développement de cette égalité nous donne comme condition suivante sur $\tan^{-1} \phi_T$ pour avoir une valeur propre égale à -1 :

$$\tan^{-1} \phi_T = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \mu^2} \quad (8)$$

Or lorsque cette valeur propre est atteinte, cela signifie que la trajectoire périodique de période 1 est déstabilisée au profit d'une trajectoire de période 2. Avec l'équation (2) et sachant que $1 + (\tan^{-1})^2 = 1/\sin^2$, on a

$$\frac{A_2}{A_c} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} \frac{1}{1 + \mu^2}} \quad (9)$$

On remarque que ce rapport ne dépend que de μ . Ici ayant $\mu = 0,25$ cela donne $A_2 = 1,4829A_c$

5.

3 Chaos et attracteur étrange

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. *Bonus*

Bilan Le rôle de μ est mis en évidence dans la question 2.3.4 : plus μ est important, plus rapide se fera la transition vers le chaos par doublement de période.