Le rayonnement du corps noir

Cours de M1, physique statistique quantique

Julien Baglio
julien.baglio@ens.fr

23 octobre 2006

Résumé

Cet exposé est extrait du cours de physique statistique de Jacques Treiner, dans le cadre du M1 de physique de l'ENS Cachan. Il s'agit d'une courte présentation de la notion de corps noir, qui contient notamment l'exposé de la loi dite de Planck, de la loi de Stefan et de la loi de Wien. Pour compléter cette approche sommaire, se référer à un cours sur le rayonnement thermique (notamment pour la notion de corps gris, d'émissivité, etc...)

1 Thermodynamique du corps noir

1.1 Distribution de Bose-Einstein

Soit un système de N bosons indépendants à une température T donnée. La distribution de Bose-Einstein est la probabilité d'occupation par un boson individuel du niveau quantique individuel d'énergie E à une température T donnée, ou encore le nombre moyen d'occupation de ce niveau :

$$f(E_k, T) = < n_k > = \frac{1}{\exp(\beta(E_k - \mu)) - 1} \tag{1}$$

avec $\beta = \dfrac{1}{kT}$, μ potentiel chimique du système. Ainsi si l'on se place dans la limite continue, $f(E,T)\rho(E)dE$ est le nombre de bosons dans l'état d'énergie E à dE près, $\rho(E)$ étant la densité de niveau $\rho(E) = \dfrac{dn}{dE}$.

Pour trouver cette distribution, on se place dans le grand canonique pour le système total des N bosons, en se rappelant qu'un système de N bosons est décrit par une fonction d'onde symétrique, ce qui signifie notamment que les niveaux individuels peuvent être occupés par un nombre arbitraire de bosons (dans la limite bien sûr du nombre total de bosons dans le système).

1.2 Calcul de la densité d'énergie d'un corps noir

On va d'abord donner une définition du corps noir.

Définition 1 *Un corps noir est un système qui absorbe tout le rayonnement électromagnétique qu'il reçoit, sans rien réfléchir, et sans perturber son état d'équilibre interne.*

On comprend bien maintenant l'appelation de "corps noir" : en effet s'il ne réfléchit pas la lumière, il apparaît noir lorsque il n'émet pas. Pour étudier par la suite son spectre d'émission, on étudie une boîte dans laquelle on pratiquera un trou. On quantifie le rayonnement par l'intermédiaire des photons, d'énergie individuelle $E = \hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, et on étudiera le rayonnement émis en étudiant le profil de fuite des photons par le trou.

On se place donc dans une boîte quantique de volume V fixé, à température T fixée. Le nombre de photons est une variable interne du système, que l'on suppose à l'équilibre. On a donc dans ces conditions $\frac{dF}{dN} = \mu = 0$. Les photons étant des bosons (de spin 1), on utilise la statistique de Bose-Einstein.

On sait que l'énergie à une particule est quantifiée selon $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ où k est la norme du vecteur d'onde dans l'espace des phases (on rappelle que $k_x = \frac{2\pi l}{a}$, $l \in \mathbb{N}^*$ et de même suivant y et z, $V = abc$). On a donc $\rho(E_k)dE_k = \frac{V}{(2\pi)^3} g 4\pi k^2 dk$ (volume dans l'espace des phases divisé par le volume élémentaire), $g = 2$ qui rend compte de la polarisation d'un photon (hélicité gauche ou hélicité droite). L'énergie individuelle est donnée par $\hbar ck$ puisque $\omega = kc$, donc on a

$$E = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi\hbar ck^3 dk}{\exp(\beta\hbar ck) - 1}$$

On effectue le changement de variables $x = \beta\hbar ck$, ce qui nous donne

$$E = \frac{V}{(\pi)^2} \frac{\hbar c}{(\beta\hbar c)^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

En effectuant un développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1 - e^{-x}}$ et en utilisant les théorèmes d'intégration de Lebesgue, on obtient sans difficulté $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$. On a donc

$$E = V \frac{\pi^2}{15} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \tag{2}$$

Pour l'énergie d'un corps noir de volume V, à la température T.

1.3 Equation d'état

Pour établir l'équation d'état du gaz de photons qui constitue l'intérieur du corps noir, on suppose que les chocs des photons sur les parois internes sont élastiques. L'impulsion d'un photon est $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

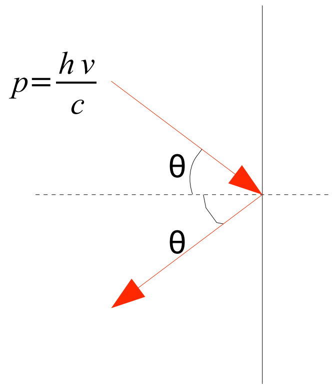

Fig. 1 – Collision élastique d'un photon sur une des parois du système

Par symétrie du problème, la direction perpendiculaire à la paroi est privilégiée, donc on projette sur cette dernière. Du fait de l'élasticité de la collision l'énergie est conservée, et il en est de même pour l'impulsion.

Ainsi, on a au final $\delta p = \frac{2h\nu}{c}\cos\theta$ pour un photon d'incidence θ. On intègre sur l'incidence, et on compte le nombre de photons frappant dS pendant Δt pour obtenir la variation d'impulsion totale frappant dS pendant Δt :

$$\Delta p = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2h\nu\cos\theta}{c}\frac{N}{V}c\Delta t\cos\theta dS\sin\theta d\theta$$

Le coefficient 1/2 est nécessaire afin d'éviter de compter en double les photons.

On en déduit que $\mathbf{dF}_{\text{gaz}\to\text{paroi}} = -\frac{\Delta p}{\Delta t}\mathbf{n} = -\frac{1}{3}\frac{Nh\nu}{V}dS\mathbf{n}$ (normale dirigée vers la gauche sur le dessin, selon la convention habituelle). Ainsi, on en déduit $P = \frac{E}{3V}$. On a donc, après utilisation du résultat (2), l'équation d'état suivante pour le gaz de photons du corps noir :

$$P = \frac{k_B^4\pi^2}{45(\hbar c)^3}T^4 \tag{3}$$

On constate donc que la pression du corps noir ne dépend que de la température.

2 Rayonnement du corps noir

Pour établir le profil de rayonnement du corps noir, on pratique, comme dit plus haut, un petit trou de surface dS qui ne perturbe pas l'état déquilibre du système.

2.1 Loi de Planck

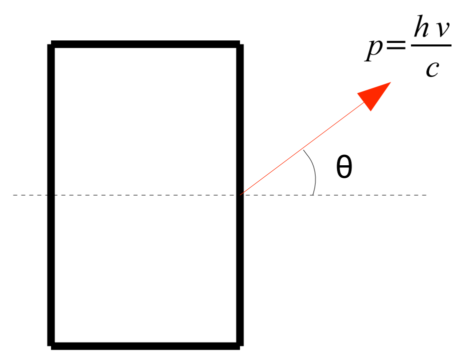

FIG. 2 – Fuite d'un photon par le petit trou pratiqué dans le corps noir

On va calculer le flux spectral du corps noir. Le rayonnement est identique par rotation d'angle ϕ autour de la normale au trou, et l'on a comme énergie perdue par unité de fréquence pendant dt selon θ : $dE = \hbar c k(\nu)(\cos\theta c dt dS)\frac{dN(\nu)}{V}$. On en déduit que le flux élémentaire par unité de fréquence selon θ est $d^2\Phi = \hbar c^2 k(\nu)\cos\theta\frac{dN(\nu)}{V}$.

Or selon la section 1, on a en utilisant la distribution de Bose-Einstein :

$$dN(\nu) = \frac{2V}{(2\pi)^3}\frac{k^2(\nu)}{\exp(\beta\hbar ck)-1}\sin\theta d\theta dk d\phi$$

Pour calculer le flux spectral, on intègre alors sur θ et ϕ, et on écrit $k = \frac{2\pi\nu}{c}$. L'intégration se fait sur $\theta \in [0;\pi/2]$ puisque le rayonnement est selon un demi-plan, et l'on obtient au final :

$$d\Phi = \frac{2\hbar c^2}{(2\pi)^3}\frac{(2\pi)^3\nu^3}{c^3}\frac{2\pi d\nu}{c}\frac{2\pi}{2(\exp(\beta\hbar 2\pi\nu)-1)}$$

On en déduit la loi de Planck :

Théorème 1 (Loi de Planck) *L'émittence monochromatique du corps noir ne dépend que de la température de ce corps, et sa loi est donnée par (avec $\beta = k_B T$)*

$$\frac{d\Phi}{d\nu} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2(\exp(\beta h\nu)-1)} \tag{4}$$

2.2 Loi de Stefan

On peut maintenant déterminer sans aucune difficulté la loi de Stefan, qui relie le flux total émis par le corps noir et sa température. Pour le calculer, on peut soit le faire à partir de la loi de Planck, en intégrant sur toutes les fréquences possibles, soit reprendre le calcul en k et l'on constate alors que l'on a en fait $\Phi_{tot} = \frac{c}{4}\frac{E}{V}$ en comparant au calcul fait dans la première section. On utilise alors le résultat (2), et l'on obtient :

Théorème 2 (Loi de Stefan) *Le flux total rayonné par un corps noir ne dépend que de sa température, selon la loi*

$$\Phi_{tot} = \sigma T^4 \tag{5}$$

avec $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} = 5,67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$ *constante de Stefan-Boltzmann*

2.3 Loi de Wien

On termine ce petit exposé par la loi de Wien, qui relie le maximum d'émission en longueur d'onde avec la température du corps noir. En effet, ces deux grandeurs sont inversement proportionnelles, comme nous allons le voir. On utilise la loi de Planck (4), que l'on exprime en terme de longueur d'onde. On a $\lambda\nu = c$ donc $d\nu = \frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ (le signe n'a aucune importance, si ce n'est de changer les bornes d'intégration) ; on peut réécrire la loi de Planck en terme de λ, ce qui donne

$$M_\lambda = \frac{d\Phi}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T}) - 1)} \tag{6}$$

On recherche le maximum de M_λ, on dérive donc par rapport à λ, et l'on obtient sans problème

Théorème 3 (Loi de Wien) *La longueur d'onde d'émission maximale du corps noir pour une température T donnée vérifie*

$$\lambda_m T = 2898.10^{-6}\ W.m \tag{7}$$

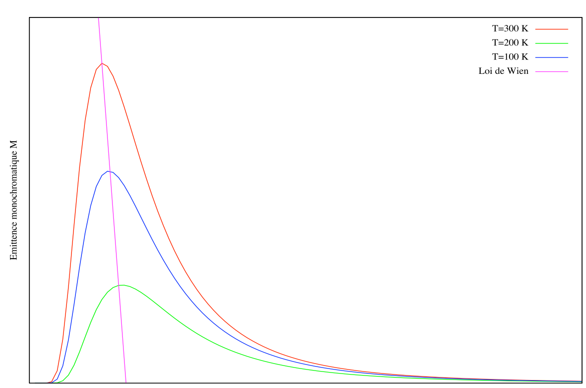

Fig. 3 – Loi de Planck du corps noir et droite décrivant la loi de Wien