Oraux des Ecoles Normales Supérieures

Compilé par les MP-MP* du lycée Henri IV

Session 2005

Mathématiques Cachan

Soit un rectangle du plan divisé en petits rectangles. On suppose que chacun de ces petits rectangles admet un côté entier. Démontrer que le grand rectangle admet un côté entier.

Mathématiques Cachan

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et de moyenne nulle.

Soit $g = f + f''$. Montrer que g admet au moins 4 zéros sur un intervalle de longueur 2π.

Mathématiques Cachan

Soit E espace euclidien de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $||u(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x \in E$ ($|| - ||$ norme euclidienne).
On note v le projecteur orthogonal sur $\ker(u - I)$.

1. Déterminer $\ker v$ et montrer que $E = \ker(u - I) \oplus \mathrm{im}(u - I)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p = \dfrac{\sum_{i=0}^{p-1} u^p}{p}$, montrer que pour tout $x \in E$ $\lim\limits_{p \to +\infty} v_p(x) = v(x)$.

Mathématiques Cachan

Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout y on a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x+y) - f(x) = 0$.

Montrer que pour tout compact K de $\mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \sup\limits_{y \in K} f(x+y) - f(x) = 0$.

Mathématiques Cachan

Soit $a > 0$, et $E = C^0([0;a], \mathbb{R})$.
Pour $f \in E$, $x \in [0;a]$, on note $T_f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

Soit $g \in E$, on considère l'équation d'inconnue f :

$$(1)\ f - T_f = g$$

1. Montrer que pour tout g, (1) admet une unique solution. On appellera alors $l(g)$ cette solution.
2. On munit E de la norme de la convergence uniforme. Montrer alors que l est un homéomorphisme de E dans E.

À la suite de cet exercice, dans la même planche :

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout n et pour tout f dans E on ait :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} T^k(f) \right\| \leq C\|f\|$$

Soit maintenant T quelconque, on suppose uniquement que $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n = 0$ et T positif (c'est-à-dire $f \geq 0 \Rightarrow T_f \geq 0$).
Recommencer alors l'exercice avec T, puis expliciter l'inverse de l.

Mathématiques Cachan

Trouver un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

.

Mathématiques Cachan

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable avec $f(0) = 0$ et vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial y} > ||\dfrac{\partial f}{\partial x}||$.

1. Calculer les dérivées de
   (a) $x \longmapsto f(x, x)$
   (b) $x \longmapsto f(x, -x)$
   (c) $y \longmapsto f(x_0, y)$
2. En déduire que l'équation$f(x_0, y) = 0$ a une unique solution $\phi(x_0)$ avec $|\phi(x_0)| \leq |x_0|$.
3. Montrer que ϕ est 1-lipschitzienne : en déduire qu'elle est continue.
4. Calculer un développement limité de ϕ à l'ordre 1 en x_0.

Mathématiques Cachan

Dt́erminer la limite et un équivalent en 1^- de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{t^n}{1 - t^n}$$

Mathématiques Cachan

1. On se place dans l'espace des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie. Montrer que l'application qui à g associe la solution de $-f + T(f) = g$, où $T(f) = \int f$, définit un homéomorphisme.
2. On prend cette fois l'espace des fonctions définies sur E compact de $\mathbb{R}$. On prend un endomorphisme T vérifiant

   (i) $f > 0 \Rightarrow T(f) > 0$

   (ii) Il existe K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} T^i(1) < KT(1)$ (1 désigne la fonction constante 1, et T^i la composée i-ème).

(a) Montrer que pour tout x $T^i(1)(x) -> 0$.

(b) Montrer que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ $T^{n+m}(1) < KT^n$.

(c) Montrer que $T^i(1)$ converge uniformément vers la fonction nulle.

(d) En déduire que T est un homéomorphisme.

Mathématiques Lyon

Soient deux polynômes P et Q, on dit qu'ils sont équivalents s'il existe une application affine ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\phi(C) = C'$ où C et C' sont les courbes de P et Q.

1. Soit P et Q de degré 2. A-t'on toujours P et Q équivalents ?
2. Idem avec deg(P)=2 et deg(Q)=3.
3. Idem avec deg(P)=3 et deg(Q)=3.

Mathématiques Lyon

Soit une norme sur $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'on peut étendre de manière unique cette norme sur $\mathbb{R}^2$.

Mathématiques Lyon

Soit N une application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $N(x) = 0 \Rightarrow x = (0,0)$

(ii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

(iii) $N(kx) = |k|N(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}^2$

Montrer que N s' étend de manière unique en une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Mathématiques Lyon

Soit $C1 : y = x^2$ et $C2 : y = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

1. Ces deux courbes sont-elles affinement équivalentes ?

2. Même question avec $C1$ et $C2'$: $y = x^3$.

Mathématiques Lyon

Soit a un paramètre réel. On considre la courbe dans $\mathbb{R}^2$ définie par $y = x^4 + 9x^3 + ax^2 + 9x + 4$.

Condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur a pour que la courbe soit le support de quatre points colinéaires ?

Mathématiques Ulm

Soit n un entier, et $SL_n(\mathbb{C}) = \{M \in GL_n(\mathbb{C}) / \det M = 1\}$.
Soit H un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{C})$.

On suppose (1) :

- La seule matrice scalaire de H est l'identité.
- Pour tout$M \in SL_n(\mathbb{C})$ il existe un complexe a et $N \in H$ tel que $M = aH$.

Montrer que sous ses hypothèses il existe un morphisme f surjectif de $SL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

Soit $M \in SL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe V hyperplan de $\mathbb{C}^n$ tel que : (2) $E_1(M) = V$ (sous-espace propre associé à 1).
Montrer que $f(M) = 0$.

On veut ensuite montrer que les hypothèses (1) impliquent $n = 1$.
Soit $T = \{M \in SL_n(\mathbb{C}) / M \text{ vérifie } (2)\}$, montrer que T (qui est l'ensemble des transvections) engendre $SL_n(\mathbb{C})$.
En dduire $n = 1$.

Mathématiques Ulm

Existence et valeur de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\left(re^{\boldsymbol{i}t}\right)^k\left(re^{\boldsymbol{i}t}I-M\right)^{-1}dt$$

avec M une matrice quelconque (indication : on trouvera M^{k-1}).

En déduire une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

Mathématiques Ulm

Soit f un polynôme à coefficients entiers de degré $n>0$ ($f\in\mathbb{Z}[X]$).

On suppose f irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $f(a)=0$, et $\mathcal{R}=\{Q(a)/Q\in\mathbb{Z}[X]\}$.

Montrer que :

1. $\mathcal{R}$ est un anneau commutatif.
2. $\mathcal{R}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ pour la structure de groupe.
3. Soit I un idéal non nul de $\mathcal{R}$, montrer que I est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ (structure de groupe).

Mathématiques Ulm

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ absolue, c'est-à-dire $N(x)=N(|x|)$ avec $|x|$ vecteur de composantes les valeurs absolues de celles de x. Montrer que N est monotone.

Soit A une matrice, quelle est la condition sur A pour que $x\longmapsto||Ax||$ (norme euclidienne) soit absolue ?

Mathématiques Ulm

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et N une norme matricielle. K,d,s sont des entiers positifs.

On suppose que $N(B-A)\leq d$ et que pour tout $t\geq 0$ $N(\exp(tA))\leq K\exp(-s.t)$.

Montrer que pour tout $t\geq 0$ on a $N(\exp(tB)\leq K\exp(t(d.K-s))$.

Mathématiques Ulm

Soit K un corps commutatif.
Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) K est algébriquement clos.

(ii) Pour tout entier $n \geq 2$ tout polynôme à n variables homogène de degré n admet un zéro non trivial.

Mathématiques Ulm

Soit A un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit que A vérifie la propriété $P(k,d)$ si pour tout $x \in A$ il existe $y \in A$ tel que $B(y,kd) \subset A \cap B(x,d)$. Montrer que pour tout d, il existe k tel que A vérifie $P(k,d)$.

Mathématiques Ulm

1. Soit une suite (P_n) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f.
   Montrer qu'il existe une suite (a_k) de $\mathbb{R}_+$ telle que la série entière $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$ et telle que g restreint à $[0,1[$ coïncide avec f.
   Peut-on le montrer avec $[0,1]$?
2. On admet la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 10$, n s'écrit $n = p_1 + ... + p_s$, les p_i étant des nombres premiers impairs, 2 à 2 distincts.
   Montrer alors que pour $n \geq 12$, il n'existe pas de morphisme de groupes injectif de $\mathcal{S}_n$ (le groupe symtrique) dans $\mathcal{A}_{n+1}$ (groupe symétrique alterné).

Mathématiques Ulm

On se place dans un corps commutatif K et on prend $n \geq 3$

1. On considère une matrice A dans $\mathcal{M}_n(K)$ non scalaire.
   Montrer que pour tout λ dans K il existe P dans $\mathcal{M}_n(K)$ telle que
   (i) P soit la matrice d'un projecteur de rang 1
   (ii) $PAP = \lambda P$
   (iii) Pour tout μ dans K, $(I_n - P)A(I_n - P) \neq \mu(P - I_n)$
2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(K)$. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ dans K^n.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit semblable à une matrice B, avec sur la diagonale de B les coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$.
3. Montrer que toute matrice de trace nulle s'écrit sous la forme $BC-CB$.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

Que dire des zéros de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \exp(a_i x)$$

Où n est fixé, a_i est un réel et p_i est un polynôme ?

Question de fin de planche : $\mathbb{R}$ est-il homéomorphe à $\mathbb{R}^2$?

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

Soit f une fonction polynômiale non constante de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, montrer qu'elle est

1. Fermée.
2. Ouverte.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

On pose $\phi_n(x) = \theta(2^{k+1}x + (2l - 1))$, où $n = 2^k + l$, l entier compris entre 1 et 2^k, et θ la fonction triangle sur $[0; 1]$ valant 1 en $0,5$, et 0 en 0 et 1.

Soit f fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique suite de réels (c_n) telle que la série de terme général $c_n\phi_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers f.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

1. Soit f une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et $x_1, ..., x_n$ des points de $[a;b]$ fixés.

   Pour $\epsilon > 0$, peut-on trouver un polynôme P tel que $||P - f|| \leq \epsilon$ (en norme infinie) et tel que P interpole f en tous les x_i ?
2. Soit f C^1 de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et croissante.

   Pour $\epsilon > 0$, peut-on trouver un polynôme P tel que $||P - f|| \leq \epsilon$ et tel que P soit croissant sur $[a;b]$?
3. On remplace C^1 par continue dans le 2.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

Soient trois points A, B et C de $\mathbb{R}^3$. On dit que le triplet (A, B, C) forme un trièdre si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux à deux orthogonaux et de même norme.

On note a, b et c les affixes des projetés orthogonaux de A, B et C sur un plan.

Montrer que si (A, B, C) est un trièdre, alors $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Réciproquement, montrer que si $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, alors il existe des points A, B et C de $\mathbb{R}^3$ formant un trièdre et dont a, b et c sont les affixes des projetés orthogonaux sur un plan.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

1. Démonstration de la décomposition de Choleski et de l'inégalité d'Hadamard. Donner l'interprétation géométrique de cette dernière.
2. Soit q une forme quadratique définie positive. Montrer que $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} q(x, y)$ est atteint.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

Soit $y + f(y) = p$, avec f, p C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que p est bornée sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante et dimage $\mathbb{R}$ tout entier.

Montrer que si l'on se donne une condition de Cauchy quelconque on a une solution définie sur $\mathbb{R}$.

On suppose p 1-périodique.

Montrer qu'il y a une seule solution 1-périodique.

Mathématiques Ulm/Lyon/Cachan

Soit f fonction de classe C^2, réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(ii) $f^{''} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Montrer que $f' = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.