Oraux de mathématiques filière MP

Concours X, Centrale-Supélec et Mines-Ponts

Julien Baglio (MP Henri IV)

Session 2005

1 Mathématiques Mines-Ponts

Exercice 1

Soit $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Démontrer que le rayon de convergence de la série est strictement positif.
2. Calculer $f(x)$ sur $]-R; R[$; en déduire une expression de a_n en fonction de R.

Exercice 2

1. Soit A, B deux matrices symétriques positives. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \leq \mathrm{Tr}(A).\mathrm{Tr}(B)$.
2. Soit $\phi(M) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)}$. Montrer que ϕ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Montrer que pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\phi(MN) \leq \phi(M).\phi(N)$.
3. Question supplémentaire : si l'on prend une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a-t'on encore ce type d'inégalité ?

Exercice 3

Soit la courbe polaire d'équation $r(t) = a(1 + \cos t)$.

1. Tracer rapidement cette courbe.
2. Soit D une droite passant par O, elle coupe la courbe en deux points P et Q. Soit A le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. Quel est le lieu géométrique de l'isobarycentre de P,Q,A quand le couple (P,Q) décrit la courbe (ie la droite D varie tout en passant toujours par O) ?

2 Mathématiques Centrale-Supélec

Centrale Mathématiques I

1. Soit $P_n(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{\sqrt{k}}$.
   Montrer que $(P_n(z))$ converge pour$|z| < 1$, diverge pour $|z| > 1$. Que dire pour $z = \boldsymbol{i}$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ avec valeurs propres strictement inférieures à 1. Que dire de $(P_n(A))$?
3. Soit c_n le coefficient dez^n dans $((P_n(z))^2)$. Montrer que c_n admet une limite finie que l'on déterminera.

En cours d'oral, plein de petites questions :

* Le théorème des séries alternées : énoncé, éléments de démonstration.

* Le binôme de Newton dans les anneaux et sa démonstration.

* Notion d'intégrabilité des fonctions.

* La série harmonique : tout ce que vous savez dessus.

Centrale Mathématiques II

Exercice sur les séries de Fourier, avec Maple.

Développer f fonction 2π-périodique et vérifiant $f(t) = t$ sur $[-\pi;\pi]$, comparer $Sf(t)$ et $f(t)$ en des points bien choisis, vérifier le théorème de Parseval.

Mêmes questions avec $g(t) = f(t)^2$.

3 Mathématiques X

X Mathématiques I, Monsieur Rosso

Soit E un espace vectoriel normé, et $f : E \longrightarrow E$.

On suppose que pour toute suite (a_n) telle que $\sum(a_n)$ converge, on a $\sum(f(a_n))$ converge.

Montrer que f est linéaire continue sur un voisinage de l'origine.

X Mathématiques II, Monsieur Grigis

Soit E un espace euclidien de dimension n, et (E_k) une suite de sous-espaces de E telle que $E_k \subsetneq E_(k+1)$.

Soit $x \in E$, et $d_k(x) = d(x, E_k)$.

1. Que dire de la suite $(d_k(x))$?
2. (Après résolution de 1 au tableau uniquement)
   Soit $\Delta_0 \geq \Delta_1 \geq ... \geq \Delta_n = 0$.

   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $d_k(x) = \Delta_k$.
3. Que dire en dimension infinie avec $\mathbb{R}[X]$?
4. Que dire dans un espace hilbertien ?