



Notes de cours de
Physique Non-Linéaire
Département de Physique
Ecole Normale Supérieure de Cachan

Julien Baglio
d'après le cours de Joseph Zyss

6 janvier 2007

julien.baglio@ens-cachan.fr - julien.baglio@ens.fr

Table des matières

1	Systèmes dynamiques non-linéaires à 1 dimension	2
1.1	Introduction	2
1.2	Analyse de stabilité	4
1.3	Modèle de population	6
1.3.1	Modèle de Maltus	6
1.3.2	Modèle de Quételet-Verhulst	6
1.3.3	Modèle de Lotka-Volterra	7
1.4	Bifurcation	7
1.4.1	Bifurcation selle-noeud	8
1.4.2	Bifurcation trans-critique	9
1.4.3	Bifurcation fourche supercritique	11
1.4.4	Bifurcation fourche sous-critique et hystérésis	14
2	Route vers le chaos dans les applications discrètes	17
3	Systèmes dynamiques non-linéaires à 2 dimensions	18
4	Système de Lorenz et attracteur étrange	19

Chapitre 1

Systèmes dynamiques non-linéaires à 1 dimension

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire les concepts utilisés lors de l'analyse de systèmes dynamiques fortement non-linéaires. On va donc se focaliser sur les représentations dans l'espace des phases et voir ce que l'on peut en tirer comme informations sur le système étudié. Cette approche géométrique vise à s'affranchir des calculs analytiques qui souvent ne sont pas réalisables pour des systèmes complexes. Cela permettra aussi de classifier les trajectoires en introduisant la notion de bifurcation.

Prenons l'exemple suivant : $\dot{x} = \sin x$ où x est une fonction unidimensionnelle continûment dérivable. Avant toute chose, le fait que $\dot{x} = f(x)$ avec f C^1 fait que l'on est assuré de l'existence d'une solution maximale sur un ouvert d'après le théorème de Cauchy-Lipshitz. Cela paraît ridicule de l'invoquer dans ce cas particulier, mais ce théorème rend de très grands services dans des cas plus complexes.

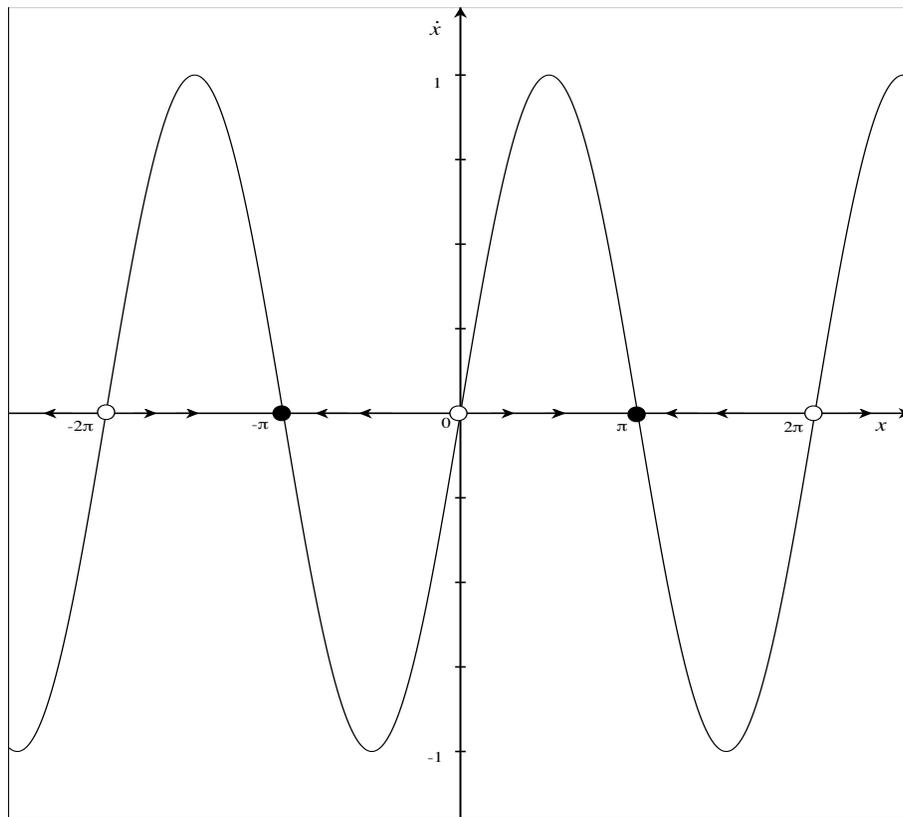
On peut intégrer analytiquement ce système, et un calcul fastidieux nous fournit

$$t = \ln \left| \frac{\operatorname{cosec} x_0 + \operatorname{cotan} x_0}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotan} x} \right|$$

où $\operatorname{cosec} = \frac{1}{\sin}$.

Définition 1 *L'espace des phases d'un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est l'ensemble ouvert D où évolue x .*

Dans notre exemple, l'espace des phases est l'axe des abscisses (O, x) . Pour étudier les trajectoires, on dessine f dans le plan (x, \dot{x}) :

FIG. 1.1 – Portrait de phase du système dynamique $\dot{x} = \sin x$

Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires tracées avec des conditions initiales différentes. Avec ce genre de tracé on peut répondre à des questions du type "quelle trajectoire pour telle condition initiale donnée?". Dans la représentation ci-dessus, le système dynamique représente alors un champ de vecteurs.

Pour chaque point x de la droite on peut connaître la valeur en amplitude et en sens de la vitesse. Les points noirs et blanc représentent les points d'équilibre.

Définition 2 *Un point d'équilibre d'un système dynamique $\dot{x} = f(x)$ est un point x^* tel que $f(x^*) = 0$*

Dit autrement, c'est un point stationnaire de la courbe (d'où le nom de point d'équilibre). Il reste à savoir si ce point d'équilibre est stable (ceux qui le sont sont ici représentés avec un rond noir) ou instable (représentés avec un rond blanc). Les flèches représentent l'orientation de la trajectoire. Ici les points d'équilibre sont les points $x = m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Pour m pair on a $f'(m\pi) > 0$ et pour m impair on a $f'(m\pi) < 0$. Les premiers sont des points d'équilibre instables (ou répulsifs, sources) et les seconds sont des points d'équilibre stables (ou attracteurs, puits). Sur le dessin cela se visualise très bien grâce à l'orientation des flèches.

Ainsi en conclusion de cette introduction, on peut se représenter les solutions d'un système dynamique unidimensionnel sous la forme d'un fluide unidimensionnel de vitesse locale $f(x)$.

Pour trouver une solution particulière avec condition initiale $x(0) = x_0$, on se place en x_0 sur l'axe de l'espace des phases et on observe la trajectoire (ou dit autrement orbite) dans le portrait de phase déterminé ci-dessus.

1.2 Analyse de stabilité

Pour étudier de façon analytique la stabilité des points d'équilibre, on utilise la régularité de la fonction f dans l'équation décrivant le système dynamique $\dot{x} = f(x)$. La méthode repose sur un développement limité autour des points d'équilibre $x = x^* + \delta x$.

Proposition 1 *Soit un système dynamique $\dot{x} = f(x)$, x^* un point d'équilibre.*

Si $f'(x^) < 0$, c'est un point d'équilibre linéairement stable ou encore appelé attracteur, et le retour à l'équilibre suite à une perturbation se fait en temps exponentiel; si $f'(x^*) > 0$ c'est un point d'équilibre linéairement instable.*

Démonstration

On développe autour de x^* : soit $x = x^* + \delta x$. $\dot{x} = \delta \dot{x} = f(x^* + \delta x) = f(x^*) + \delta x f'(x^*) + o(\delta x)$. En utilisant $f(x^*) = 0$ on a donc $\delta \dot{x} = \delta x f'(x^*)$ au premier ordre.

On a donc $\delta x = \delta x(0)e^{f'(x^*)t}$, d'où la conclusion sur la stabilité de x^* : si $f'(x^*) > 0$ on a $\delta x \rightarrow +\infty$, si $f'(x^*) < 0$ on a $\delta x \rightarrow 0$.

Cette proposition permet de comprendre l'analyse graphique développée dans l'introduction. Ainsi une particule qui part de $x = \frac{\pi}{4}$ accélère vers la droite jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ (où $\sin x$ est maximale) puis ralentit jusqu'à atteindre le point d'équilibre stable $x = \pi$ asymptotiquement par valeurs inférieures :

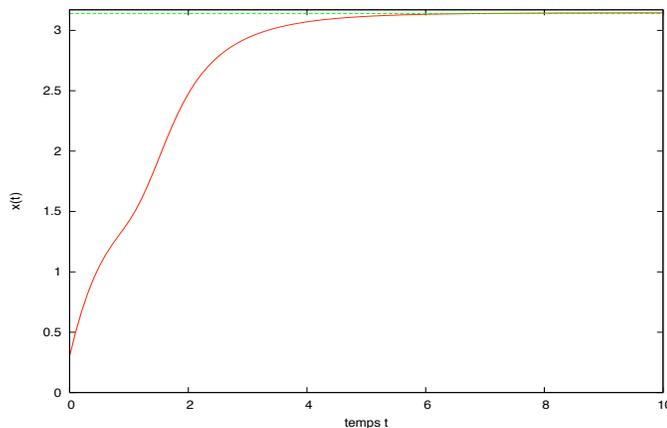


FIG. 1.2 – Évolution de la trajectoire d'origine $x_0 = \pi/4$

Si $f'(x^*) = 0$, on considère le deuxième ordre et $f''(x^*)$. De façon générale on considère le plus bas ordre non-nul pour analyser la stabilité générale d'un point d'équilibre (mais au-delà de l'ordre 1, on ne parle plus de stabilité linéaire, mais de simple stabilité). Au second ordre cela revient à s'intéresser à la courbure de f .

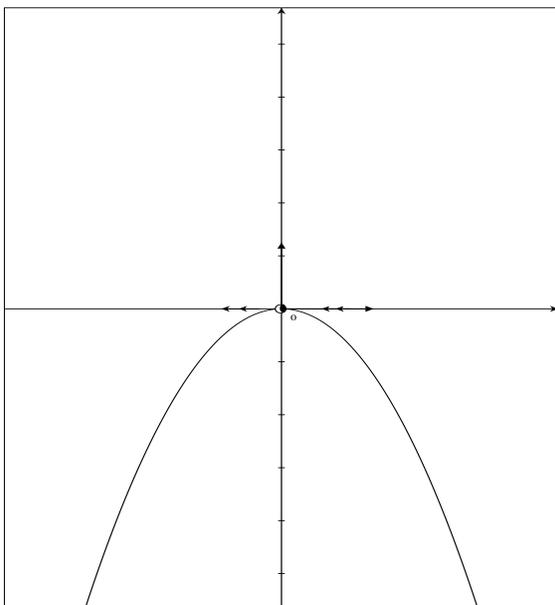


FIG. 1.3 – Équilibre semi-stable à droite

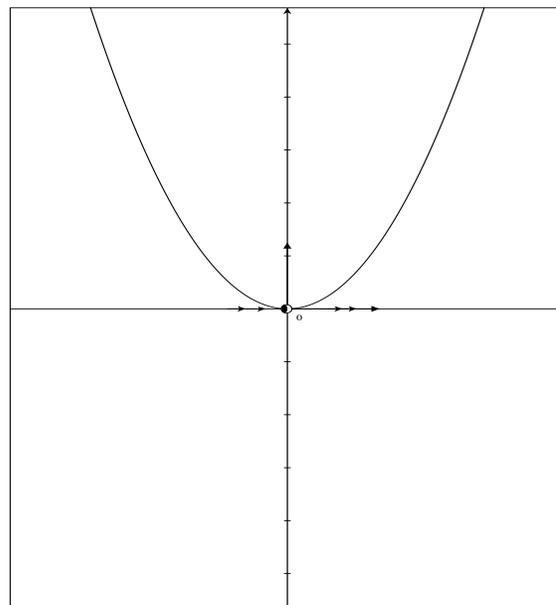


FIG. 1.4 – Équilibre semi-stable à gauche

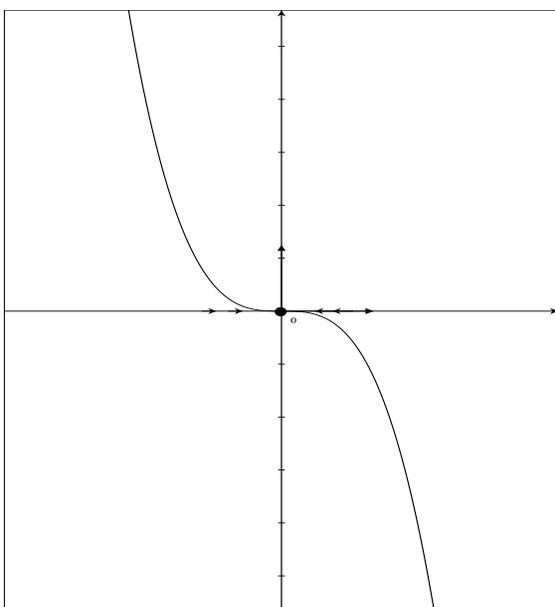


FIG. 1.5 – Équilibre stable

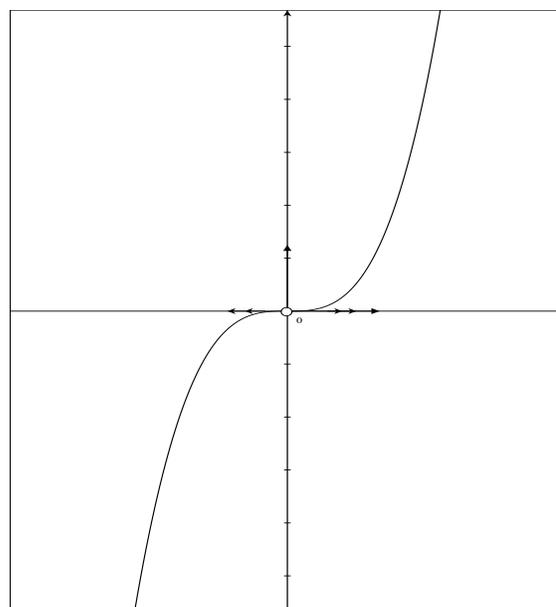


FIG. 1.6 – Équilibre instable

Les quatre courbes ci-dessus montrent les divers cas possibles lorsque l'on étudie l'ordre 2 et le début de l'ordre 3 : sur la figure 1.3, $f''(x^*) < 0$, sur la figure 1.4 on a $f''(x^*) > 0$, sur la figure 1.5 on a $f''(x^*) = 0$ et l'on cherche à l'ordre 3 où $f(x) \sim \frac{(x-x^*)^3}{3!} f'''(x^*)$, et l'on a $f'''(x^*) < 0$. Enfin sur la figure 1.6 on a $f'''(x^*) > 0$.

Enfin avant d'aborder les modèles de population, voici une petite propriété intéressante des systèmes unidimensionnels :

Proposition 2 *Un système régit par une équation différentielle à une dimension n'est jamais un système oscillant. Dit autrement, une trajectoire solution ne peut jamais changer de direction.*

La démonstration est triviale : f étant une fonction, elle envoie sur une unique vitesse. Ainsi un repliement de trajectoire est impossible, donc un système n'est jamais oscillant.

1.3 Modèles de population

Les modèles de population sont utilisés dans divers domaines : biologie, économie, sociologie, etc... On va ici sur quelques exemples simples appliquer quelques unes des idées présentées jusqu'ici.

1.3.1 Modèle de Malthus

Le premier modèle de croissance de population fut fourni par Thomas Robert MALTHUS en 1798, qui repose sur l'idée d'une croissance géométrique de la population, tandis que les ressources croissent plus lentement (d'où son idée de régulation de la population). Cela conduit à l'équation suivante :

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = \alpha N \quad (1.1)$$

Ce modèle fort simpliste nous donne $N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ ce qui n'est évidemment pas le cas en réalité, puisque les effets de surpopulation ne sont pas pris en compte. Si l'on se réfère à n'importe quel graphe de population d'un pays (par exemple les États-Unis, cf TD1), ce modèle n'est pas réaliste.

1.3.2 Modèle de Quételet-Verhulst

Au XIX^{ème} siècle les mathématiciens belges Quételet et Verhulst ont modifié le modèle de Malthus pour tenir compte des effets d'auto-régulation. Le choix le plus simple passe par une décroissance linéaire du facteur d'expansion de la population :

$\alpha = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$. On aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{N} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N \quad (1.2)$$

On peut résoudre analytiquement cette équation différentielle non-linéaire par séparation des variables, mais l'on va plutôt adopter notre approche géométrique.

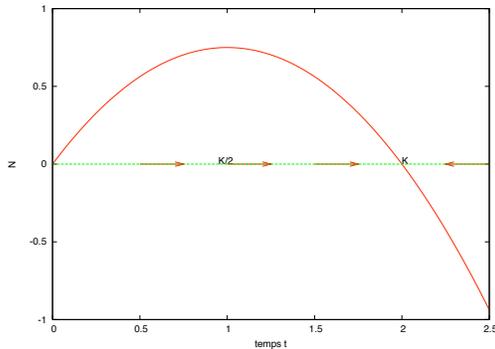


FIG. 1.7 – Portrait de phase

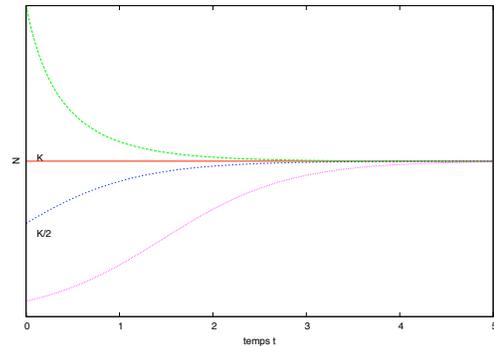


FIG. 1.8 – Évolution de quelques trajectoires

On voit clairement que la population tend toujours, quel que soit le point initial, vers K , qui est dit capacité porteuse ("carrying capacity" en anglais). Il y a un changement éventuel de concavité à $K/2$, si la population initiale est inférieure à $K/2$. Pour plus de détails, se référer aux ouvrages classiques de biologie mathématique, par exemple (3).

On se rend compte encore une fois que ce modèle n'est pas encore réaliste, puisque une analyse d'une courbe de population réelle ne montre pas d'effet de seuil.

1.3.3 Modèle de Lotka-Volterra

Ce modèle est développé en 1926 par Lotka et Volterra, afin d'expliquer les oscillations de la population de poisson dans l'Adriatique. C'est un modèle communément appelé modèle proie-prédateur. Il repose sur les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= aN - bPN \\ \dot{P} &= -dP + cNP \end{aligned} \tag{1.3}$$

C'est un système à quatre paramètres a, b, c, d et à trois variables N, P, t où N et P désignent les populations de proies et de prédateurs. Le TD1 aborde le détails de l'étude de ce modèle (avec notamment l'analyse de l'équilibre oscillatoire).

1.4 Bifurcation

On introduit ici la notion de bifurcation qui permet de visualiser les non-linéarités et de classifier les trajectoires.

Définition 3 Soit un système non-linéaire à paramètre de contrôle c . Une bifurcation est un changement de comportement du système lorsque l'on modifie c . Le diagramme de bifurcation est le tracé de x^* point d'équilibre stable en fonction de c .

D'une manière générale, pour étudier une bifurcation d'un système $\dot{x} = f(x)$ on utilise la théorie de Landau, qui consiste à développer f au voisinage du point d'équilibre étudié. Dans la suite, on utilisera donc des polynômes pour f sans pour autant perdre en généralité. On étudiera ici uniquement des bifurcations stationnaires. Il faut attendre d'avoir au moins un système bidimensionnel pour avoir des bifurcations instationnaires (cf bifurcation de Hopf).

1.4.1 Bifurcation selle-noeud

La bifurcation selle-noeud, encore appelée "blue-sky apparition", est le cas typique d'un système $\dot{x} = r + x^2$ où r est le paramètre de contrôle.

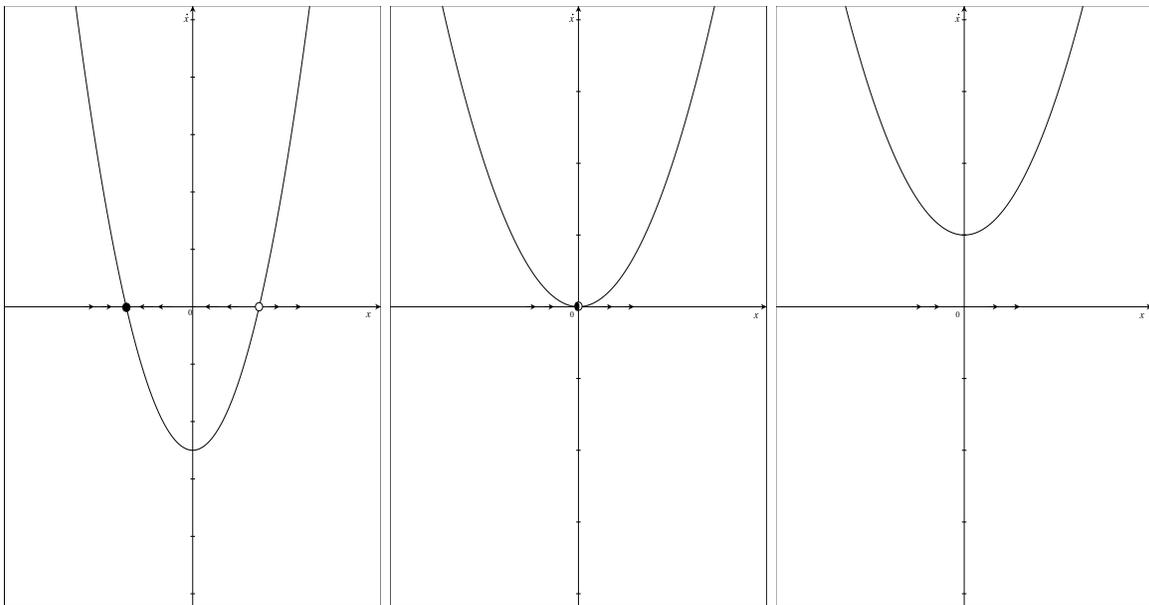


FIG. 1.9 – $r < 0$

FIG. 1.10 – $r = 0$

FIG. 1.11 – $r > 0$

On voit bien la bifurcation apparaître lors du passage en $r = 0$ entre le comportement en $r < 0$ et le comportement en $r > 0$. On passe d'une situation où existent deux points d'équilibre, l'un stable et l'autre instable, à une situation où il n'y a plus de points d'équilibre au sein du système. C'est l'origine du terme "blue-sky apparition" (Abraham&Show, 1988) : soudainement apparaît deux points fixes en passant de $r > 0$ à $r < 0$ (comme le ciel bleu peut apparaître soudainement après un temps instable!).

Pour $r < 0$, le point $x = -\sqrt{-r}$ est stable, le point $x = \sqrt{-r}$ est instable.

Lorsque l'on est près de la bifurcation, il y a le phénomène de goulot d'étranglement qui apparaît, dû à ce que l'on pourrait appeler un fantôme du point fixe instable. On se place dans une situation type selle-noeud, en développant au 2e ordre autour du minimum.

Proposition 3 Lors d'une bifurcation selle-noeud $\dot{x} = x^2 + r$ avec $r \ll 1$, on a

$$T_{\text{plateau}} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{\pi}{r}$$

Ce résultat est très général pour ce type de bifurcation.

Enfin voici le diagramme de bifurcation typique pour une bifurcation selle-noeud :

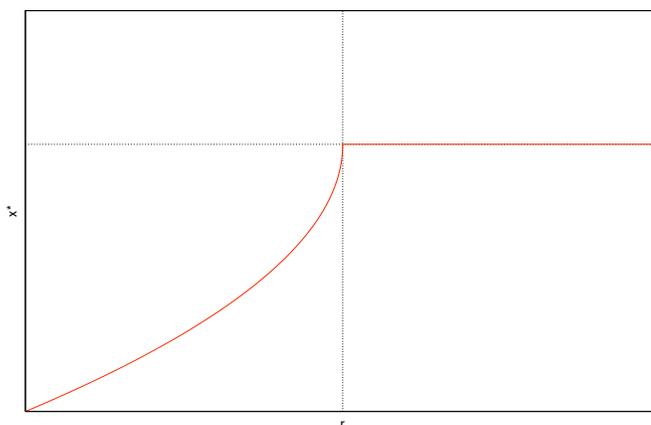


FIG. 1.12 – Diagramme de bifurcation selle-noeud

1.4.2 Bifurcation trans-critique

Une bifurcation trans-critique concerne les systèmes $\dot{x} = rx - x^2$.

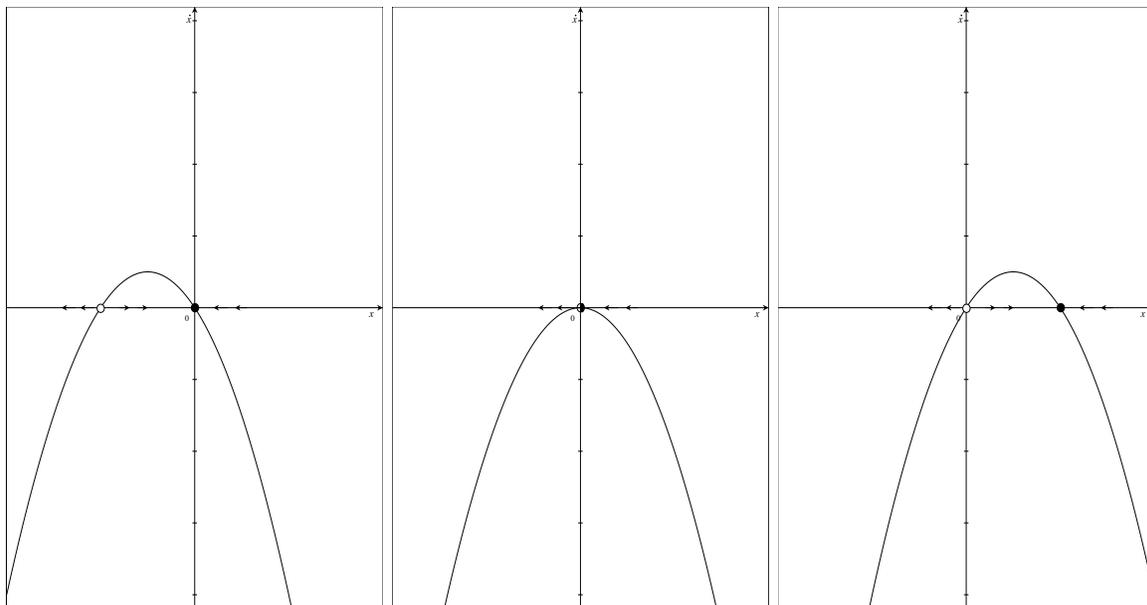


FIG. 1.13 – $r < 0$

FIG. 1.14 – $r = 0$

FIG. 1.15 – $r > 0$

Il y a échange de stabilité dans un tel cas, entre l'origine et le second point d'équilibre. lors de la bifurcation dite transcritique à $r = 0$.

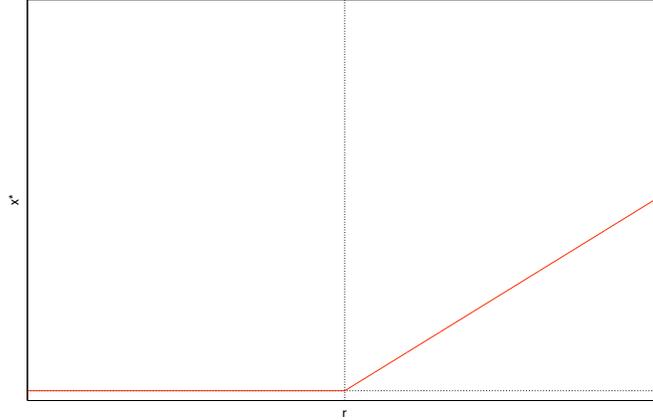


FIG. 1.16 – Diagramme de bifurcation trans-critique, effet seuil

Les systèmes à seuil sont l'exemple typique d'une bifurcation trans-critique, tels que le laser ou la diode.

Modèle de laser comme exemple de bifurcation trans-critique

Un laser est un milieu amplificateur de la lumière, par inversion de population sur des états du milieu amplificateur (très grossièrement). On note N l'inversion de population entre les niveaux d'émission stimulée et d'absorption, n le nombre de photons dans la cavité laser, et G le gain. Les équations cinétiques d'évolution du laser sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{n} &= GNn - kn \\ \dot{N} &= -GNn + p - fN \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ici k donne les pertes, p est la pompe et f est le taux d'émission spontanée. Dans l'approximation quasi-statique et par élimination adiabatique, ce qui revient à dire que $\dot{N} = 0$, on aboutit à l'équation unidimensionnelle

$$\dot{n} = \frac{Gnp}{Gn + p} - kn$$

On trouve aisément $n^* = 0$ ou $n^* = \frac{Gp - kf}{Gk}$. La bifurcation est bien trans-critique, comme le développement au voisinage de $n^* = 0$ le montre :

$\dot{n} = n \left(\frac{Gp}{f} - k \right) - \frac{G^2 p}{f^2} n^2$. Ainsi il y a bien un seuil : l'effet laser démarre pour un pompage $p > \frac{kf}{G}$.

On rappelle que le modèle exact est le modèle de Maxwell-Bloch, décrit par (E champ électrique, P polarisation électrique et D inversion de population) :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \kappa(P - E) \\ \dot{P} &= \gamma_1(ED - P) \\ \dot{D} &= \gamma_2(\lambda + 1 - D - \lambda EP) \end{aligned} \tag{1.5}$$

C'est un système non-linéaire proche de celui de Lorenz (cf chapitre 4).

1.4.3 Bifurcation fourche supercritique

On étudie ici la bifurcation des systèmes $\dot{x} = rx - x^3$ ("pitchfork bifurcation"). Les points d'équilibre sont $x^* = 0$ et $x^* = \pm\sqrt{r}$ (les deux derniers n'existent que pour $r > 0$).

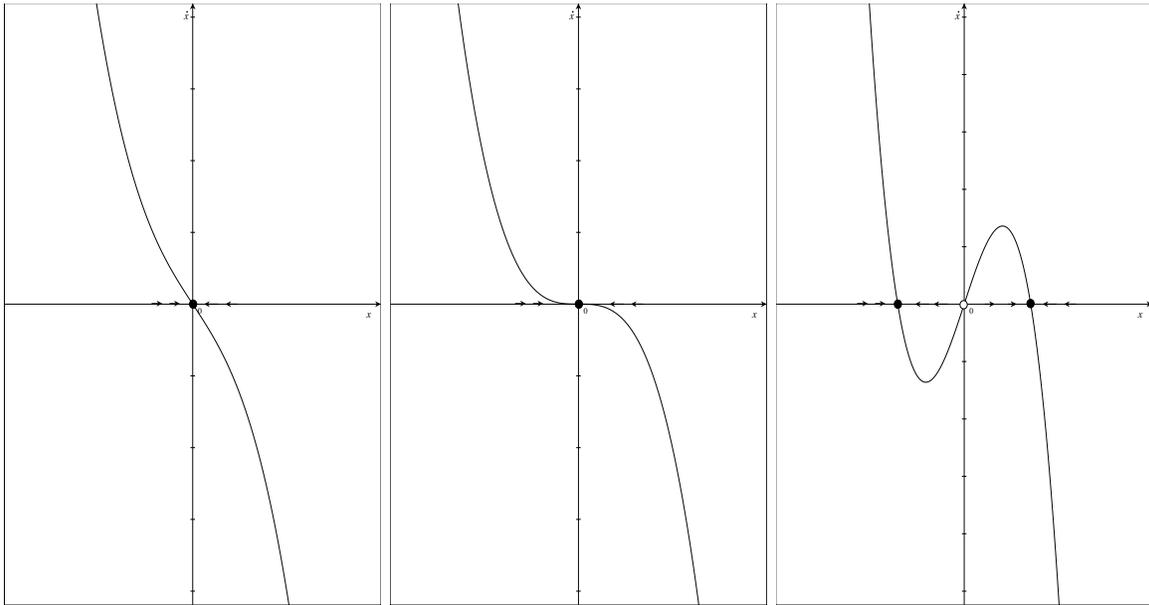


FIG. 1.17 - $r < 0$

FIG. 1.18 - $r = 0$

FIG. 1.19 - $r > 0$

Voici le diagramme de bifurcation :

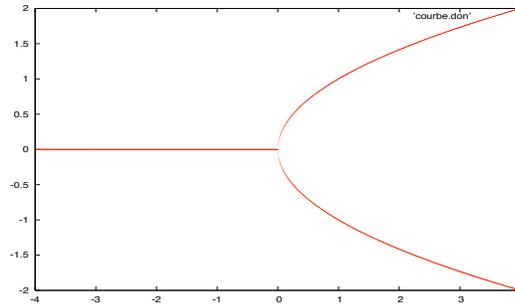


FIG. 1.20 – Diagramme de bifurcation fourche supercritique, brisure de symétrie

Il y a brisure spontanée de symétrie puisque le système, a priori, a le choix lors de la transition (en fourche, d'où le nom...) et qu'il choisit l'une des deux voies (il suffit d'une petite perturbation dans un sens ou dans l'autre en fait).

Exemple physique : bille dans un anneau avec frottements

On étudie une bille dans un cerceau qui tourne à vitesse ω constante. La bille subit des frottements (terme modélisé par un coefficient b) et l'attraction de son poids.

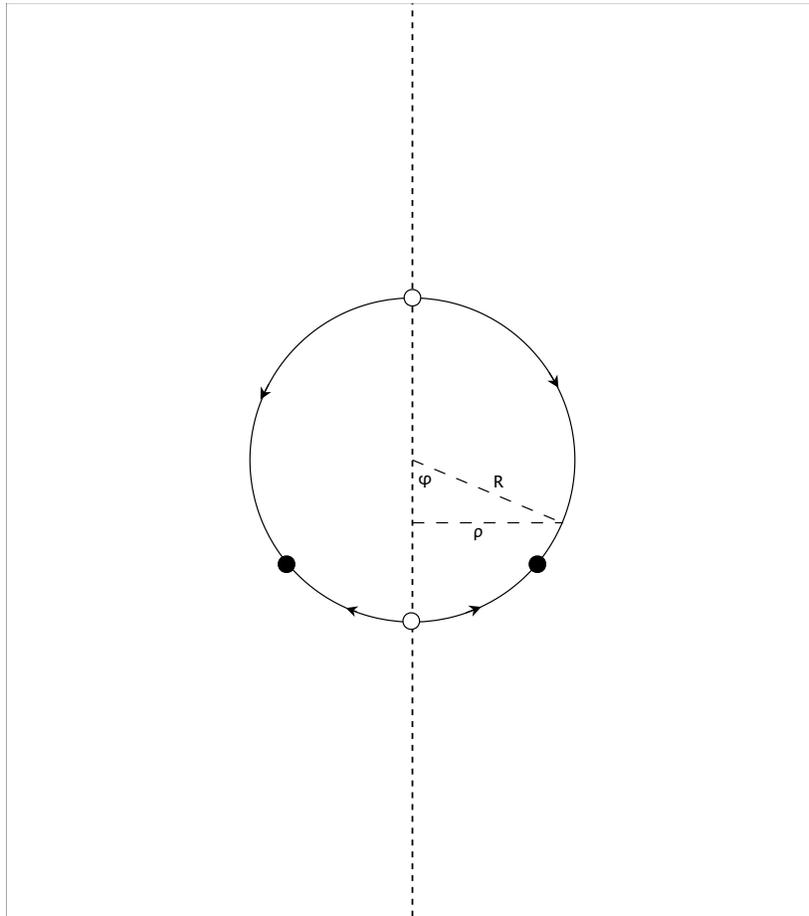


FIG. 1.21 – Schéma d'étude avec les points d'équilibre lorsque $\gamma = \frac{R\omega^2}{g} > 1$

Tangentiellement on a $mR\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg \sin \phi + mR\omega^2 \sin \phi \cos \phi$. On suppose dans un premier temps que l'on néglige le second ordre différentiel. On pose alors $\gamma = \frac{\omega^2 R}{g}$ qui est le paramètre de contrôle, et l'on a

$$b\dot{\phi} = mg \sin \phi (\gamma \cos \phi - 1) \quad (1.6)$$

Il y a équilibre si $\sin \phi = 0$ c'est-à-dire $\phi^* = 0, \pi$ ou $\cos \phi = \gamma^{-1}$ qui n'existe que si $\gamma \geq 1$. Une étude de stabilité simple à conduire écarte le cas $\phi^* = \pi$ en permanence et le cas $\phi^* = 0$ pour $\gamma \geq 1$, nous donnant le diagramme de bifurcation suivant :

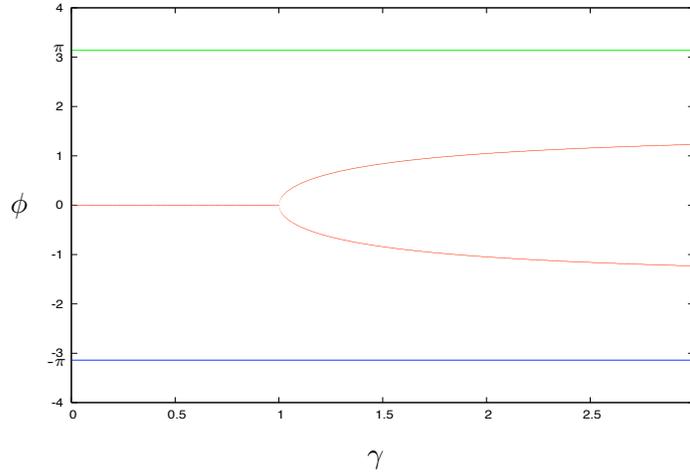


FIG. 1.22 – Diagramme de bifurcation du cerceau

On a aussi représenté ici les droites $\phi = \pm\pi$, qui ne sont pas des droites faisant partie de la bifurcation. C'est bien une bifurcation fourche supercritique.

Revenons sur l'hypothèse qui nous a permis finalement de réduire un système bidimensionnel à un système unidimensionnel. On introduit un changement de variable $\tau = \frac{t}{T}$, avec T temps caractéristique du système, ici le temps d'amortissement. On aboutit alors à

$$\frac{R}{gT^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{mgT} \frac{d\phi}{d\tau} + \sin\phi(\gamma \cos\phi - 1)$$

Le temps d'amortissement est $T = \frac{b}{mg}$. Ainsi pour négliger le second ordre, il faut que $\frac{R}{gT^2} \ll 1$ c'est-à-dire $b^2 \gg m^2gR$: fort amortissement.

On est ainsi ramené à l'étude que l'on a faite ci-dessus, en variable réduites cela donne $\frac{d\phi}{d\tau} = f(\phi) = \sin\phi(\gamma \cos\phi - 1)$.

Néanmoins d'un point de vue physique, il existe un problème important derrière cette approximation : en effet un système du premier ordre (unidimensionnel) est défini complètement par la donnée de $\phi(0)$. Or ici il est nécessaire en réalité de spécifier en plus $\dot{\phi}(0)$ pour définir l'évolution ultérieure du système. Afin de réconcilier ces deux points de vue et insérer l'approximation unidimensionnelle dans un schéma plus large, on utilise un plan de phase (on anticipe un peu ici sur le chapitre 3), d'axes ϕ et $\phi' = \frac{d\phi}{d\tau}$. Tout point du plan de phase correspond à un état précis du système. Ainsi on est amené à faire une étude bidimensionnelle en (ϕ, Ω) :

$$\begin{aligned} \phi' &= \Omega \\ \Omega' &= \frac{1}{\epsilon}(f(\phi) - \Omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\epsilon = \frac{mRg}{b^2}$. Avec $\vec{X} = (\phi, \Omega)$ on a donc $\vec{X}' = \vec{F}(\vec{X})$ avec \vec{F} fonction vectorielle non-linéaire. Le portrait de phase est délicat à tracer de façon générale (cf chapitre 3) mais ici on s'en fait une idée qualitative pour $\epsilon \rightarrow 0$ dans notre approximation.

Choisissons une position initiale du plan de phase telle que $f(\phi_0) > \Omega_0$ (en dessous de la courbe $f(\phi) = \Omega$ et à une distance finie de cette courbe).

$\Omega' = \frac{1}{\epsilon}(f(\phi) - \Omega)$ est alors très supérieur à zéro, et la trajectoire est verticale dans le plan de phase, à grande vitesse positive. Lorsque elle atteint le voisinage de la courbe $f(\phi) - \Omega = 0 \simeq \epsilon$, la trajectoire est fortement ralentie et "aspirée" par cette courbe. On est donc canalisé dans la dynamique du premier ordre décrite précédemment, ce qui justifie l'analyse conduite.

En définitive, l'analyse unidimensionnelle conduit à négliger le transitoire rapide en ne considérant que la constante de temps T caractéristique de l'unidimensionnalité.

1.4.4 Bifurcation fourche sous-critique et hystérésis

La bifurcation sous-critique en fourche ("pitchfork subcritical") concerne les systèmes du type $\dot{x} = rx + x^3$ (la fonction f est ici impaire). En fait, si l'on trace le diagramme de bifurcation, il n'y a plus les racines non-nulles que l'on avait dans la bifurcation fourche supercritique. Ainsi pour $r > 0$ il n'y a plus d'attracteurs, comme le montre les trois diagrammes ci-dessous :

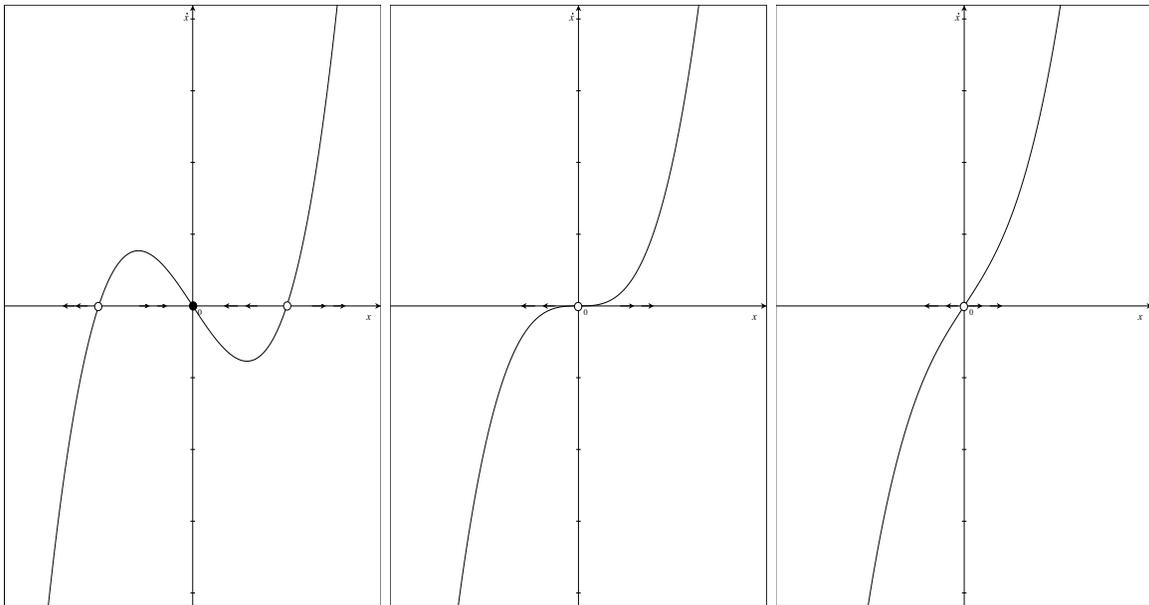


FIG. 1.23 – $r < 0$

FIG. 1.24 – $r = 0$

FIG. 1.25 – $r > 0$

Pour stabiliser le système, il est nécessaire de pousser le développement. Le système à fourche sous-critique est donc en fait $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$. C'est l'étude de ce système qui va être source d'hystérésis.

On étudie tout d'abord les points d'équilibre du système. On doit résoudre $\dot{x} = 0 = x(r + x^2 - x^4)$. C'est une équation bicarrée, on pose comme d'habitude $X = x^2$ et l'on résoud $X^2 - X - r = 0$.

On a $\Delta = 1 + 4r$. On a donc deux situations, selon que $r < -\frac{1}{4}$ ou $r \geq -\frac{1}{4}$, ce qui nous donne déjà un premier point de bifurcation. Ensuite pour $r \geq -\frac{1}{4}$ on en revient à x^* , avec $x^{*2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4r}$.

Selon le positionnement de r , il va donc y avoir 2 ou 4 solutions pour cette équation. On a

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4r} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 1 + 4r \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq r \leq 0$$

On fait maintenant l'étude de la stabilité dans chacune des zones, en remarquant d'avance que $f'(x) = r + 3x^2 - 5x^4 = (r + x^2 - x^4) + 2x^2(1 - 2x^2)$ et en utilisant la proposition 1 page 4.

1. Étude de $x^* = 0$: $f'(x^*) = r$ donc $x^* = 0$ est stable pour $r \leq 0$.

2. Région $-\frac{1}{4} \leq r \leq 0$: les quatre points d'équilibre non-nuls existent. On a $x^{*2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4r}$.

Dérivons : $f'(x^*) = \mp 2 \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4r} \right) \sqrt{1 + 4r}$. On a donc immédiatement

$x^* = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4r}}$ stables, les deux autres points d'équilibres sont instables.

3. Région $r \geq 0$: l'analyse est identique au cas précédent, et les deux seuls points d'équilibre restants sont ceux qui étaient déjà stables dans le cas 2.

On a donc le diagramme de bifurcation suivant :

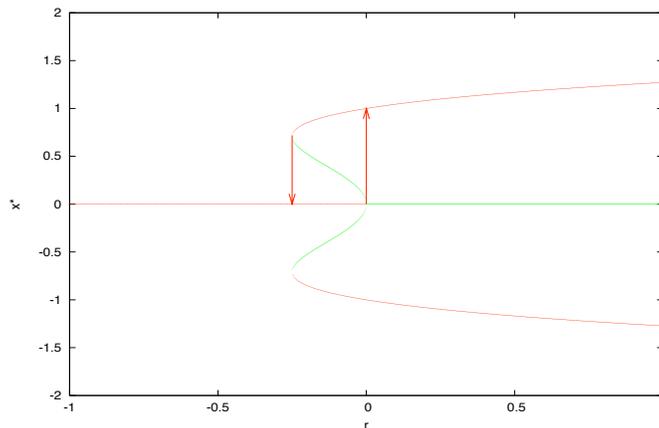


FIG. 1.26 – Diagramme de bifurcation fourche sous-critique, hystérésis

En rouge nous avons les équilibres stables, et nous avons représentés en vert les équilibres instables. On voit très clairement le phénomène d'hystérésis, représenté sur la figure 1.24 dans

une de ses réalisations (la seconde étant de partir sur des $x^* < 0$). Si l'on part de $r \rightarrow -\infty$ et que l'on augmente r , il y a transition de $x^* = 0$ à $x^* \neq 0$ à $r = 0$. Si l'on parcourt ensuite de $r \rightarrow +\infty$ en décroissance, le seuil de transition $x^* \neq 0 \rightarrow x^* = 0$ se fait à un second seuil $r = -\frac{1}{4}$.

Chapitre 2

Route vers le chaos dans les applications discrètes

Chapitre 3

Systemes dynamiques non-lineaires à 2 dimensions

Chapitre 4

Systeme de Lorenz et attracteur étrange

Références et conseils de lecture

- [1] Vladimir Arnold, *Ergodic problems of classical mechanics*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, 1988.
- [2] Vincent Croquette, *Chaos*, cours de DEA, Ecole Normale Supérieure, 2000.
URL : <http://www.lps.ens.fr/vincent/>
- [3] J. Murray, *Mathematical biology*, Springer, 1989.
- [4] Edward Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, 1993.
- [5] Steven Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos : With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books, Cambridge MA, 1994.